

Über die polykonischen Loxodromen.

Memoria di WALTER WUNDERLICH (a Wien).

Zusammenfassung. - Die schon von PIRONDINI und CESÀRO betrachteten Raumkurven, die die Erzeugenden zweier Kegel unter konstanten Winkeln schneiden, werden mittels einer elementaren Methode untersucht. Die bisher bekannten Eigenschaften, die sich hier als Sonderfälle eines allgemeineren Satzes ergeben, werden um neue bemerkenswerte Eigenschaften vermehrt. Die analytische Darstellung dieser Kurven wird auf ein elliptisches Integral zurückgeführt.

1. **Einleitung.** — A. ENNEPER⁽¹⁾ hatte bemerkt, dass die *Böschungslinien* (Kurven konstanter Steigung, Zylinderloxodromen, allgemeinen Schraubenlinien), die auf einer *Drehfläche 2. Grades* mit lotrechter Achse verlaufen, auch *Loxodromen zweier Kegel* sind, deren Scheitel mit den Brennpunkten der Trägerfläche zusammenfallen; das soll heissen, dass die genannten Kurven die Erzeugenden der beiden Kegel unter konstanten Winkeln schneiden. G. SCHEFFERS⁽²⁾ stellte später von neuem fest, dass jede Raumkurve, die Zylinder- und Kegelloxodrome zugleich ist, auf einer Drehfläche 2. Grades liegt, deren Achse die Richtung der Zylindererzeugenden hat.

Es war naheliegend, auch nach den allgemeinsten Kurven zu fragen, die die Erzeugenden zweier Kegel unter konstanten Winkeln durchsetzen. G. PIRONDINI⁽³⁾ fand, dass diese Kurven auf gewissen *Drehflächen 4. Ordnung* verlaufen und bei der Verebnung des achsenparallelen Zylinders, auf dem sie liegen, in *gemeine Zykloiden* übergehen. E. CESÀRO⁽⁴⁾ erkannte dann den Meridian der Drehfläche als *Cartesisches Oval*; zwei der drei Brennpunkte werden von den Kegelscheiteln dargestellt, und die Gleichberechtigung des dritten führt auf einen weiteren Kegel, dessen Erzeugenden die Kurve unter unveränderlichem Winkel treffen; abgesehen von Ausartungen sind die betrachteten Kurven also immer *dreifache Kegelloxodromen*. CESÀRO entdeckte noch einen vierten ausgezeichneten Kegel, durch dessen Abwicklung die Kurve in eine *Gerade* übergeht; die allgemeinen polykonischen Loxodromen gehören demnach zu den *Kegelgeodätischen*.

⁽¹⁾ A. ENNEPER, *Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung*, « Math. Ann. », 19 (1882), 72-83.

⁽²⁾ G. SCHEFFERS, *Über Loxodromen*, « Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig », (1902), 363-370.

⁽³⁾ G. PIRONDINI, *Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable*, Crelles J. 118 (1897), 61-73.

⁽⁴⁾ E. CESÀRO. *Analisi intrinseca delle eliche policoniche*, « Rend. acc. sci. fis. mat. Napoli », ser. III, 9 (1903), 73-89.

Man kennt auch die « natürlichen Gleichungen » der polykonischen Loxodromen, viel mehr weiss man jedoch von ihnen nicht. In der vorliegenden Mitteilung wird nun ein allgemeiner Satz über diese Kurven bewiesen, der die Resultate von PIRONDINI und CESÀRO als Sonderfälle umfasst, ferner werden weitere bemerkenswerte geometrische Eigenschaften aufgedeckt, und schliesslich wird eine Parameterdarstellung der Kurven mittels elliptischer Integrale angegeben. Behandelt wird grundsätzlich nur der « allgemeine Fall » ⁽⁵⁾.

2. Grundlagen. — Eine Kegelloxodrome geht bei der Verebnung des Kegels in eine *logarithmische Spirale* über. Man kann sich demnach einfach ein Modell einer bikonischen Loxodrome herstellen, indem man zwei von logarithmischen Spiralen begrenzte Sektoren mit ihren krummen Rändern zusammenheftet.

