

Pseudogeodätische Linien auf Zylinderflächen

Von
Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 3 Textfiguren)

Gedruckt aus Mitteln des Vereins der Freunde der Österreichischen Akademie
der Wissenschaften in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. März 1949)

Als „Pseudogeodätische“ sollen jene Flächenkurven bezeichnet werden, deren Schmiegebenen in jedem Punkt gegen die Tangentialebenen der Trägerfläche einen konstanten Neigungswinkel γ aufweisen. Im Grenzfall $\gamma = 0$ ergeben sich die *Haupttangentialkurven* (*Asymptotenlinien*), während zu $\gamma = \pi/2$ die echten *Geodätischen* gehören.

Während diese beiden Grenzformen seit jeher zum festen Bestand der Flächentheorie zählen, ist im Gegensatz dazu der verallgemeinerte Begriff der „Pseudogeodätischen“ in der Literatur kaum anzutreffen. Dies liegt wohl am komplizierten Bau der zugehörigen Differentialgleichung 2. Ordnung, der einer ins einzelne gehenden Untersuchung entgegensteht.

Die vorliegende Arbeit ist nun zunächst der Untersuchung der Pseudogeodätischen auf Zylinderflächen gewidmet. Ihre Gleichung läßt sich in Integralform angeben, in besonderen Fällen explizit aufstellen. Auch die Kennzeichnung im Rahmen der natürlichen Geometrie im Sinne von Cesàro ist verhältnismäßig einfach. Bemerkenswert ist die Eigenschaft dieser Kurven, Tangentenrichtkegel zu besitzen, die von der Gestalt des Zylinders ganz unabhängig sind: Das sphärische Tangentenbild erweist sich nämlich für jede Zylinder-Pseudogeodätische als *Kugelloxodrome*.

Eine andersgeartete Einsicht in das Wesen dieser Pseudogeodätischen ergibt sich, wenn man sie durch das Polarsystem eines Drehparaboloides transformiert: Sie werden in Kurven

verwandelt, die im Normalriß in Erzeugendenrichtung als *Parazykloiden* erscheinen, und umgekehrt liefert jede derartige Kurve durch Polarisation die Pseudogeodätische eines Zylinders.

Im besonderen sind die Pseudogeodätischen des Drehzylinders polar zu den *Böschungslinien des zweischaligen Drehhyperboloids*. Sie gehen bei Verebnung des Zylinders in gewöhnliche *Kettenlinien* über und stellen auch die Gleichgewichtslagen einer um einen glatten lotrechten Drehzylinder geschlungenen Kette im homogenen Schwerfeld dar. Diese Kurven können auch durch die Eigenschaft gekennzeichnet werden, daß ihre sämtlichen Tangenten eine feste koaxiale *Kugel* berühren, womit sich ein Zusammenhang mit den *sphärischen Kreisstrahlen* ergibt.

Die entsprechenden Untersuchungen der Pseudogeodätischen auf Kegelflächen — insbesondere auf Drehkegeln — bleiben einer zweiten Abhandlung vorbehalten.

I. Parameterdarstellung. Sei Φ ein beliebiger Zylinder, dessen Erzeugenden wir uns lotrecht denken wollen, um die Vorstellung zu fixieren. Die Basiskurve in einer waagrechteten Ebene sei im Sinne Cesàros durch die „natürliche Gleichung“

$$(1) \quad a = a(u)$$

festgelegt, d. h. durch die Abhängigkeit des Krümmungshalbmessers a von der Bogenlänge u . Es ist nun die Aufgabe gestellt, eine auf dem Zylinder verlaufende Kurve zu ermitteln, deren Schmiegeebenen gegen die Zylinderoberfläche sämtlich unter dem Winkel γ geneigt sein sollen. Zur Abkürzung setzen wir

$$(2) \quad \operatorname{ctg} \gamma = c.$$

Ist (P, t) ein beliebiges *Linienelement* von Φ , dessen Neigungswinkel gegen die Horizontale den Wert τ hat, so hat der durch die Tangente t gelegte Normalschnitt auf Grund der Eulerschen Formel den Krümmungsradius

