

Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen

Von

Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 4 Textfiguren)

Gedruckt aus Mitteln des Vereins der Freunde der Österreichischen Akademie
der Wissenschaften in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1949)

Die *geodätischen Linien* einer Fläche sind bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß ihre Schmiegebenen auf den zugehörigen Tangentialebenen der Trägerfläche normal stehen. Als „Pseudogeodätische“ werden nun jene auf der Fläche verlaufenden Kurven bezeichnet, deren *Schmiegebenen* mit den zugehörigen *Tangentialebenen* einen *festen Winkel* γ *beliebiger Größe* bilden. Die Mannigfaltigkeit dieser noch wenig untersuchten Flächenkurven umfaßt als Grenzformen einerseits die echten Geodätischen ($\gamma = \pi/2$) und andererseits die Haupttangentialkurven oder Asymptotenlinien ($\gamma = 0$).

In einer früheren Arbeit¹ hat der Verfasser zunächst die Pseudogeodätischen der Zylinderflächen untersucht, wobei bemerkenswerte allgemeine Eigenschaften dieser Kurven festgestellt werden konnten. Im besonderen Fall des Drehzylinders ergaben sich Kurven, die eine mechanische Deutung als Kettenlinien zulassen und in zahlreichen Zusammenhängen mit anderen bekannten Linien stehen.

In der vorliegenden Arbeit werden nunmehr die Pseudogeodätischen auf Kegelflächen betrachtet. Die Aufstellung ihrer Gleichung für einen vorgelegten Kegel erfordert im allgemeinen die Integration einer Riccatischen Differentialgleichung und anschließend eine Quadratur. — Die „natürliche Gleichung“ im Sinne Cesàros, die abgeleitet wird, kennzeichnet die Raumkurven, die Pseudogeodätische eines Kegels sind, durch

¹ W. Wunderlich, Pseudogeodätische Linien auf Zylinderflächen. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, 158 (1949), 61—73.

W. Wunderlich.

I. Analytischer Ansatz. Vorgelegt sei ein beliebiger Kegel Φ mit dem Scheitel O . Es ist die Aufgabe gestellt, eine „Pseudogeodätische“ von Φ zu bestimmen, also eine auf dem Kegel verlaufende Kurve, deren Schmiegebenen gegen die Kegeloberfläche unter dem konstanten Winkel γ geneigt sind.

Wir denken uns den Kegelmantel längs einer passenden Anfangserzeugenden o aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet und bezeichnen dann mit ψ den Winkel einer laufenden Erzeugenden e gegen die Nullrichtung o . Der Öffnungswinkel 2α desjenigen Drehkegels, der Φ längs e oskuliert, definiert die *konische Krümmung* $k = \cot \alpha$; diese wird eine Funktion des Mantelwinkels ψ sein. Diese Abhängigkeit $k = k(\psi)$, welche als „natürliche Gleichung“ im Sinne von Cesàro die Gestalt des Kegels Φ unabhängig vom Koordinatensystem vollkommen festlegt, setzen wir als bekannt voraus.

In einem Flächenpunkt P , dessen Entfernung von der Kegelspitze O mit r bezeichnet sei, beträgt der endliche Hauptkrümmungsradius

$$\rho_0 = r \operatorname{tg} \alpha = r/k.$$

Nach den Elementen der Flächentheorie hat der unter dem Winkel ϑ gegen die Erzeugende verlaufende Normalschnitt den Krümmungsradius

$$\rho_1 = \rho_0 / \sin^2 \vartheta.$$

Eine das zugehörige Linienelement (P, t) enthaltende Flächenkurve, deren Schmiegeebene gegen die Oberfläche unter dem Winkel γ geneigt ist, hat dann den Krümmungsradius

$$\rho = \rho_1 \sin \gamma,$$

woraus sich der für die Verebnung maßgebende „geodätische Krümmungsradius“

$$\rho_0 = \rho / \cos \gamma$$

ergibt². Über die Zwischenwerte zurückgehend erhalten wir dann mit Benützung der Abkürzung $\cot \gamma = c$ den Ausdruck

² Vgl. etwa W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I (2. Aufl. Berlin 1924), 57—59.

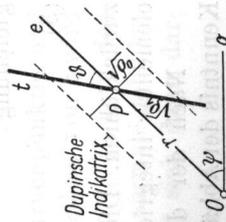


Fig. 1

eine nicht ganz einfache Beziehung zwischen der gewöhnlichen und der konischen Krümmung und ihren Ableitungen nach der Bogenlänge. — Ein wichtiger Zusammenhang mit den *Kegellocodromen* wird durch eine *Kugelpolarität* hergestellt: Eine Kurve, die die Erzeugenden eines Kegels unter dem konstanten Winkel γ schneidet, wird durch das Polarsystem einer Kugel, die den Kegelscheitel als Mittelpunkt besitzt, in eine Pseudogeodätische eines anderen Kegels transformiert, deren Schmiegeebenen ebenfalls den Wert γ hat; umgekehrt kann auch jede Kegel-Pseudogeodätische auf diese Weise erhalten werden.