Für eine solche Doppelloxodrome hängen die Entfernungen R_1, R_2 eines laufenden Punktes P von den Kegelspitzen F_1, F_2 offensichtlich linear von der *Bogenlänge* s ab; sind σ_1, σ_2 die beiden unveränderlichen Schnittwinkel, so gilt mit passenden Konstanten a_1, a_2

$$(1) \quad R_1 = a_1 + s \cos \sigma_1, \quad R_2 = a_2 + s \cos \sigma_2.$$

Elimination von s liefert dann die Bedingung

$$(2) \quad R_1 \cos \sigma_2 - R_2 \cos \sigma_1 = a_1 \cos \sigma_2 - a_2 \cos \sigma_1 = \text{const},$$

die als die Gleichung einer *Drehfläche* Φ in bipolaren Koordinaten R_1, R_2 aufgefasst werden kann, auf welcher die Doppelloxodrome verläuft. Es ist bekannt, dass eine lineare Beziehung zwischen bipolaren Koordinaten in der Ebene ein *Cartesisches Oval* darstellt ⁽⁶⁾; damit ist der Meridian der Drehfläche Φ gekennzeichnet, die im übrigen zu den *Zykliden* gehört, da sie — auf sechs Arten — durch Rotation von (imaginären) Kreisen erzeugt werden kann ⁽⁷⁾. Die Fläche besteht aus zwei geschlossenen Teilen; der innere ist stets oval, während der äussere eine Einbuchtung besitzen kann.

Zur Behandlung des Cartesischen Ovals eignet sich besonders eine symmetrische, zum erstenmal von PANTON ⁽⁸⁾ verwendete Darstellung. Ein Cartesisches Oval besitzt bekanntlich *drei ordentliche Brennpunkte* F_1, F_2, F_3 , überdies noch einen *ausserordentlichen Brennpunkt* O ; durch diese vier Brennpunkte, die alle auf der Symmetrieachse z liegen, ist das Oval vollständig

⁽⁵⁾ Über den ebenfalls hierher gehörigen Sonderfall der *sphärischen Kegelloxodromen* ⁽³⁾ vgl. W. WUNDERLICH. *Ueber die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren*, « Soc. Sc. Fennica, Comm. Phys.-Math. », 14 (1949), 1-16.

⁽⁶⁾ G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, (Leipzig, 1902), Bd. I, 174 ff.

⁽⁷⁾ G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, (Paris, 1873), 154. — Die Kreise liegen in den Minimalebene durch die Brennpunkte F_i .

bestimmt. Wir machen O zum Ursprung eines Systems von Zylinderkoordinaten φ, r, z und setzen $\overline{OF_i} = e_i$, wobei wir etwa

$$(3) \quad 0 < e_1 < e_2 < e_3$$

voraussetzen. Mit Benützung der elementarsymmetrischen Funktionen

$$(4) \quad A = e_1 + e_2 + e_3, \quad B = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1, \quad C = e_1 e_2 e_3$$

lässt sich dann die Gleichung des Ovals und damit der Zyklide Φ in der Gestalt

$$(5) \quad (r^2 + z^2 - B)^2 + 4C(2z - A) = 0$$

anschreiben. Die linearen Beziehungen zwischen den Fokalentfernungen $\overline{F_i P} = R_i$ lauten

$$(6) \quad \frac{R_1 - a_1}{\sqrt{e_1}} = \frac{R_2 - a_2}{\sqrt{e_2}} = \frac{R_3 - a_3}{\sqrt{e_3}},$$

wobei

$$(7) \quad a_1 = \sqrt{e_2 e_3}, \quad a_2 = \sqrt{e_3 e_1}, \quad a_3 = \sqrt{e_1 e_2}.$$

Ist nun k eine auf der Fläche Φ verlaufende Kurve, die die von F_1 ausgehenden Brennstrahlen unter dem beliebig vorgegebenen konstanten Winkel σ_1 schneidet, so gilt bei geeigneter Zählung der Bogenlänge s die erste der Gleichungen (1). Dann sind aber wegen (6) auch die zweite und eine entsprechende dritte Gleichung (1) erfüllt, wenn wir σ_2 bzw. σ_3 gemäss der Proportion

$$(8) \quad \cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 = \sqrt{e_1} : \sqrt{e_2} : \sqrt{e_3}$$

