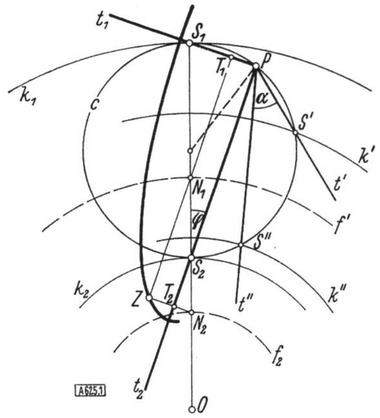
KLEINE MITTEILUNGEN

Die isoptischen Kurven der Zykloiden.

Dreht sich eine Gerade t' mit fester Winkelgeschwindigkeit ω um einen Punkt S', der seinerseits mit fester Winkelgeschwindigkeit ϖ auf einem Kreise k' wandert, so umhüllt sie bekanntlich[1] eine Zykloide. Wir betrachten nun neben dieser noch eine zweite Gerade t'', die sich mit derselben Geschwindigkeit ω um einen Punkt S'' dreht, der mit der Geschwindigkeit ϖ einen zu k' konzentrischen Kreis k'' durchläuft; ihre Hüllkurve ist eine zur ersten ähnliche, konzentrische Zykloide.



Der Winkel $t't'' = \alpha$ bleibt während der Bewegung offenbar konstant, und der Schnittpunkt $P = [t't'']$ beschreibt eine Kurve, aus deren Punkten das Zykloidenpaar unter dem Winkel α erscheint, also eine isoptische Kurve des Zykloidenpaares. Denken wir uns für den Augenblick S' und S'' fest, so beschreibt P nach dem Satz vom Peripheriewinkel einen Kreis c, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit; da sich aber in Wahrheit c mit S' und S'' gleichförmig um O dreht, ist der Ort von P eine Trochoide:

Satz I. Gleiten die Schenkel eines festen Winkels an zwei konzentrischen ähnlichen Zykloiden, so beschreibt sein Scheitel i. a. eine Trochoide. Jede mit dem Winkel fest verbundene Gerade durch den Scheitel umhüllt hierbei eine zu den gegebenen ähnliche, konzentrische Zykloide.

Die Richtigkeit des zweiten Teiles von Satz I ergibt sich wieder unmittelbar aus dem Satz vom Peripheriewinkel: Der zweite Schnittpunkt einer Geraden des Büschels $(t't'')$ mit dem Kreis c bleibt auf diesem fest, er wandert mit der Geschwindigkeit ϖ um O, und die Gerade dreht sich um ihn mit der Geschwindigkeit ω, vollführt also dieselbe Bewegung wie t' und t''.

Während dieser Satz über das „Reiten" eines Winkels auf einer Zykloide oder einem Zykloidenpaar seit langem bekannt ist[1], sei hier eine Bemerkung über die Polkurven dieser Bewegung gestattet, die neu zu sein scheint.

Zunächst können nach Satz I die Strahlen t', t'' durch zwei beliebige andere des Büschels P ersetzt werden (natürlich samt den zugehörigen Zykloiden), ohne daß die Bewegung verändert wird. Wir wählen jene Strahlen t_1 und t_2, die die Endpunkte S_1, S_2 des durch O gehenden Durchmessers von c mit P verbinden. t_1 und t_2 stehen aufeinander senkrecht, und ihre Hüllzykloiden z_1, z_2 sind so gelegen, daß immer ein Scheitel der einen und ein Rückkehrpunkt der anderen auf einem Strahl durch O liegen.

Das Momentanzentrum Z erhält man nun, wenn man in den Berührungspunkten T_1, T_2 der Schenkel t_1, t_2 mit den zugehörigen Zykloiden z_1, z_2 die Normalen errichtet und zum Schnitt bringt. Diese Normalen umhüllen im Laufe der Bewegung die Evoluten von z_1 und z_2, das sind bekanntlich zu z_1 und z_2 ähnliche Zykloiden, die überdies dieselbe gegenseitige Lage haben wie z_1 und z_2. Da die Normalen wie t_1 und t_2 senkrecht aufeinander stehen, ergibt sich mit Benützung von Satz I für den Ort der Punkte Z — also für die Rastpolbahn — eine zur Bahntrochoide von P ähnliche Trochoide.

Denkt man sich z_1 durch Rollung eines Kreises auf einem festen (f_1) erzeugt, so kann die genannte Normale leicht gezeichnet werden, da sie durch den Berührungspunkt N_1 des Rollkreises mit f_1 gehen muß; N_1 liegt mit S_1 auf einem Strahl durch O. Entsprechend erhält man einen Punkt N_2 der anderen Normalen auf dem Fixkreis f_2 von z_2.

Nunmehr läßt sich auch leicht eine Aussage über die Gangpolbahn — d. i. der Ort von Z im bewegten System $(t_1 t_2)$ — machen. Man liest aus der Figur unmittelbar die Koordinaten $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ von Z im Achsenkreuz t_1, t_2 ab:

$$\mathfrak{t}_1 = \overline{S_2 N_1} \cdot \sin\varphi, \qquad \mathfrak{t}_2 = \overline{S_1 N_2} \cdot \cos\varphi$$

und erkennt die Gangpolbahn als Ellipse[2].

Satz II. Das Gleiten eines festen Winkels an zwei konzentrischen ähnlichen Zykloiden läßt sich i. a. durch das Abrollen einer Ellipse auf einer Trochoide ersetzen; letztere ist ähnlich zur Bahn des Winkelscheitels.

Einen Sonderfall erhält man, wenn k_1 und k_2 zusammenfallen, so daß c auf einen Punkt zusammenschrumpft. Es handelt sich dann um eine gewöhnliche Kreisrollung: Der Mittelpunkt P des Rollkreises beschreibt einen Kreis, die Durchmesser des Rollkreises umhüllen (kongruente) Zykloiden.

Ein anderer Sonderfall ergibt sich durch das Zusammenfallen von k_1 mit f_2 oder k_2 mit f_1. Dann wird eine Achse der Ellipse gleich Null, und es handelt sich um die Bewegung beim Abwickeln einer Zykloide.

Bei der umgekehrten Bewegung — also beim Gleiten eines Zykloidenpaares an den Schenkeln des festen Winkels — beschreibt der gemeinsame Mittelpunkt O der Zykloiden eine Ellipse; man entnimmt nämlich aus der Figur unmittelbar die Koordinaten von O im Achsenkreuz t_1, t_2:

$$\mathfrak{t}_1 = -\overline{OS_2} \cdot \sin\varphi, \qquad \mathfrak{t}_2 = \overline{OS_1} \cdot \cos\varphi.$$

Ohne Beweis sei noch bemerkt, daß sich das Gleiten eines festen Winkels an zwei konzentrischen, ähnlichen (auch komplexähnlichen) Pseudozykloiden[3] i. a. durch das Abrollen einer Hyperbel auf einer Pseudotrochoide ersetzen läßt. Für die Bahnkurve des gemeinsamen Mittelpunktes der Pseudozykloiden bei der umgekehrten Bewegung ergibt sich eine Hyperbel.

Walter Wunderlich (Wien). 625

[1]) Chasles: „Aperçu historique", (Brüssel 1837).

[2]) Da entsprechende Stücke von Rast- und Gangpolbahn gleich lang sind, läßt sich mithin zu jedem Trochoidenbogen unschwer ein Ellipsenbogen gleicher Länge angeben.

[3]) Wölffing: „Über Pseudotrochoiden", Zeitschrift f. M. u. Ph., Bd. 44 (1899).