Insbesondere gelangt man zu den Pseudogeodätischen des Drehkegels durch Polarisation der *Böschungslinien* auf *Drehflächen 2. Grades* (mit lotrechter Achse) an einer Kugel um einen Flächenbrennpunkt und gewinnt damit eine elementare Parameterdarstellung. Je nach der Art der Drehfläche — eiförmiges Ellipsoid, Paraboloid, zweischaliges Hyperboloid, Drehkegel — sind vier Typen der Drehkegel-Pseudogeodätischen zu unterscheiden, die als „elliptisch“, „parabolisch“, „hyperbolisch“ und „konisch“ bezeichnet und im einzelnen studiert werden. Auch diese Kurven lassen sich mechanisch als *Kettenlinien* deuten, nämlich in einem Newtonschen Gravitationsfeld, dessen Zentrum mit dem Kegelscheitel zusammenfällt. Von den zahlreichen bemerkenswerten geometrischen Eigenschaften dieser speziellen Kurven mag hier erwähnt werden, daß ihre Tangenten jeweils eine feste Kugel berühren, so daß sie auch *echte Geodätische eines anderen Kegels* darstellen; sie sind durch diese Eigenschaft unter den übrigen Kegel-Pseudogeodätischen ausgezeichnet und charakterisiert. Auszunehmen ist dabei nur der Grenzfall des *konischen Typs*, dessen Vertreter *Böschungslinien* und daher *Zylindergeodätische* sind; es handelt sich dabei um die bekannten „zylindrokonischen Spiralen“, die als Bahnkurven von eingliedrigem Ähnlichkeitsgruppen auftreten. — Ferner verdient noch hervorgehoben zu werden, daß der *elliptische Typ* auch *algebraische Exemplare* umfaßt, insbesondere Raumkurven 4. Ordnung. Hinsichtlich der mannigfaltigen sonstigen Zusammenhänge muß auf den Text verwiesen werden.

$$(1) \quad \rho_v = \frac{r}{c k \sin^2 \vartheta}.$$

Beachten wir, daß sich der Tangentenwinkel ϑ und der Krümmungsradius ρ_v der verebneten Flächenkurve mit Hilfe des Bogenelementes ds durch

$$\sin \vartheta = r \frac{d\psi}{ds} \quad \text{bzw.} \quad \rho_v = \frac{ds}{d(\psi + \vartheta)}$$

ausdrücken lassen, so erhalten wir nach Elimination von ρ_v und ds und mit der Festsetzung $c = \text{const}$ die *Differentialgleichung der pseudogeodätischen Linien*:

$$(2) \quad d\psi + d\vartheta = c \sin \vartheta \cdot k(\psi) d\psi.$$

Durch die naheliegende Substitution

$$\text{tg } \frac{\vartheta}{2} = t \left(\sin \vartheta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad d\vartheta = \frac{2 dt}{1+t^2} \right)$$

läßt sich die Gleichung (2) auf die Riccatische Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{dt}{d\psi} = ct \cdot k(\psi) - \frac{1}{2} (t^2 + 1)$$

zurückführen. Diese gehört jedoch im allgemeinen zu keinem elementar integrierbaren Typus.

Nach der durch Auflösung von (2) oder (3) gewonnenen Kenntnis der Abhängigkeit $\vartheta = \vartheta(\psi)$ ist auf Grund der Beziehung

$$\cot \vartheta = \frac{dr}{r d\psi}$$

nur noch eine einfache Quadratur notwendig, um die *Polargleichung*

$$(4) \quad r = C \cdot \exp \int \cot \vartheta(\psi) d\psi$$

der verebneten Pseudogeodätischen zu ermitteln. Damit ist die gestellte Aufgabe prinzipiell gelöst.

Beachten wir, daß in der grundlegenden Gleichung (2) die Konstante c und die Krümmung k nur als Produkt ck auftreten, so daß die Möglichkeit besteht, eine proportionale Änderung von k durch eine entsprechende Änderung von c zu kompensieren,

so erkennen wir — in Verallgemeinerung eines für Zylinderflächen bereits bewiesenen Satzes¹ — den folgenden

Satz 1. *Wird eine Kegelfläche längs ihrer Erzeugenden derart verbogen, daß sich die Krümmung bloß proportional verändert, so behält jede der Pseudogeodätischen der Fläche ihre charakteristische Eigenschaft konstanter Schmiegebenenneigung bei. Es ändert sich lediglich der Betrag der Neigung³.*

II. Natürliche Gleichung. Um eine Raumkurve k im Sinne der „natürlichen Geometrie“ von Cesàro — also unabhängig vom Koordinatensystem — als Pseudogeodätische eines Kegels zu kennzeichnen, haben wir nur zum Ausdruck zu bringen, daß eine mit dem begleitenden Dreibein von k starr verbundene und die Tangente enthaltende Ebene ε einen Kegel umhüllt, d. h. einen unveränderlichen Gratpunkt besitzt.

Wir setzen die Kurve k in vektorieller Schreibweise durch eine Parameterdarstellung

$$\xi = \xi(s)$$

an, wobei ξ den Ortsvektor eines laufenden Kurvenpunktes und s die Bogenlänge bedeuten. Das *begleitende Dreibein* von k wird in bekannter Weise² von den Einheitsvektoren $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ in den Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale gebildet. Der Einheitsvektor π normal zur Ebene ε läßt sich dann darstellen durch

$$(5) \quad \pi = -\sin \gamma \cdot \delta_2 + \cos \gamma \cdot \delta_3,$$

wobei $\gamma = \sphericalangle \delta_3, \pi$ den konstanten Winkel zwischen der Schmiegeebene und ε bedeutet. Die *Ebene* ε selbst wird dann durch die Gleichung

$$(\eta - \xi) \cdot \pi = 0$$

³ Ein entsprechender Satz läßt sich offenbar auch noch allgemeiner für beliebige Torsen aussprechen, weil deren Krümmungseigenschaften längs einer Erzeugenden dieselben sind wie die eines Kegels, so daß also ebenfalls die Formel (1) gilt, wenn r vom Gratpunkt aus gezählt wird. Die Bestimmung der Pseudogeodätischen einer *Torse* läuft dementsprechend auf dieselbe Differentialgleichung (2) oder (3) hinaus, die für die Pseudogeodätischen des *Richtkegels* der Torse maßgebend ist; anschließend wäre dann noch eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung zu bewältigen.

beschrieben, in welcher η den Ortsvektor eines beliebigen Punktes von ϵ bedeutet, während ξ und η als bekannte Funktionen des Parameters s anzusehen sind. Auch der Gratpunkt befriedigt diese Gleichung, außerdem aber noch deren 1. und 2. Ableitung.