bestimmen. Die Kurve k schneidet also auch die Brennstrahlen von F_2 bzw. F_3 unter den festen Winkeln σ_2 bzw. σ_3 . Auf einer vorgelegten Zyklide Φ gibt es mithin ∞^1 verschiedene Drehscharen von dreifachen Kegelloxodromen, je nach der Wahl des Schnittwinkels σ_1 oder des gemeinsamen Wertes

$$(9) \quad m = e_1 / \cos^2 \sigma_1 = e_2 / \cos^2 \sigma_2 = e_3 / \cos^2 \sigma_3,$$

oder auch des Wertes

$$(10) \quad n = \sqrt{C/m} = m \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 \cos \sigma_3 = a_1 \cos \sigma_1 = a_2 \cos \sigma_2 = a_3 \cos \sigma_3.$$

3. Inversionen. — Es ist bekannt, dass ein Cartesisches Oval *dreifach anallagmatisch* ist; es geht nämlich durch jede Inversion, die einen ordentlichen Brennpunkt F_i zum Zentrum hat und die beiden anderen vertauscht, in sich über. Dasselbe gilt natürlich für die Drehzyklide Φ .

Eine auf Φ verlaufende polykonische Loxodrome k geht durch eine solche Inversion in eine Flächenkurve k^* über, die ebenfalls auf dem Kegel $F_i k$ liegt und auf Grund der Winkeltreue dessen Erzeugenden auch unter dem konstanten Winkel σ_i schneidet. Es ist also k^* eine Loxodrome gleicher Art und daher zu k *kongruent*. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass unsere

Loxodromen aus zwei Zügen bestehen, die sich auf die beiden Mäntel der Fläche Φ verteilen; nur bei der Inversion von F_3 aus bleibt jeder Zug auf seinem Mantel, während bei den Inversionen aus F_1 oder F_2 eine Vertauschung eintritt.

In diesem erweiterten Sinn kann jedenfalls gesagt werden:

Die allgemeinen polykonischen Loxodromen sind dreifach anallagmatisch ⁽⁸⁾.

4. Verebnungen. — Sei $F(r=0, z=e)$ ein beliebiger Punkt der z -Achse und $\Gamma = Fk$ sein Verbindungskegel mit der Loxodrome k . Es soll die ebene Kurve $\bar{k}$ untersucht werden, in die k durch *Abwicklung* von Γ übergeht.

Wir drücken zu diesem Zweck die Entfernung $R = \overline{FP}$ eines laufenden Kurvenpunktes P durch seine Fokaldistanzen R_1 und R_2 aus, indem wir die Koordinaten r und z aus den Abstandsformeln

$$(11) \quad R^2 = r^2 + (z - e)^2, \quad R_1^2 = r^2 + (z - e_1)^2, \quad R_2^2 = r^2 + (z - e_2)^2$$

eliminieren. Unter gleichzeitiger Einführung der Bogenlänge s mittels (1) erhalten wir

$$(12) \quad (e_2 - e_1)(R^2 - e^2) = (e_2 - e)(a_1^2 - e_1^2 + 2a_1s \cos \sigma_1 + s^2 \cos^2 \sigma_1) \\ + (e - e_1)(a_2^2 - e_2^2 + 2a_2s \cos \sigma_2 + s^2 \cos^2 \sigma_2).$$

Diese Beziehung muss nun sicherlich symmetrisch in bezug auf e_1, e_2 und e_3 sein; tatsächlich lässt sie sich nach Umformung mittels (7), (9) und (10) durch $e_2 - e_1$ kürzen und schliesslich auf die Gestalt

$$(13) \quad R^2 = e^2 - Ae + B + 2ns + \frac{e}{m}s^2$$

bringen. Es erweist sich noch als vorteilhaft, das lineare Glied $2ns$ durch die Substitution

$$(14) \quad S = s + \frac{mn}{e}$$

⁽⁸⁾ Für spezielle polykonische Loxodromen braucht der Satz nicht zu gelten. Rücken z.B. zwei ordentliche Brennpunkte zusammen, so artet das Cartesische Oval zu einer *Pascal-schnecke* aus, u.zw. zu einer verkürzten für $e_1 = e_2$, zu einer verschlungenen für $e_2 = e_3$, und zu einer gespitzten (Kardioide) für $e_1 = e_2 = e_3$. Die zugehörige Drehzyklide Φ wird durch eine Inversion aus dem Doppelpunkt, in dem die Brennpunkte vereinigt sind, in ein verlängertes *Drehellipsoid*, zweischaliges *Drehhyperboloid* bzw. *Drehparaboloid* verwandelt, wobei die Loxodromen von Φ in *Böschungslinien* auf den genannten Flächen 2. Grades übergehen.