$$\rho_1 = a/\cos^2 \tau,$$

während einem unter dem Winkel γ gegen die Oberfläche gelegten Schnitt der Krümmungsradius

$$\rho = \rho_1 \sin \gamma = a \sin \gamma / \cos^2 \tau$$

zukommt¹. Die Normalprojektion des schiefen Schnittes auf die Tangentialebene und ebenso die Kurve, in die er bei der Verebnung (Abwicklung) des Zylinders übergeht, hat den „geodätischen“ Krümmungsradius

$$(3) \quad \rho_0 = \frac{\rho}{\cos \gamma} = \frac{a}{c \cos^2 \tau}.$$

Durch diese Beziehung ist eine Flächenkurve mit der konstanten Schmiegeebenenneigung γ bereits definiert. Führen wir ihre Bogenlänge s ein, so läßt sich die Bedingung (3) mittels

$$\rho_0 = \frac{ds}{d\tau} \quad \text{und} \quad \frac{du}{ds} = \cos \tau$$

umformen in die Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{du}{d\tau} = \frac{a(u)}{c \cos \tau},$$

die sich nach Trennung der Veränderlichen integrieren läßt zu

$$(5) \quad \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = c \int \frac{du}{a(u)} = c \cdot \varphi(u).$$

φ ist dabei der Richtungswinkel der Basistangente gegen jene Nullrichtung x , die durch die Tangente im höchsten oder tiefsten Punkt A ($\tau=0$) unserer Pseudogeodätischen angezeigt wird (Fig. 1).

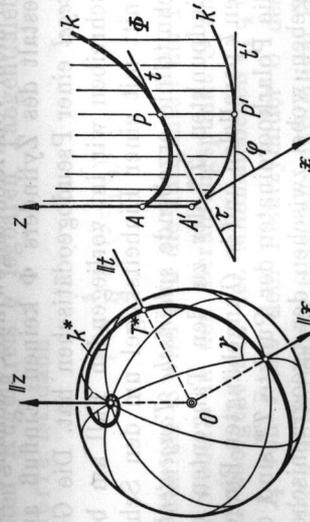


Fig. 1. Kugelloxodrome k^* als sphärisches Tangentenbild der Pseudogeodätischen k eines Zylinders Φ ($\gamma = 60^\circ$).

¹ Vgl. etwa W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I (2. Aufl. Berlin 1924), 57—59.

Geometrisch liegen diesen Formeln bekanntlich die Vorstellungen der *Dupinschen Indikatrix* und der *Meyerschen Kugel* zugrunde.

Bezeichnen wir die Höhe des laufenden Kurvenpunktes P über der Basisebene mit z , so folgt aus (5)

$$(6) \quad \frac{dz}{du} = \operatorname{tg} \tau = \operatorname{sh} c \varphi$$

die Gleichung der Pseudogeodätischen k , bzw. ihrer Vererbung k^*

$$(7) \quad z = \int \operatorname{sh} c \varphi(u) \cdot du,$$

je nachdem man u als den ursprünglichen oder den gestreckten Basisbogen ansieht. — Die Berechnung der Pseudogeodätischen eines Zylinders erfordert mithin zwei Quadraturen.

Beachten wir, daß die kennzeichnende Differentialgleichung (4) nur das Verhältnis $a : c$ enthält, so erkennen wir

Satz 1. *Wird eine Zylinderfläche längs ihrer Erzeugenden so verbogen, daß sich die Krümmung nur proportional ändert, so behält jede Pseudogeodätische der Fläche ihre charakteristische Eigenschaft.*

Es ändert sich lediglich der Betrag der konstanten Schmiegeebenenneigung, und zwar nimmt er mit der Krümmung zu, bzw. ab.