Mit Benützung der Frenetschen Formeln²

$$\delta_1' = x \delta_2, \quad \delta_2' = -x \delta_1 + \tau \delta_3, \quad \delta_3' = -\tau \delta_2,$$

in welchen x die *Krümmung* und τ die *Torsion* der Kurve bezeichnen, finden wir für die Ableitungen des Normalenvektors n

$$\begin{aligned} n' &= x \sin \gamma \cdot \delta_1 - \tau \cos \gamma \cdot \delta_2 - \tau \sin \gamma \cdot \delta_3 \\ (6) \quad n'' &= (x\tau \cos \gamma + x' \sin \gamma) \delta_1 + (x^2 + \tau^2 \cdot \sin \gamma - \tau' \cos \gamma) \delta_2 - \\ &\quad - (\tau^2 \cos \gamma + \tau' \sin \gamma) \delta_3. \end{aligned}$$

Damit lassen sich nun für den gesuchten *Gratpunkt* η die Bestimmungsgleichungen ansprechen:

$$n(\eta - \xi) = 0$$

$$(7) \quad n'(\eta - \xi) = n\xi' = n\delta_1 = 0$$

$$n''(\eta - \xi) = n'\xi' = n'\delta_1 = x \sin \gamma.$$

$\eta - \xi$ im begleitenden Dreibein durch den Ansatz

$$(8) \quad \eta - \xi = \zeta_1 \delta_1 + \zeta_2 \delta_2 + \zeta_3 \delta_3$$

zerlegend, erhalten wir durch Einsetzen in (7) mit Berücksichtigung von (5) und (6) ein lineares Gleichungssystem für die Relativkoordinaten ζ_i ; die Lösungen lauten

$$(9) \quad \zeta_1 = \frac{\tau}{\lambda}, \quad \zeta_2 = \frac{x}{\lambda} \sin \gamma \cos \gamma, \quad \zeta_3 = \frac{x}{\lambda} \sin^2 \gamma$$

mit $\lambda = \frac{x'}{x} \tau - \tau' + x^2 \sin \gamma \cos \gamma + \tau^2 \cot \gamma.$

Soll der durch den Ortsvektor

$$(10) \quad \eta = \xi + \frac{1}{\lambda} (\tau \delta_1 + x \sin \gamma \cos \gamma \cdot \delta_2 + x \sin^2 \gamma \cdot \delta_3)$$

festgelegte Gratpunkt gemäß unserer Forderung unbeweglich bleiben, so muß η' verschwinden, was ausführlich folgende Bedingung ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1 - \frac{\lambda'}{\lambda^2} (\tau \delta_1 + x \sin \gamma \cos \gamma \cdot \delta_2 + x \sin^2 \gamma \cdot \delta_3) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} (\tau' \delta_1 + x' \sin \gamma \cos \gamma \cdot \delta_2 + x' \sin^2 \gamma \cdot \delta_3) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} (-x^2 \sin \gamma \cos \gamma \cdot \delta_1 + x\tau \cos^2 \gamma \cdot \delta_2 + x\tau \sin \gamma \cos \gamma \cdot \delta_3). \end{aligned}$$

Diese Vektorgleichung umfaßt drei Komponentengleichungen, die sich jedoch bei näherem Zusehen als äquivalent erweisen. Es genügt daher etwa die letzte:

$$(11) \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{x'}{x} + \tau \cot \gamma.$$

Nach Einsetzen von λ gemäß (9) und Einführung der *komischen Krümmung* τ/x läßt sich diese Bedingung schließlich etwa auf die folgende Gestalt bringen:

$$(12) \quad \left(\frac{\tau}{x} \right)'' - 3c\tau \left(\frac{\tau}{x} \right)' = c(x' - cx\tau) \left[\left(\frac{\tau}{x} \right)^2 + \frac{1}{c^2 + 1} \right];$$

hierin ist wiederum $\cot \gamma = c$ gesetzt.

Satz 2. Die pseudogeodätischen Linien auf Kegelflächen lassen sich durch die natürliche Gleichung (12) kennzeichnen.

Nachträglich wäre noch darauf hinzuweisen, daß in (9) stillschweigend vorausgesetzt wurde, es möge nicht ständig $\lambda = 0$ sein. Es liegt auf der Hand, daß damit die Pseudogeodätischen auf Zylinderflächen ausgeschlossen wurden, denn besitzt eine eigentliche Hülltorse keinen endlichen Gratpunkt, so ist sie notwendig ein Zylinder. In der Tat erweist sich die Bedingung $\lambda = 0$ als identisch mit der schon früher¹ angegebenen natürlichen Gleichung der Zylinder-Pseudogeodätischen.

III. Zusammenhang mit Kegelloxodromen. Zum Zwecke einer mehr geometrischen Behandlung der Pseudogeodätischen eines Kegels Φ liegt es nahe, die *Polarität* \mathfrak{P} einer Kugel Ω um den Kegelscheitel O heranzuziehen. Die Tangentenschar einer Kegelkurve k wird durch \mathfrak{P} in das Tangentensystem einer zweiten Kurve \tilde{k} transformiert, wobei die Punkte und Schmiegebenen der beiden Kurven einander wechselseitig zugeordnet sind.