Die Projektionen dieser Loxodromen aus dem Inversionszentrum auf eine achsennormale Ebene können demzufolge als *nichteuklidische Kreistraktrizen* im Sinne einer elliptischen Massbestimmung nach CAYLEY-KLEINSchem Muster aufgefasst werden. Vgl. W. WUNDERLICH, *Über die Schleppkurven des Kreises*, « Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien », 156 (1948), 155-173.

wegzuschaffen, was lediglich eine Verschiebung des Anfangspunktes der Bogenzählung bedeutet. Unter Verwendung der Abkürzung

$$(15) \quad \Pi(z) = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3) = z^3 - Az^2 + Bz - C$$

erhalten wir dann die zu (13) äquivalente Formel

$$(16) \quad R^2 = \frac{e}{m} S^2 + \frac{\Pi(e)}{e}.$$

Die *Abwicklungskurve* $\bar{k}$ ist nunmehr durch den Zusammenhang zwischen Radius-vektor R und Bogenlänge S gekennzeichnet. Um sie zu identifizieren, leiten wir ihre « natürliche Gleichung » im Sinne CESÁROS ab. Wir bilden zu diesem Zwecke die Ableitung nach S und führen den Tangentenwinkel τ durch $dR/dS = \cos \tau$ ein. Die so gewonnene Beziehung

$$(17) \quad R \cos \tau = \frac{e}{m} S$$

differenzieren wir neuerlich und führen gleichzeitig die Krümmung $1/\rho = d(\psi + \tau)/dS$ unter Berücksichtigung von $Rd\psi/dS = \sin \tau$ ein, womit wir zu

$$(18) \quad R \sin \tau = \frac{m - e}{m} \rho$$

gelangen. Vergleichen wir nunmehr die Quadratsumme von (17) und (18) mit (16), so erhalten wir die *natürliche Gleichung*

$$(19) \quad (m - e)\rho^2 = eS^2 + \frac{m^2\Pi(e)}{e(m - e)}.$$

Durch eine Gleichung dieser Bauart wird aber bekanntlich eine *zyklische Kurve* gekennzeichnet⁽⁹⁾, d.h. die Bahn eines Umfangspunktes eines Kreises, der auf einem anderen rollt.

Um die *Unterarten* der zyklischen Kurven (19) zu erkennen, berechnen wir mittels (17) und (18) die Halbmesser R' , R'' jener beiden Kreise, auf welchen die Scheitel bzw. Spitzen der Kurve liegen. Wir finden

$$(20) \quad \begin{aligned} \text{Scheitel: } \tau &= \frac{\pi}{2}, \quad S' = 0, \quad R' = \sqrt{\frac{\Pi(e)}{e}}, \quad \rho' = \frac{m}{m - e} R';^{(10)} \\ \text{Spitze: } \tau'' &= 0, \quad S'' = \frac{e}{m} R'', \quad R'' = \sqrt{\frac{\Pi(e)}{e - m}}, \quad \rho'' = 0. \end{aligned}$$

⁽⁹⁾ G. LORIA, a.a.O., Bd. II, 121. — Die genaueste Diskussion findet sich bei H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Sammlung Schubert, Bd. 55, Leipzig, 1908), 197, 211, 219.

⁽¹⁰⁾ R' ist als gewöhnliches Extrem von R offenbar die Länge des *Lotes*, das man aus dem Achsenpunkt F auf die Drehzyklide Φ fallen kann. Auf dem Parallelkreis, der durch den Fusspunkt geht, befindet sich der Anfangspunkt des Bogens S ; er braucht nicht immer reell zu sein.

Das Realitäts- und Grössenverhältnis von R' und R'' gibt uns dann sofort Aufschluss über die Gattung der zyklischen Kurve.