In Gleichung (5) oder (6) fällt ferner auf, daß der Steigungswinkel τ nur mehr vom Richtungswinkel φ abhängt. Das bedeutet, daß die Gestalt des Zylinders Φ keinen Einfluß auf den Tangentenrichtkegel einer Pseudogeodätischen hat. Die Gestalt dieses Kegels beschreiben wir im vorliegenden Fall am besten durch seinen Schnitt mit einer Einheitskugel um den Scheitel O . Das sich als Schnittlinie ergebende *sphärische Tangentenbild* k^* wird von den Endpunkten T^* der zu den Tangenten der Pseudogeodätischen k parallelen und in O angehängten Einheitsvektoren gebildet; die Polarkoordinaten der Punkte T^* sind durch $r = 1$, φ und τ gegeben, wobei zwischen der „geographischen Länge“ φ und der „geographischen Breite“ τ die zu (5) äquivalente Beziehung

$$(8) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = e^{c\varphi}$$

herrscht. Im Hinblick auf die leicht zu beweisende Tatsache,

daß die stereographische Projektion des Punktes T^* aus dem „Nordpol“ $\varphi = \pi/2$ auf die „Äquatorebene“ $\varphi = 0$ als Radiusvektor gerade die linke Seite von (8) besitzt, stellen wir fest, daß die Kurve k^* sich stereographisch als logarithmische Spirale (mit dem Schnittwinkel γ) abbildet, also eine *Kugelloxodrome* (mit gleichem Kurswinkel) ist.

Satz 2. *Jede Pseudogeodätische k eines Zylinders hat als sphärisches Tangentenbild eine Kugelloxodrome, deren Kurswinkel mit der Schmiegeebenenneigung γ von k übereinstimmt.*

II. Geometrische Behandlung. Den Schlüssel zu einer geometrischen Behandlung der Pseudogeodätischen eines Zylinders Φ liefert die *Polarität* \mathfrak{P} eines *Drehparaboloïdes* Π , dessen Achse z zu den Zylindererzeugenden parallel ist. Die Tangentenschar einer Raumkurve k wird durch \mathfrak{P} in das Tangentensystem einer zweiten Raumkurve \bar{k} transformiert, wobei überdies die Punkte und Schmiegeebenen der beiden Kurven einander wechselseitig zugeordnet sind.

Sei P ein laufender Punkt einer Pseudogeodätischen k von Φ , t die zugehörige Tangente, σ die Schmiegeebene und τ die Tangentialebene des Zylinders. Zur projektiven Messung des Winkels $\gamma = \sphericalangle \sigma \tau$ benötigen wir noch die beiden aus t an den absoluten Kugelmittelpunkt q legbaren Tangentialebenen t_1, t_2 ; nach Laguerre ist dann

$$(9) \quad \gamma = \frac{i}{2} \operatorname{lg} (\sigma \tau t_1 t_2).$$

Durch die Polarität \mathfrak{P} wird t in die Tangente \bar{t} der Polarkurve \bar{k} verwandelt, wobei σ in den Berührungspunkt S und τ in den Fernpunkt T übergeht und den Minimalen t_1, t_2 die Schnittpunkte I_1, I_2 von \bar{t} mit dem Polarzylinder Θ des absoluten Kegelschnittes q entsprechen. Θ ist ein nullteiler Drehzylinder mit der Achse z und dem Radius i , wenn der Parameter des Paraboloides als Einheit genommen wird. Infolge der Doppelverhältnistreue gilt auch

$$(10) \quad \gamma = \frac{i}{2} \operatorname{lg} (STI_1 I_2).$$

Wir bilden nun alle Polargebilde in einem Normalriß auf eine achsennormale Ebene ab, den wir als *Grundriß* ansprechen und durch einen Akzent kennzeichnen wollen. Der Grundriß \bar{k} unserer Polarkurve ist dann zufolge

$$(11) \quad \gamma = \frac{i}{2} \lg (S'T'I_1 I_2)$$

durch eine Eigenschaft gekennzeichnet, die der nichteuklidischen Geometrie angehört, wenn wir den Basiskreis des Zylinders Θ als Maßgebilde einer elliptischen Metrik im Sinne von Cayley und Klein ansehen: *Die Tangentenhalbstrahlen $S'T'$ von \bar{k} haben die konstante elliptische Länge γ . Oder anders ausgedrückt: Die Kurve \bar{k} ist eine elliptische Schleppkurve der Ferngerade.*