Sei t eine Tangente von k , σ die zugehörige Schmiegeebene und τ die Tangentialebene des Trägerkegels Φ . Zu diesen beiden durch t gehenden Ebenen gehören als Pole zwei Punkte der entsprechenden Tangente t von \bar{k} , nämlich deren Berührungspunkt S und Fernpunkt T . Wegen $OS \perp \sigma$ und $OT \perp \tau$ wird der Winkel $\gamma = \sphericalangle \sigma \tau$ auch von den Strahlen OS und OT eingeschlossen, stellt also den Gesichtswinkel des Tangentenhalbsstrahles ST bei Betrachtung von O aus dar oder auch den Schnittwinkel von \bar{k} mit dem Strahl OS . Im Falle einer Pseudogeodätischen k ist γ konstant, die Polarkurve \bar{k} schneidet demnach die Erzeugenden OS des Verbindungskegels Ok unter dem festen Winkel γ ; ist also eine Kegel- oder Bündelloxodrome.

Da sich die Schlußweise auch umkehren läßt, gilt

Satz 3. Wird die Tangentenfläche einer Kegelloxodrome \bar{k} an einer Kugel um den Kegelscheitel O polarisiert, so gelangt man zu einer Kurve k , deren Schmiegeebenen gegen die Kegelfläche $Ok = \Phi$ konstante Neigung aufweisen, also zu einer Pseudogeodätischen von Φ . Umgekehrt können alle Kegel-Pseudogeodätischen auf diese Weise aus Bündelloxodromen erhalten werden. Der Schnittwinkel der Loxodrome \bar{k} und die Schmiegeebenenneigung der Pseudogeodätischen k stimmen überein.

Dem Kegel Φ entspricht in der Polarität \mathfrak{P} eine gewisse Fernkurve f , die von allen Tangenten der Loxodrome \bar{k} getroffen wird. Die Bestimmung der Pseudogeodätischen eines vorgelegten Kegels Φ ist also äquivalent dem Problem, Bündelloxodromen mit vorgegebenem Tangentenriechkegel Of zu ermitteln. Diese Aufgabe ist wohl im allgemeinen kaum einfacher als die ursprüngliche, wird sich jedoch im Falle des Drehkegels (Abschn. IV) leicht bewältigen lassen.

Umgekehrt könnte man versuchen, durch Transformation bekannter Kegelloxodromen spezielle Beispiele von Pseudogeodätischen auf Kegeln herzustellen. Allzuviel weiß man jedoch über Bündelloxodromen auch nicht. Am ehesten dürfte es sich lohnen, die „mehrfachen Kegelloxodromen“ heranzuziehen, die von E. Cesàro und neuerdings auch vom Verfasser eingehend unter-

sucht worden sind⁴ und sich zahlreicher besonderer Eigenschaften erfreuen; sie sind erklärt als Raumkurven, die die Erzeugendenscharen zweier Kegel unter konstanten Winkeln durchsetzen (wozu dann von selbst noch ein gleichberechtigter dritter Kegel tritt). Zu diesen polykonischen Loxodromen zählen insbesondere auch die *sphärischen Bündelloxodromen*, die G. Pirondini⁵ betrachtet hat; sie werden durch die Kugelpolarität in *geodätische Linien von Drehflächen 2. Grades* verwandelt⁶, die somit auch Kegel-Pseudogeodätische sind (und zwar sogar in doppelter Weise, da jeder der beiden Flächenbrennpunkte als Kegelscheitel genommen werden kann). — Zu den polykonischen Loxodromen gehören ferner auch die *Böschungslinien auf Drehflächen 2. Ordnung* mit lotrechter Achse; aus ihnen gehen die Pseudogeodätischen der Drehkegel hervor, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

IV. Die Pseudogeodätischen des Drehkegels. Der vorgelegte Kegel Φ sei nunmehr speziell ein *Drehkegel* mit dem Öffnungswinkel 2α . Die analytische Bestimmung seiner Pseudogeodätischen ist dann ohne weiteres auf Grund der Gleichung (2) möglich, in welcher jetzt $k = \cot \alpha$ eine Konstante ist, so daß die Integration nach Trennung der Veränderlichen unschwer durchgeführt werden kann. Hier soll indessen die bequemere geometrische Behandlung gemäß Abschnitt III verfolgt werden, die gleichzeitig einen klareren und tieferen Einblick in die verschiedensten Eigenschaften und Zusammenhänge gewährt.

Dem Drehkegel Φ entspricht in der Polarität bezüglich einer Kugel Ω um den Scheitel O ein *Fernkreis* f mit dem Öffnungswinkel $\pi - 2\alpha$. Die Tangenten der Polarkurve \bar{k} einer Pseudogeodätischen k von Φ treffen diesen Fernkreis, \bar{k} kann

⁴ E. Cesàro, *Analisi intrinseca delle eliche policoniche*. Rend. acc. sci. fis. mat. Napoli, ser. III, 9 (1903).

W. Wunderlich, Über die polykonischen Loxodromen. Ann. di mat.

⁵ G. Pirondini, Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. Crelles J. 118 (1897).

⁶ W. Wunderlich, Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren. Soc. Sci. Fenn., Comm. phys. math. 14 (1949).

S. auch Nachr. d. österr. math. Ges., Nr. 6 (1949), 8.

mithin als *Böschungslinie* (Kurve konstanter Steigung) angesehen werden, wenn wir uns die Kegelachse lotrecht vorstellen. Da \bar{k} , wie wir wissen, außerdem eine *Kegelloxodrome* sein muß, haben wir also jene Raumkurven zu suchen, die das Strahlbündel O unter dem konstanten Winkel γ durchsetzen und gleichzeitig unter dem konstanten Winkel α gegen die Horizontale ansteigen.