Verbindet man eine allgemeine polykonische Loxodrome k mit einem beliebigen Achsenpunkt, und verebnet man den so entstehenden Kegel, so geht k hierbei in einen Bogen einer zyklischen Linie oder eines Grenzfalles einer solchen über. Über die Art der Linie gibt die folgende Zusammenstellung Auskunft:

$e < 0 : R' > R''$	Epizykloide
$e = 0 : R' = \infty, R'' = n$	Kreisevolvente
$0 < e < e_1 : R' \text{ imaginär, } R'' \text{ reell}$	Parazykloide
$e_1 < e < e_2 : R' \text{ reell, } R'' \text{ imaginär}$	Hyperzykloide
$e_2 < e < e_3 : R' \text{ imaginär, } R'' \text{ reell}$	Parazykloide
$e = e_1 : R' = R'' = 0$	logar. Spiralen
$e_3 < e < m : R' \text{ reell, } R'' \text{ imaginär}$	Hyperzykloide
$e = m : R' = p, R'' = \infty$	Gerade ⁽⁴⁾
$e > m : R' < R''$	Hypozykloide
$e = \infty : R' = R'' = \infty, R'' - R' = m/2$. .	gemeine Zykloide ⁽³⁾ .

Damit ist der angekündigte allgemeine Satz abgeleitet, der die zwei bisher bekannten Spezialfälle $e = \infty$ (PIRONDINI ⁽³⁾) und $e = m$ (CESÀRO ⁽⁴⁾) umfasst und erweitert. Der letzte Fall, sowie der wichtige neue Sonderfall $e = 0$ sollen in den nächsten Abschnitten ausführlicher besprochen werden.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, den allgemeinen Satz für spezielle und ausgeartete Drehzykliden abzuwandeln.

5. Rektifizierender Kegel. — Wie aus der Annahme $e = m$ folgt, gibt es auf der z -Achse in der Entfernung m vom Nullpunkt O einen Punkt M mit der Eigenschaft, dass die Verebnung seines Verbindungskegels Mk die Loxodrome k in eine Gerade $\bar{k}$ überführt. Wir schliessen das am besten aus der Gleichung (16), die die Form des pythagoreischen Lehrsatzes

$$(21) \quad R^2 = S^2 + p^2$$

annimmt, wobei für den Scheitelabstand p die Formel

$$(22) \quad p = \sqrt{\frac{\Pi(m)}{m}} = m \sin \sigma_1 \sin \sigma_2 \sin \sigma_3$$

gilt. Des ist der Inhalt des Satzes von CESÀRO:

Die allgemeine polykonische Loxodrome ist geodätische Linie auf einem Kegel, dessen Scheitel M auf der Achse in der Entfernung $m = e_1 / \cos^2 \sigma_1$ vom Nullpunkt liegt.

Beachten wir, dass während des Abwickelvorganges des « rektifizierenden Kegels » Mk der Scheitelabstand p der Geraden $\bar{k}$ unverändert bleibt und diese stets mit einer Tangente von k zusammenfällt, so erkennen wir die für

alle Kegelgeodätischen gültige Tatsache, dass sämtliche Tangenten von k eine Kugel $\Sigma(M, p)$ berühren — eine Konsequenz, die CESARO nicht ausgesprochen hat. Zuzufolge einer oben gemachten Bemerkung (¹⁰) ist $R' = p$ der Normalabstand des Punktes M von der Zykliide Φ , und demnach ist die Kugel Σ der Drehfläche Φ längs eines Parallelkreises ein- oder angeschrieben:

Sämtliche Tangenten und Schmiegeebenen der allgemeinen polykonischen Loxodrome berühren eine feste Kugel Σ mit der Mitte $M(r=0, z=m)$ und dem Radius p (22). Diese Kugel berührt die Drehzyklide, auf welcher die Loxodrome verläuft, längs eines Parallelkreises.

Die Berührung zwischen Σ und Φ — die, nebenbei bemerkt, in der Ebene $2z = A - C/m^2$ stattfindet — braucht durchaus nicht reell zu sein; dies ist z.B. sicher nicht der Fall, wenn der Aussenmantel der Zykliide oval ist ($A^2 > 4B$).