Wünschen wir diese Eigenschaft durch euklidische Begriffe auszudrücken, so denken wir uns alle Elemente der Grundrißebene aus einem Zentrum O projiziert, das sich auf der Achse z in der Höhe 1 befindet. Die elliptische Maßzahl γ der Strecke $S'T'$ erscheint dann als Gesichtswinkel bei Betrachtung aus O , woraus wir schließen, daß die Kurve \bar{k} die Erzeugenden ihres Verbindungskegels mit O unter dem konstanten Winkel γ durchsetzt: \bar{k} ist eine ebene Kegel- oder Bündelloxodrome.

Denken wir uns die Tangenten einer solchen ebenen Loxodrome in der Hesseschen Normalform

$$(12) \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = p$$

angeschrieben und dementsprechend durch die *polaren Speerkoordinaten* p und φ beschrieben, d. h. durch den Ursprungsabstand und den Richtungswinkel, beide vorzeichenbegabt. Die Normalkoordinaten des Berührungspunktes S' genügen dann auch noch der Ableitungsgleichung nach φ

$$(13) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \dot{p} \quad (= dp/d\varphi)$$

und lauten demnach

$$(14) \quad x = \dot{p} \cos \varphi + p \sin \varphi, \quad y = \dot{p} \sin \varphi - p \cos \varphi.$$

Der Abstand des Berührungspunktes S' vom Lotfußpunkt F wird gerade durch \dot{p} angezeigt (Fig. 2).

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $OS'F$ lesen wir dann die Bedingung für den konstanten Schnittwinkel γ mit

$$(15) \quad \operatorname{ctg} \gamma = c = \dot{p} / \sqrt{1 + p^2}$$

ab. Sie läßt sich unmittelbar integrieren und liefert bei geeigneter Festsetzung der Nullrichtung die Tangentengleichung der Loxodrome in der einfachen Gestalt

$$(16) \quad p = \operatorname{sh} c\varphi.$$

Die Parameterdarstellung in Normalkoordinaten lautet gemäß (14)

$$(17) \quad \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} c\varphi \cos \varphi + \operatorname{sh} c\varphi \sin \varphi \\ y &= c \operatorname{ch} c\varphi \sin \varphi - \operatorname{sh} c\varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Auf Grund der Gleichungen (16) oder (17) erkennt man die ebenen Bündelloxodromen als *Parazykloiden*, ein Ergebnis, das der Verfasser bereits bei anderer Gelegenheit festgestellt hat².

Damit können wir nun aussprechen den

Satz 3. *Die Polarkurven der Pseudogeodätischen eines lotrechten Zylinders bezüglich eines Drehparaboloides mit lotrechter Achse erscheinen im Grundriß als Parazykloiden.*

Da sich die angewandte Schlußweise umkehren läßt, so gilt auch

² W. Wunderlich, Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren. Soc. Sci. Fenn., Comm. phys. math. 14 (1949).

Parazykloiden heißen jene merkwürdigen Rollkurven, die als Punktbahnen für die Rollung eines komplexen Kreises auf einem reellen auftreten, u. zw. für Umfangspunkte des Rollkreises. In unserem Fall haben Fixkreis, bzw. Rollkreis die Durchmesser $2c$, bzw. $c \pm i$. Vgl. H. Wieleitner, Spezielle ebenen Kurven. Sammlg. Schubert 56 (Leipzig 1908), 212 ff.

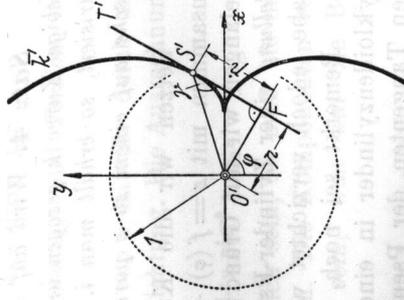


Fig. 2. Parazykloide als ebene Bündelloxodrome ($\gamma = 60^\circ$). Der Distanzkreis des Bündelscheitels O ist reeller Vertreter des nullteiligen Scheitelkreises der Parazykloide.