Diese Frage nach den „*Böschungloxodromen*“ ist schon von A. Enneper⁷ und später von G. Scheffers endgültig geklärt worden⁷: Für einen laufenden Punkt einer solchen Kurve hängen sowohl die *Scheitelfernung* r wie auch die *Höhe* z linear von der *Bogenlänge* s ab. Nach geeigneter Festsetzung des Bogenanfangs gilt dann der Ansatz

$$r = s \cdot \cos \gamma, \quad z = s \cdot \sin \alpha + d.$$

Die daraus fließende Beziehung

$$(13) \quad \frac{r}{z-d} = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha} = \varepsilon = \text{const}$$

kennzeichnet aber bekanntlich eine *Drehfläche 2. Ordnung* Δ als Ort aller Raumpunkte, deren Abstände von einem Fixpunkt O und einer Fixebene ω ($z=d$) ein festes Verhältnis haben; O ist ein Brennpunkt, ω die zugehörige Leitebene und ε die numerische Exzentrizität der Fläche Δ . — Jede Böschungloxodrome \bar{k} muß ganz auf einer solchen Drehfläche Δ verlaufen und ist damit als deren Böschungslinie hinlänglich bekannt⁷. Je nach dem Wert von ε — den wir stets als positiv voraussetzen dürfen — haben wir verschiedene Typen der Drehflächen und damit auch der Böschungloxodromen zu unterscheiden:

- $\varepsilon < 1$ ($\alpha + \gamma > 90^\circ$) ... „*Elliptischer Typ*“ ($\Delta =$ eiförmiges Drehellipsoid)
- $\varepsilon = 1$ ($\alpha + \gamma = 90^\circ$) ... „*Parabolischer Typ*“ ($\Delta =$ Drehparaboloid)
- $\varepsilon > 1$ ($\alpha + \gamma < 90^\circ$) ... „*Hyperbolischer Typ*“ ($\Delta =$ zweischaliges Drehhyperboloid)
- $\varepsilon > 1, d = 0$... „*Konischer Typ*“ ($\Delta =$ Drehkegel).

⁷ A. Enneper, Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Math. Ann. 19 (1882).

G. Scheffers, Über Loxodromen. Ber. sächs. Ges. Wiss. Leipzig, 1902.

Da wir hierbei offensichtlich auf Böschungslinien aller Neigungen α auf Drehflächen 2. Ordnung aller möglichen reellen Exzentrizitätswerte ε stoßen, ist umgekehrt auch jede Böschungslinie einer Rotationsquadratik, reelle Brennpunkte und lotrechte Achsenlage vorausgesetzt, eine *Bündelloxodrome*; ihr Schnittwinkel γ ergibt sich aus (13).

Satz 4. *Wird eine Böschungslinie mit dem Steigungswinkel α , die auf einer Drehfläche 2. Ordnung mit lotrechter Achse und mit der reellen numerischen Exzentrizität ε verläuft, durch das Polarsystem einer Kugel transformiert, die einen Flächenbrennpunkt als Mitte besitzt, so entsteht eine Pseudo-geodätische auf einem Drehkegel mit dem Öffnungswinkel 2α , deren Schmiegebenenneigung γ sich aus $\cos \gamma = \varepsilon \sin \alpha$ bestimmt. Umgekehrt lassen sich auch alle Drehkegel-Pseudo-geodätischen auf diese Weise gewinnen.*

Einer regulären Rotationsquadratik Δ entspricht in der benutzten Kugelpolarität eine Kugel Σ , weil der vom Brennpunkt ausstrahlende und Δ berührende Minimalkegel in den absoluten Kegelschnitt übergeht. Einer auf Δ verlaufenden Kurve \bar{k} muß dann eine Kurve k entsprechen, deren Tangenten und Schmiegebenen die Kugel Σ berühren. — Umgekehrt ist aber auch jede auf einem Drehkegel verlaufende Kurve, deren Tangenten eine feste „koaxiale“ Kugel Σ berühren, eine *Pseudo-geodätische* des Kegels; dies ist unmittelbar einzusehen, wenn wir bedenken, daß Σ auch von den Schmiegebenen der Kurve berührt wird, während die Tangentialebenen des Kegels wiederum eine feste, mit Σ konzentrische Kugel berühren: Zwei solche, von einer Tangente der Kugel Σ ausgehende Ebenen schließen aber stets einen festen Winkel ein, der nur vom Radienverhältnis der beiden Kugeln abhängt⁸.

Satz 5. *Sämtliche Tangenten und Schmiegebenen einer Drehkegel-Pseudo-geodätischen von elliptischem, parabolischem oder hyper-*

⁸ Dieselbe Schlußweise läßt sich auch anwenden, wenn die Grundfläche Φ eine beliebige Torse ist, die einer Kugel umschrieben ist: Alle Flächenkurven, deren Tangenten (und Schmiegebenen) eine zu dieser Kugel konzentrische berühren, sind Pseudo-geodätische von Φ . Man erhält auf diese Weise allerdings nicht alle ∞^3 Pseudo-geodätischen der Fläche, sondern nur ∞^2 ausgezeichnete.

$$(14) \quad a^2(x^2 + y^2) + b^2 z^2 = a^2 b^2 \quad (a^2 - b^2 = e^2 > 0)$$

angenommen sei. Eine *Böschungslinie* \bar{k} läßt sich dann mit Verwendung eines Winkelparameters φ in folgender Weise anschreiben¹⁰:

$$x = b(m \cos m\varphi \cos \varphi + \sin m\varphi \sin \varphi)$$

$$y = b(m \cos m\varphi \sin \varphi - \sin m\varphi \cos \varphi)$$

$$z = an \cos m\varphi, \text{ wobei } m^2 + n^2 = 1.$$

Wir überzeugen uns von dem konstanten Anstieg gegen die xy -Ebene, indem wir durch Ableitung nach φ die *Tangentenrichtung*

$$\dot{x} : \dot{y} : \dot{z} = nb \cos \varphi : nb \sin \varphi : -ma$$

berechnen, woraus wir den Betrag des Anstiegs mit

$$(16) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{ma}{nb}$$

ablesen. Mit Hilfe der nunmehr unmittelbar angebbaren *Binormalenrichtung*

$$ma \cos \varphi : ma \sin \varphi : nb$$

läßt sich dann auch die Gleichung der *Schmiegeebene* sofort hinschreiben¹¹:

$$(17) \quad x \cdot ma \cos \varphi + y \cdot ma \sin \varphi + z \cdot nb = ab \cos m\varphi.$$