6. **Polartorse.** — Die Annahme $e = 0$ — entsprechend der Annahme der Kegelspitze im ausserordentlichen Brennpunkt O — reduziert (13) auf

$$(24) \quad R^2 = 2ns + B$$

und führt über $R \cos \tau = n$ und $R \sin \tau = \rho$ auf die natürliche Gleichung

$$(25) \quad \rho^2 = 2ns + (B - n^2)$$

einer Kreisevolvente $\bar{k}$ mit dem Grundkreishalbmesser n :

Bei der Verebnung des Verbindungskegels einer allgemeinen polykonischen Loxodrome mit dem Mittelpunkt (singulären Brennpunkt) der Trägerzyklide geht die Loxodrome in den Bogen einer Kreisevolvente über.

Alle Normalebenen der Kreisevolvente $\bar{k}$ berühren eine Kugel mit dem Radius n . Diese Eigenschaft bleibt auch bei der Verbiegung zur Loxodrome k erhalten. Es gilt daher:

Sämtliche Normalebenen und Krümmungsachsen der allgemeinen polykonischen Loxodrome berühren eine zur Trägerzyklide Φ konzentrische Kugel Ω vom Halbmesser n (10).

Die von den Normalebenen der Loxodrome k eingehüllte Polartorse ist der Kugel Ω umschrieben. Ihre Gratlinie l , d.i. die « Polare » oder « Planevolute » von k , ist demnach eine Kegelgeodätische. Da ferner die rektifizierenden Ebenen einer Kurve und ihrer Evolute in entsprechenden Punkten stets parallel sind, und in unserem Falle sämtlich durch die festen Punkte M bzw. O gehen, sind die von ihnen eingehüllten rektifizierenden Kegel Mk und Ol kongruent.

Die allgemeine polykonische Loxodrome und ihre Planevolute sind geodätische Linien auf kongruenten Kegeln.

Die Vermutung liegt nahe, dass die Evolute l selbst eine polykonische Loxodrome ist — umsomehr, als dies im Sonderfalle der Böschungslinien auf

Drehflächen 2. Grades tatsächlich zutrifft⁽¹¹⁾. Dies ist im allgemeinen Falle jedoch nicht wahr, wie wir einsehen, wenn wir die durch Rotation von l um z entstehende Drehfläche Ψ untersuchen. Sei P ein Punkt von k und Q der zugehörige Punkt von l ; wegen der Gleichheit der rektifizierenden Kegel ist $MP \parallel OQ$; Q liegt also in der Meridianebene μ von P , definitionsgemäss auch in der Normalebene ν von k , daher auf der Zyklidennormale $\mu\nu = PF$. Der Lotpunkt F auf z ist die Spitze jenes Projektionskegels von k , bei dessen Verebnung P zu einem Scheitel der zyklischen Linie $\bar{k}$ wird; nach (20) und (14) ist daher $\overline{OF} = e = -mn/s$, wobei s die zu P gehörige Bogenlänge bedeutet. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MPF und OQF folgt mithin

$$\overline{OQ} : \overline{MP} = \overline{OF} : \overline{MF} = n : (n + s),$$

und damit ergeben sich für die Koordinaten des zum Loxodromenpunkt $P(\varphi, r, z)$ gehörigen Schmieggkugelzentrums $Q(\varphi^*, r^*, z^*)$ die Werte

$$(36) \quad \varphi^* = \varphi, \quad r^* = \frac{n}{n+s} r, \quad z^* = \frac{n}{n+s} (z - m).$$

Denken wir uns hierin r und z als Funktionen von s eingesetzt — die zugehörigen Substitutionen

$$(27) \quad r^2 = B + 2ns - \frac{1}{4} \left(A - \frac{s^2}{m} \right)^2, \quad z = \frac{1}{2} \left(A - \frac{s^2}{m} \right)$$

fliessen aus dem Vergleich von (11) und (13), wo man am besten $e = 0$ und ∞ setzt —, so geben r^* und z^* die Parametergleichungen einer Drehfläche 4. Ordnung Ψ , auf der die Polare l liegt. Ihr Meridian weist jedoch reelle Fernpunkte auf ($s = -n$), ist also sicher kein Cartesisches Oval.

Trotz der negativen Antwort hat sich ein bemerkenswertes Zwischenergebnis eingestellt: Die zu einem Loxodromenpunkt P gehörige Schmieggkugelmitte Q liegt auf der Zyklidennormale in P . Das bedeutet:

Die Schmieggkugeln der allgemeinen polykonischen Loxodrome berühren die Trägerzyklide.