Satz 4. Wird auf dem Parazyklindenzylinder (17) eine beliebige Kurve \bar{k} gezogen und am Drehparaboloid $x^2 + y^2 = 2z$ polarisiert, so erhält man i. a. eine Raumkurve k , die Pseudogeodätische auf einem zu z parallelen Zylinder Φ ist.

Setzen wir die Kurve \bar{k} durch die Gleichungen (17) zusammen mit $z = f(\varphi)$ — oder besser $(c^2 + 1)f(\varphi)$ — an, so gelangen wir auf Grund von Satz 4 zu einer *integrallosen Darstellung* einer Zylinder-Pseudogeodätischen k , auf deren Wieder-gabe jedoch verzichtet werden soll.

Bemerkte sei noch, daß bei der Polarisation der Parazyklindenzylinder in eine *Fernkurve* verwandelt wird, die von den Tangenten der Pseudogeodätischen k getroffen wird. Ihre Gestalt — und daher auch die des *Tangentenwickelbels* von k — ist unabhängig vom Grundzylinder Φ , woraus neuerlich Satz 2 gefolgert werden kann.

III. Natürliche Gleichung. Um eine Raumkurve k im Sinne der „natürlichen Geometrie“ von Cesàro — also unabhängig vom Koordinatensystem — als Pseudogeodätische eines Zylinders zu kennzeichnen, haben wir nur zum Ausdruck zu bringen, daß eine mit dem begleitenden Dreibein von k starr verbundene und die Tangente enthaltende Ebene ε einen Zylinder umhüllt, d. h. stets parallel zu einer festen Richtung bleibt.

Das *begleitende Dreibein* einer Raumkurve wird in bekannter Weise von den Einheitsvektoren $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ in Richtung der Tangente, Hauptnormale und Binormale gebildet. Der Einheitsvektor n in Richtung der *Ebenenormale* von ε läßt sich dann darstellen durch

$$(18) \quad n = -\sin \gamma \cdot \delta_2 + \cos \gamma \cdot \delta_3,$$

wobei $\gamma = \sphericalangle \delta_3 n$ den konstanten Winkel zwischen der Schmiegeebene und ε bedeutet. Deuten wir die Ableitung nach der Bogenlänge s durch einen Strich an, so können wir die *Änderung* n' der Normalenrichtung mit Benützung der *Frenetschen Ableitungsgleichungen*¹

$$(19) \quad \delta_1' = x \cdot \delta_2, \quad \delta_2' = -x \cdot \delta_1 + \tau \cdot \delta_3, \quad \delta_3' = -\tau \cdot \delta_2$$

darstellen durch

$$(20) \quad n' = x \cdot \sin \gamma \cdot \delta_1 - \tau \cos \gamma \cdot \delta_2 - \tau \sin \gamma \cdot \delta_3;$$

x und τ bezeichnen hierbei die *Krümmung* und *Torsion* der Kurve.

Die *Erzeugende* des Hüllgebildes von ε hat die durch das Vektorprodukt $r = n \times n'$ angezeigte Richtung. Die Ausrechnung ergibt

$$(21) \quad r = \tau \delta_1 + x \sin \gamma \cos \gamma \cdot \delta_2 + x \sin^2 \gamma \cdot \delta_3.$$

Soll die Richtung von r unveränderlich sein, so muß sie mit jener des Zuwachses r' übereinstimmen. Die Komponenten von r und r' müssen also proportional sein, was auf die Bedingung

$$(22) \quad \tau : x = (\tau' - x^2 \sin \gamma \cos \gamma) : (x' + x \tau \operatorname{ctg} \gamma)$$

führt. Dieselbe stellt die gesuchte „natürliche Kennzeichnung“ der Pseudogeodätischen von Zylindern dar. Sie läßt sich durch Einführung der *konischen Krümmung* τ/x etwas übersichtlicher anschreiben:

Satz 5. Die Pseudogeodätischen auf Zylinderflächen lassen sich durch die natürliche Gleichung

$$(23) \quad \left(\frac{\tau}{x}\right)' = x \operatorname{ctg} \gamma \left[\left(\frac{\tau}{x}\right)^2 + \sin^2 \gamma\right]$$

kennzeichnen.