Zur *Polarisation* wollen wir jene Kugel Ω um den Brennpunkt $O(0, 0, e)$ verwenden, die die beiden Scheiteleremente von Δ vertauscht; dies bringt die Annehmlichkeit mit sich, daß die zur Quadrik Δ polare Kugel Σ mit der *Scheitelkugel* von Δ zusammenfällt (Fig. 2). Das Halbmesserquadrat von Ω beträgt zufolge dieser Forderung $(e+a)(e-a) = -b^2$, die Grundkugel Ω ist mithin nullteilig und hat die Gleichung

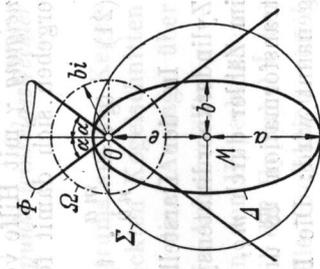


Fig. 2

¹⁰ Vgl. etwa W. Wunderlich, Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 155 (1947), 318.

¹¹ Unsere Böschungslinie \bar{k} erscheint zufolge (17) als Gratlinie einer Torse, die von einer Ebene eingehüllt wird, welche eine gleichförmige Drehung um die z -Achse und gleichzeitig eine harmonische Schwingung in Richtung dieser Achse vollführt. Diese kinematische Erzeugung würde einen bequemen Zugang zum Studium der Böschungslinien auf Drehellipsoiden abgeben.

bolischem Typus berühren eine feste Kugel, die ihren Mittelpunkt auf der Kegelschneidung hat; der Kegelschneidung liegt jeweils innerhalb, auf, bzw. außerhalb der Kugel. Umgekehrt ist jede Drehkegelkurve mit einer solchen Tangenteigenschaften eine Pseudogeodätische nicht-konischen Typs, bzw. eine echte Geodätische, falls Kegelschneidung und Kegelmittlinie zusammenfallen.

Im Falle einer konischen Drehfläche Δ artet die Polarkugel Σ in einen Fernkreis aus, und die Pseudogeodätische k ist selbst eine Böschungslinie. Die Böschungslinien des Drehkegels sind aber die wohlbekannteren *zylindrikonischen Spiralen*, die als Bahnkurven bei den eingliedrigsten kontinuierlichen *Ähnlichkeitsgruppen* („Spiralungen“) auftreten⁹; von diesem Gesichtspunkt aus ist ihre charakteristische Eigenschaft unveränderlicher Schmiegeebenenneigung eine selbstverständliche Folge der Winkeltreue der Ähnlichkeiten. — Der Steigungswinkel β der Böschungslinie k auf Φ ist identisch mit dem halben Öffnungswinkel des Drehkegels Δ und ergibt sich daher gemäß (13) aus $\cos \beta = z/r = 1/\varepsilon$.

Satz 6. Die Drehkegel-Pseudogeodätischen des konischen Typs sind Böschungslinien und identisch mit den Bahnkurven eingliedriger Ähnlichkeitsgruppen. Ihr Anstiegswinkel β und der Schnittwinkel Φ mit den Erzeugenden ergeben sich aus der Kegelöffnung 2α und der Schmiegeebenenneigung γ mittels der Formeln

$$\cos \beta = \sin \alpha / \cos \gamma, \quad \sin \Phi = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma.$$

In folgenden werden nun die einzelnen Typen der Pseudogeodätischen des Drehkegels der Reihe nach näher untersucht, mit Ausnahme des konischen Typs, der als hinlänglich bekannt angesehen werden darf. Ebenso wird von den Parallelkreisen abgesehen, die in trivialer Weise Pseudogeodätische mit der Schmiegeebenenneigung $\gamma = 90^\circ - \alpha$ abgeben.

V. Elliptischer Typ. Wir gehen nach Satz 4 von einem verlängerten Drehellipsoid Δ aus, dessen Gleichung in Normalkoordinaten x, y, z mit

⁹ G. Scheffers, Besondere transzendente Kurven. Enz. math. Wiss. III D 4, Nr. 34.

Vgl. auch W. Wunderlich, Darstellende Geometrie der Spiralfächen. Mh. Math. Phys. 46 (1938).

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ez + a^2 = 0.$$

Identifizieren wir jetzt die Polarebene eines Punktes (X, Y, Z)

$$(18) \quad xX + yY + z(Z - e) = eZ - a^2$$

mit der Schmiegeebene (17) von \bar{k} , so liefert uns der Koeffizientenvergleich die Beziehungen

$$(19) \quad X : Y : (Z - e) : (eZ - a^2) = m a \cos \varphi : m a \sin \varphi : n b : a b \cos m \varphi,$$

aus welchen dann die Parameterdarstellung der zu \bar{k} polaren Drehkegel-Pseudogeodätischen k fließt:

$$(20) \quad X = \frac{m a b \cos \varphi}{n e - a \cos m \varphi}, \quad Y = \frac{m a b \sin \varphi}{n e - a \cos m \varphi}, \quad Z - e = \frac{n b^2}{n e - a \cos m \varphi}.$$