Die ∞^2 Kurven auf einer Fläche, deren Schmieggkugeln die Fläche berühren, werden nach DARBOUX benannt, der sie zum erstenmal betrachtet und ihre Integration für Flächen 2. Grades und Zykliden allgemein durchgeführt hat⁽¹²⁾. Dass die Böschungslinien auf Drehflächen 2. Ordnung mit lotrechter Achse die Darboux'schen Linien (« D-Linien ») derselben darstellen, hat schon BLASCHKE⁽¹¹⁾ bemerkt. Als Verallgemeinerung hat sich nun ergeben:

Die Darboux'schen Linien einer Drehfläche, die durch Rotation eines Car-

(11) W. BLASCHKE, *Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien*, « Monatsh. Math. Phys. », 19 (1908), 188-204: « Die Polare einer Böschungslinie auf einer Drehfläche 2. Grades mit lotrechter Achse ist eine gleichartige Böschungslinie, affin zur ersten ».

(12) G. DARBOUX, *Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface*, « C. R. », 73 (1871), 732-736.

G. LORIA, *Curve sghembe speciali*, (Bologna, 1925), I, 24; II, 225.

tesischen Ovals um seine Achse entsteht, sind identisch mit den ∞^2 polykonischen Loxodromen, die auf einer solchen Fläche liegen.

Das begleitende Dreibein einer polykonischen Loxodrome k stützt sich mit seinen drei Ebenen auf zwei Kugeln und einen Punkt: Die Schmiegeebene berührt nach Abschn. 5 ständig die Kugel $\Sigma(M, p)$, die rektifizierende Ebene geht dementsprechend immer durch M , und die Normalebene berührt schliesslich die feste Kugel $\Omega(O, n)$, wie wir gesehen haben. Durch eine solche Führung ist aber auch umgekehrt eine polykonische Loxodrome charakterisiert; von einer Anfangsstellung des Dreibeins ausgehend entwickelt sich die Bahnkurve k des Scheitels aus infinitesimalen Schritten ganz zwangsläufig. Auf Grund der Kugelführungen hat k die Eigenschaft, bei Verebnung der Kegel Mk bzw. Ok in eine Gerade bzw. eine Kreisevolvente verwandelt zu werden; demzufolge gelten für die Abstände $\overline{MP} = R_m$ und $\overline{OP} = R_0$ des laufenden Punktes P entsprechend (21) bzw. (24) die kennzeichnenden Beziehungen

$$R_m^2 = S^2 + p^2, \quad R_0^2 = 2nS + d.$$

Ganz analog wie aus (11) lässt sich daraus für das Quadrat der Entfernung $\overline{FP} = R$ von einem beliebigen Achsenpunkt $F(z=e)$ eine quadratische Relation in S ableiten, deren Koeffizienten natürlich in bestimmter Weise von e abhängen. Das Polynom lässt sich dann für besondere Werte von e — auf mehrfache Weise — auf ein vollständiges Quadrat bringen, sodass R eine lineare Funktion des Bogens S wird, was die konische Loxodrome erkennen lässt. Es muss hier jedoch der Fall komplexer Schnittwinkel einbezogen werden; in diesem weiteren Sinne gilt dann:

Hat eine Raumkurve die Eigenschaft, dass ihre Schmiegeebenen und Normalebene je eine feste Kugel berühren, so ist sie eine polykonische Loxodrome.

Oder anders ausgedrückt:

Die polykonischen Loxodromen sind die einzigen Kegelgeodätischen, deren Polare (Planevolute) auch eine Kegelgeodätische ist.

7. Integration. — Verfolgen wir die Rollbewegung einer Tangente der Zyklide Φ , während welcher sie auf der Kugel Σ ständig quer zu ihrer eigenen Richtung schleift, so gewinnen wir eine anschauliche Vorstellung vom Verlauf der Loxodrome k , die als Abdruckspur der Tangente auf Φ erscheint: Jeder der beiden Züge von k verläuft auf seinem Flächenmantel periodisch zwischen zwei Parallelkreisen, auf denen er mit *Spitzen* senkrecht aufsetzt.