Als Sonderfall ergibt sich für die echten Zylindergeodätischen (Böschungslinien) mit $\gamma = \pi/2$ die bekannte Bedingung $(\tau/x)' = 0$ oder $\tau/x = \text{const.}$

Mit Hilfe der Bedingung (23) können wir nun auch kurz die Frage behandeln, ob es Raumkurven gibt, die gleichzeitig Pseudogeodätische zweier Zylinder sind. Die Gleichung (23) müßte dann für zwei verschiedene Werte γ_1 und γ_2 bestehen: Durch Gleichsetzung der rechten Seiten berechnet sich dann aber für die konische Krümmung τ/x ein fester Wert, was wieder $\operatorname{ctg} \gamma_1 = \operatorname{ctg} \gamma_2 = 0$ nach sich zieht. Die gestellte Frage ist also verneinend zu beantworten.

IV. Die Pseudogeodätischen des Drehzylinders. Unter den nicht allzu zahlreichen Fällen, in denen sich die Pseudogeodätischen eines Zylinders explizit und elementar berechnen

lassen, ist vor allem der Drehzylinder zu erwähnen³. Setzen wir seine Gleichung in Normalkoordinaten in der Gestalt $x^2 + y^2 = a^2$ voraus, so haben wir lediglich den Krümmungsradius $a(u)$ in Abschn. I als konstant anzusehen und erhalten über (7) wegen $u = a\varphi$ schließlich die folgende Parameterdarstellung einer Pseudogeodätischen:

$$(24) \quad x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = \frac{a}{c} \operatorname{ch} c\varphi.$$

Führen wir in die letzte Gleichung wieder den Grundkreisbogen $u = a\varphi$ ein, so lautet sie

$$(25) \quad z = b \operatorname{ch} \frac{u}{b} \quad \text{mit} \quad b = \frac{a}{c} = a \operatorname{tg} \gamma.$$

Eine solche Gleichung stellt bekanntlich eine *Kettenlinie* dar, wenn u und z als Normalkoordinaten aufgefaßt werden, was geometrisch auf die *Verebnung* (*Abwicklung*) des Zylinders hinausläuft.

Satz 6. Die Pseudogeodätischen eines Drehzylinders gehen bei der Verebnung seines Mantels in gewöhnliche Kettenlinien über.

Dieser Feststellung kommt aber noch eine weitergehende mechanische Bedeutung zu, wenn wir bedenken, daß die Gleichgewichtsform einer *Kette*⁴ im homogenen Schwerfeld dadurch gekennzeichnet ist, daß ihr Schwerpunkt die tiefstmögliche Lage einnimmt. Wenden wir dieses Prinzip zur Untersuchung einer Kette an, die an der vollkommen glatten Oberfläche eines lotrechten Zylinders anliegt, so erkennen wir ohne weiteres, daß sich die Berührungslinie bei beliebiger Verbiegung des Zylinders nicht ändern wird, weil sich die Schwerpunkthöhe nicht ändern kann; die Berührungslinie wird mithin nach vollständiger Verebnung des Zylinders in eine gewöhnliche

³ Verhältnismäßig einfache Darstellungen ergeben sich auch für Zylinder, deren Basiscurven *logarithmische Spiralen*, *Zykloiden* oder *Pseudozykloiden* sind. Hieher zählen auch die *Geodätischen des Drehparaboloides*; sie bilden sich im Grundriß als *Hyperzykloiden* ab^3 und sind Pseudogeodätische auf achsenparallelen Zylindern.

⁴ Unter einer „Kette“ ist dabei ein eindimensionales, undehnbares und vollkommen biegsames, gleichmäßig mit Masse belegtes Gebilde zu verstehen.