Aus unseren Ausgangsgrößen a, b, m und den daraus abgeleiteten Hilfsgrößen $e^2 = a^2 - b^2, \varepsilon = e/a$ und $n^2 = 1 - m^2$ berechnen sich die interessierenden Daten der Pseudogeodätischen k , nämlich die Drehkegelloffnung 2α und die Schmiegeebeneigung γ mit Hilfe von (16) und (13). Samt den Umkehrungen ergeben sich damit folgende Formeln:

$$(21) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m a}{n b}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{m e}; \quad \frac{e}{a} = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}, \quad n = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}.$$

In der Darstellung (20) kann φ als Polarwinkel eines Zylinderkoordinatensystems aufgefaßt werden. Ersetzen wir ihn im Zähler durch $m\varphi$, so haben wir unsere Kurve k einer Punkttransformation \mathfrak{B} unterworfen, die „*achsiiale Winkelstauchung*“ genannt wird: Die Polarwinkel aller Raumpunkte werden mit dem konstanten Faktor $m < 1$ multipliziert, während die Abstände von der z -Achse und die Höhen z unverändert bleiben. Hierdurch wird k in eine Kurve \bar{k} übergeführt, die in der Ebene

$$b x - m e z + m a^2 = 0$$

und natürlich auch noch auf dem festgebliebenen Trägerkegel Φ liegt, also ein Kegelschnitt ist; da dieser (ebenso wie k selbst) wegen $n e < e < a$ reelle Fernpunkte besitzt, handelt es sich

um eine *Hyperbel*. Umgekehrt entsteht also unsere Pseudogeodätische k aus der Hyperbel \bar{k} durch die „*achsiiale Winkelstreckung*“ \mathfrak{B}^{-1} , die die Polarwinkel mit dem konstanten Faktor $1/m > 1$ vervielfacht. Dieser Streckungsfaktor ist jedoch nicht ganz willkürlich, da sich die Neigung der Hyperbelebene gegen die xy -Ebene als identisch mit γ erweist; m ist aber laut (21) eine Funktion von α und γ .

Satz 7. Um auf einem Drehkegel mit dem Öffnungswinkel 2α eine Pseudogeodätische elliptischen Typs mit der Schmiegeebeneigung $\gamma > 90^\circ - \alpha$ zu erhalten, schneide man den Kegel mit einer Ebene, die mit der Achse den Winkel $90^\circ - \gamma$ bildet und über auf die Schnitthyperbel eine achsiiale Winkelstreckung aus, deren Streckungsfaktor den Wert $\sin \gamma / |\sin^2 \gamma - \cos^2 \alpha|$ hat.

Aus der Tatsache, daß die Zentralprojektion der Hyperbel \bar{k} aus einem Achsenpunkt auf eine achsennormale Bildebene ein Kegelschnitt ist, für den das Bild der Kegelspitze einen Brennpunkt abgibt, folgt unmittelbar

Satz 8. Die Projektion einer Drehkegel-Pseudogeodätischen elliptischen Typs aus einem Achsenpunkt auf eine achsennormale Ebene ist im allgemeinen ein um einen Brennpunkt winkeligestreckter Kegelschnitt.

Je nach der Lage des Projektionszentrums auf der Kegelachse können alle Arten von winkeligestreckten Kegelschnitten auftreten. Satz 8 gibt insbesondere auch eine Aussage über den Grundriß, d. h. die Normalprojektion in Achsenrichtung. — Eine ausgezeichnete Stellung nimmt der in der Hyperbelebene gelegene Achsenpunkt $E(0, 0, a^2/e)$ ein, weil die Hyperbel \bar{k} bei Abbildung aus E als Gerade erscheint; die Projektion von k ist demnach eine „winkeligestreckte Gerade“, also eine sogenannte „*Ährenkurve*“¹². Nennen wir die Kugel $\Sigma(x^2 + y^2 +$

¹² H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven (Sammlung Schubert, Bd. 56; Leipzig 1908), S. 82, 124, 241.

Ährenkurven sind invers zu Rosenkurven und polarreziprok zu Zykloiden (Epizykloiden in unserem Fall); sie entstehen auch als Ort des Schnittpunktes zweier Kreistangenten, die mit proportionalen Geschwindigkeiten auf ihrem Kreis rollen.

$+s^2 = a^2$), die von allen Tangenten der Pseudogeodätischen k berührt wird, kurz die „Leitkugel“, so können wir sagen:

Satz 9. Wird eine Drehkegel-Pseudogeodätische elliptischen Typs aus jenem Achsenpunkt, der zum Kegelscheitel bezüglich der Leitkugel invers liegt, auf eine achsennormale Ebene projiziert, so erscheint sie als eine Ährenkurve mit der Polargleichung $r \cos m\varphi = \text{const.}$

Hinsichtlich eines weiteren Sonderfalles siehe Satz 19.

Wir wollen nunmehr eine Kollineation \mathfrak{K} ausüben, die die Leitkugel Σ erhält und den Kegelscheitel O in ihre Mitte bringt. Hierbei wird die Pseudogeodätische k des Drehkegels Φ in eine Kurve k^* auf einem neuen Drehkegel Φ^* übergehen, deren Tangenten die konzentrische Kugel $\Sigma^* = \Sigma$ berühren. Durch diese Eigenschaft ist k^* aber als echte Geodätische von Φ^* gekennzeichnet.