Diese vier Grenzkreise lassen sich mit Zirkel und Lineal aus der Bedingung konstruieren, dass aus ihren Punkten die Fokalstrecken $F_i F_k$ unter den bekannten Winkeln $\sigma_i \mp \sigma_k$ gesehen werden. Durch Betrachtung der Inversionen aus Abschnitt 3, die Φ in sich transformieren und die Grenzkreise vertauschen, gelangen wir aber zu noch einfacheren Winkelbeziehungen: Ein Hilfskreis über der Sehne $F_i F_k$ wird ja durch die Inversion aus F_i in eine Gerade durch F_i verwandelt, wobei der Schnittwinkel mit der Achse z erhalten

bleibt. Die vier Grenzkreise werden daher aus den ordentlichen Brennpunkten F_i durch Drehkegel mit den halben Öffnungswinkeln $\sigma_i \pm \sigma_h$ projiziert.

Damit lassen sich auch die Radien und Ebenen der Grenzkreise leicht berechnen, ebenso die zugehörigen Bogenlängen. Für den Grenzkreis g_0 , der zu den halben Öffnungen $\sigma_1 + \sigma_h$ gehört, finden wir

$$\begin{aligned} r_0 &= m \sin(\sigma_1 + \sigma_2) \sin(\sigma_2 + \sigma_3) \sin(\sigma_3 + \sigma_1) \\ (28) \quad z_0 &= \frac{1}{2}A - m \cos^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ s_0 &= -m \cos(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned}$$

Für die übrigen Grenzkreise g_i ($i = 1, 2, 3$) ist jeweils das Vorzeichen von σ_i zu ändern. g_0 und g_3 befinden sich bei Voraussetzung (3) auf dem Aussenmantel, g_1 und g_2 auf dem Innenmantel der Zyklide.

Zur Integration gehen wir vom Bogenelement in Zylinderkoordinaten

$$(29) \quad ds^2 = (rd\varphi)^2 + dr^2 + dz^2$$

aus; da die Abhängigkeiten $r(s)$ und $z(s)$ aus (27) bekannt sind, stösst die Berechnung der fehlenden Abhängigkeit $\varphi(s)$ auf keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Nach einigen Umformungen ergibt sich schliesslich

$$\begin{aligned} (30) \quad \varphi &= \frac{1}{2m} \int \frac{\sqrt{Q}}{r^2} ds \text{ mit} \\ Q &= m^2(4B - A^2 - 4n^2) + 4mn(2m - A)s + 2(mA - 2B)s^2 - 4ns^3 - s^4. \end{aligned}$$

Damit ist der Polarwinkel φ durch ein *elliptisches Integral* ausgedrückt.

Die zur Auswertung wichtigen *Nullstellen* des Zählers und des Nenners können auf Grund ihrer geometrischen Bedeutung angegeben werden. Zu $Q=0$ gehört ein stationärer Wert von φ ; es handelt sich also um die *Spitzen* der Loxodrome und die vier Nullstellen s_0, s_1, s_2, s_3 haben die aus (28) bekannten Werte. Durch $r=0$ sind hingegen die Nullkreise, also die Minimalstrahlenpaare durch die *Scheitel* der Zyklide gekennzeichnet; deren Höhen lauten — wie man etwa aus (6) finden kann —

$$(31) \quad \begin{aligned} \bar{z}_0 &= -a_1 - a_2 - a_3, & \bar{z}_3 &= a_1 + a_2 - a_3 \quad (\text{äusseres Oval}), \\ \bar{z}_1 &= -a_1 + a_2 + a_3, & \bar{z}_2 &= a_1 - a_2 + a_3 \quad (\text{inneres Oval}), \end{aligned}$$

und hierzu gehören gemäss (27) die Bogenlängen

$$(32) \quad \bar{s}_{0,1} = \frac{1}{n} (a_2 a_3 \pm a_3 a_1 \pm a_1 a_2) = m(\cos \sigma_1 \pm \cos \sigma_2 \pm \cos \sigma_3) \quad \text{usf.}$$

Es sei noch bemerkt, dass der Zähler des Integrals (30) dem *Krümmungsradius* ρ der Loxodrome k direkt proportional ist; es gilt

$$(33) \quad \rho = \frac{1}{2n} \sqrt{Q} = \frac{1}{2n} \sqrt{-(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit der von CESÀRO ⁽⁴⁾ angegebenen natürlichen Gleichung bis auf das Vorzeichen des Gliedes s^2 in Übereinstimmung bringen.