Kettenlinie übergegangen sein. Für den Drehzylinder gilt demnach

Satz 7. Die Gleichgewichtslage einer homogenen Kette, die um einen lotrechten, vollkommen glatten Drehzylinder geschlungen ist, ist eine Pseudogeodätische desselben⁵.

Fig. 3 stellt eine solche zylindrische Kettenlinie in Auf- und Kreuzriß dar; ihre Schmiegebenen sind gegen die Zylinderoberfläche sämtlich unter $\gamma = 60^\circ$ geneigt.

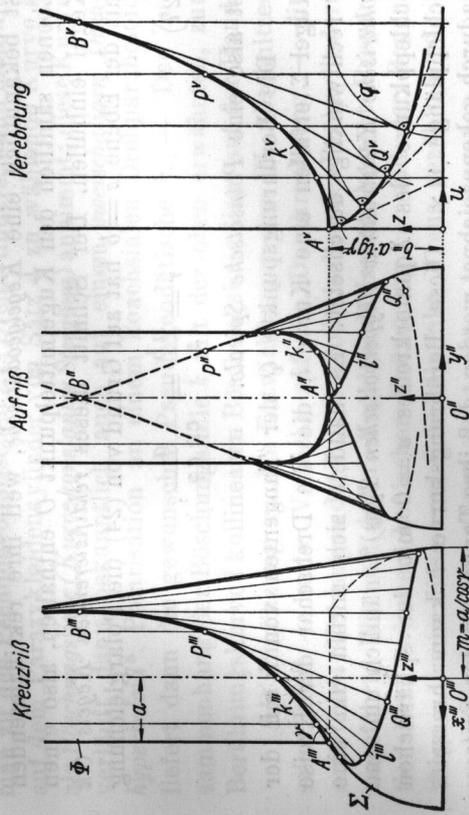


Fig. 3. Pseudogeodätische k eines Drehzylinders Φ samt Tangentenfläche und Fadenevolvente ($\gamma = 60^\circ$).

Eine bekannte Eigenschaft der ebenen Kettenlinie k^v (25) — die in der Beziehung $(bz')^2 = z^2 - b^2$ ihren Ausdruck findet — besteht darin, daß ihre Tangenten Kreise fester Größe berühren, die mit dem Halbmesser b um die zugehörigen Ordinatenfußpunkte geschlagen sind (Fig. 3). Denken wir uns diese Kreise q vor der Abwicklung in den Tangentialebenen des Drehzylinders Φ liegend, so erfüllen sie eine gewisse Zone auf einer

⁵ Die Durchrechnung nach den Regeln der Statik ergibt, daß sich die Kettenspannung proportional zur Höhenkoordinate z ändert, während der Druck auf die Zylinderoberfläche umgekehrt proportional zu z verläuft.

Die Kettenlinie des Drehzylinders findet sich schon bei Bobillier, De l'équilibre de la chaînette sur une surface courbe. Gergonne Ann. Math. 20 (1829).

Kugel Σ um den Ursprung O ; der Halbmesser von Σ beträgt

$$(26) \quad m = \sqrt{a^2 + b^2} = a / \cos \gamma.$$

Diese Kugel wird von allen Tangenten und daher auch von allen Schmiegeebenen der zylindrischen Kettenlinie k berührt. Umgekehrt sind auch alle Zylinderkurven, deren Tangenten die Kugel Σ berühren, Pseudogeodätische von Φ ; sie gehen durch Drehung um die Zylinderachse z aus k hervor.

Eine Kurve, deren Tangenten eine feste Kugel berühren, ist bekanntlich eine *Kegeleodätische*, weil ihre rektifizierenden Ebenen sämtlich den Kugelmittelpunkt O enthalten, also einen Kegel einhüllen. Der Schnitt dieses *rektifizierenden Kegels* Ok mit der Ebene $z = b$ hat auf Grund von (24) die Polargleichung

$$(27) \quad r = \frac{ab}{z} = \frac{a}{\operatorname{ch} e\varphi},$$

ist also eine *Poinsotsche Spirale*.

Die Berührungspunkte Q der Tangenten von k mit der Kugel Σ erfüllen eine Kurve l , die die Drehsehar der Kreise q rechtwinklig durchsetzt: Es handelt sich mithin um eine *sphärische Kreistratrix* (*hyperbolischen Typs*)⁶, nämlich um eine Schleppkurve des Äquatorkreises $z = 0$ mit der sphärischen Schlepplänge $m\gamma$. Diese Berührungskurve l kann ihrerseits dadurch gekennzeichnet werden, daß ihre Tangenten den *Spitzenkreis* v jener Drehkegel treffen, die der Kugel Σ längs der Kreise q angeschrieben sind; der Radius von v hat den Betrag

$$(28) \quad R = \frac{m}{\sin \gamma} = \frac{2a}{\sin 2\gamma}.$$

Werfen wir den Kreis v durch eine perspektive Kollineation, deren Zentrum auf der Achse z sitzt, ins Unendliche, so wird die Kugel Σ in ein *zweischaliges Drehhyperboloid* verwandelt, auf welchem die l entsprechende Kurve eine *Böschungslinie* darstellt. — Da die betrachtete Traktrix l die Tangenten der Kettenlinie k unter rechtem Winkel durchsetzt, kann sie auch als *Fadenevolvente* derselben angesehen werden.

⁶ Vgl. W. Wunderlich, Über die Schleppkurven des Kreises. Sitzgsb. Ak. Wiss. Wien 156 (1948).

Wir fassen zusammen:

Satz 8. Jede Pseudogeodätische k eines Drehzylinders ist echte Geodätische eines koaxialen Kegels, dessen Basis eine Poinsotsche Spirale ist. Die Tangenten und Schmiegeebenen von k berühren eine feste Kugel um die Spitze dieses Kegels. Die Berührungskurve l ist eine sphärische Großkreis-Traktrix und gleichzeitig eine spezielle Fadenevolvente von k .

Im Rahmen der Ausführungen des II. Abschnittes gelangt man zu den Pseudogeodätischen des Drehzylinders, wenn man die auf dem Parazyklidenzylinder von Satz 4 zu wählende Kurve \bar{k} als *Böschungslinie* (*Kurve konstanter Steigung*) annimmt; diese Kurve verläuft dann bekanntlich auch auf einem *zweischaligen Drehhyperboloid*⁵. Polarisation an einem koaxialen Drehparaboloid liefert dann die gewünschte Pseudogeodätische k . — Der Zusammenhang der Böschungslinie \bar{k} mit der oben erwähnten, zur Berührungskurve l kollinearen Böschungslinie liegt auf der Hand.

Als Ergänzung zu den Entwicklungen des III. Abschnittes seien noch — unter Verzicht auf die Durchrechnung — die *natürlichen Gleichungen* der Pseudogeodätischen des Drehzylinders angeführt. Wie bei jeder Kegeleodätischen besteht Proportionalität zwischen konischer Krümmung τ/x und der Bogenlänge s , wenn diese vom Scheitelpunkt A aus gezählt wird:

$$(29) \quad \rho = \frac{1}{x} = \frac{a^2 \sin^2 \gamma + s^2 \cos^2 \gamma}{a \sin \gamma}, \quad \tau = \frac{s \cos \gamma}{a}.$$

Fragen wir bei dieser Gelegenheit, ob es auch noch auf anderen Zylindern Pseudogeodätische gibt, die gleichzeitig echte *Kegeleodätische* sind, so erhalten wir auf Grund der die letzteren charakterisierenden Bedingung $\tau/x = s/m$ aus (24) die Darstellung

$$(30) \quad \rho = m \sin \gamma \cos \gamma + \frac{s^2}{m} \operatorname{ctg} \gamma; \quad \tau = \frac{s}{m}.$$

Diese erweist sich aber nach Einführung von $a = m \cos \gamma$ als mit (29) vollkommen identisch, so daß wir zwangsläufig auf unsere zylindrischen Kettenlinien geführt werden.

Satz 9. Der Drehzylinder ist der einzige Zylinder, dessen Pseudogeodätische gleichzeitig echte Kegeleodätische sind.