Wir setzen die Transformationsgleichungen von \mathfrak{K} mit

$$(22) \quad x^* = \frac{abx}{e\varrho - a^2}, \quad y^* = \frac{aby}{e\varrho - a^2}, \quad z^* = \frac{a^2(z - e)}{e\varrho - a^2}$$

an, und erhalten durch Einsetzung von X aus (20) für x usf. die Darstellung

$$(23) \quad X^* = \frac{ma \cos \varphi}{\cos m\varphi}, \quad Y^* = \frac{ma \sin \varphi}{\cos m\varphi}, \quad Z^* = \frac{na}{\cos m\varphi}$$

der Geodätischen k^* , die auf dem Drehkegel mit der Gleichung $\frac{x^{*2} + y^{*2}}{m^2} = \frac{z^{*2}}{n^2}$ verläuft; dessen Öffnungswinkel $2\alpha^*$ ergibt sich aus $\sin \alpha^* = m$ oder $\cos \alpha^* = n$.

Satz 10. Die auf einem Drehkegel mit dem Öffnungswinkel 2α verlaufenden Pseudogeodätischen elliptischen Typs mit der Schmiegeebenenneigung $\gamma > 90^\circ - \alpha$ sind kollinear zu den geodätischen Linien auf einem anderen Drehkegel, dessen Öffnungswinkel $2\alpha^*$ sich aus $\cos \alpha^* = \cos \alpha / \sin \gamma$ ergibt.

Bei Normalprojektion in Achsenrichtung erscheinen Drehkegelgeodätische bekanntlich als Ährenkurven¹³; dies steht in

¹³ G. Loria, Curve sghembe speciali. Bd. II (Bologna 1925), 215.

voller Übereinstimmung mit Satz 9 und der Tatsache, daß das dort benützte Projektionszentrum E ins Unendliche rückt, sei es nun durch Anwendung der Kollineation \mathfrak{K} oder auf Grund der Spezialisierung $e = 0$ ($\gamma = 90^\circ$).

Wenden wir an Stelle der Kollineation \mathfrak{K} eine andere Kollineation \mathfrak{L} an, welche zwar ebenfalls die Rotationssymmetrie um z erhält, jedoch den Kegelscheitel $O(0, 0, e)$ ins Unendliche wirft, so wird die Pseudogeodätische k des Drehkegels Φ in eine Kurve k_* auf einem Drehzylinder Φ_* verwandelt, an der wir ebenfalls besondere Eigenschaften vermuten dürfen. Wir setzen die Transformationsgleichungen von \mathfrak{L} mit

$$(24) \quad x_* = \frac{nbx}{z - e}, \quad y_* = \frac{nby}{z - e}, \quad z_* = \frac{n(ez - a^2)}{z - e}$$

an und finden durch Substitution der Werte aus (20) als Darstellung der Zylinderkurve k_*

$$(25) \quad X_* = ma \cos \varphi, \quad Y_* = ma \sin \varphi, \quad Z_* = a \cos m\varphi.$$

Es handelt sich um eine einfache, aber anscheinend noch nicht allgemein untersuchte Raumkurve, die bei der Verebnung des Zylindermantels in eine Sinuslinie übergeht. Sie läßt sich kinematisch erklären als Bahn eines Punktes, welcher eine harmonische Schwingung auf einer Geraden vollführt, die gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit um eine parallele Achse rotiert. Die Normalprojektion auf eine achsenparallele Ebene ist mithin offensichtlich eine Lissajous'sche Kurve, nämlich die Bahn eines Punktes, der gleichzeitig zwei harmonischen Schwingungen in zueinander normalen Richtungen unterworfen ist; damit haben wir nun auch eine Aussage über den Aufriß unserer Pseudogeodätischen k . Erwähnt sei noch, daß die Tangenten von k_* die zur Leitkugel Σ kollineare Quadrik Σ_* berühren, die sich in unserem Fall als zweischaliges gleichseitiges Drehhyperboloid mit der Gleichung

$$x_*^2 + y_*^2 - z_*^2 + n^2 a^2 = 0$$

erweist.

Satz 11. Die auf einem Drehkegel verlaufenden pseudogeodätischen Linien elliptischen Typs sind kollinear zu Raumkurven, die sich durch Aufwickeln einer Sinuslinie auf einen Drehzylinder er-

geben. Die Normalrisse der Pseudogeodätischen auf eine achsenparallele Ebene sind kollinear verzerrte Lissajoussche Kurven.

Diese Aussagen gelten natürlich auch für die echten Geodätischen des Drehkegels, sind aber anscheinend noch nicht ausgesprochen worden.

Zum Abschluß der Diskussion des elliptischen Falls sei noch erwähnt, daß dieser auch noch durch das Auftreten von algebraischen Pseudogeodätischen ausgezeichnet ist, die sich nämlich für rationale Werte von m einstellen. Schreiben wir in einem solchen Fall $m = \mu/\nu$ als gekürzten Bruch an ($0 < \mu < \nu$, μ und ν ganz und teilerfremd), drücken wir in den Kurvengleichungen (20) die trigonometrischen Funktionen durch e -Potenzen aus und führen wir schließlich den algebraischen Parameter $t = e^{i\psi}$ ein, so erkennen wir, daß es sich bei der betrachteten Pseudogeodätischen um eine rationale Kurve 2ν -ter Ordnung handelt. Sie weist eine μ -zählige Drehsymmetrie auf, da sie durch eine Drehung um den Betrag $2\pi/m = 2\nu\pi/\mu$ in sich übergeht. Sie besitzt ferner die absoluten Kreispunkte der xy -Ebene zu $(\nu-\mu)$ -fachen Punkten mit zusammenfallenden Tangenten.

Die einfachste Annahme lautet $m = 1/2$ und führt auf Raumkurven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt. Der Normalriß auf die ax -Ebene — kurz als „Aufriß“ bezeichnet — wird als doppelt überdeckte Hyperbel erscheinen, die nach Einführung des neuen Parameters $u = \cos \varphi/2$ durch

$$(26) \quad X = \frac{ab(2u^2 - 1)}{e\sqrt{3} - 2au}, \quad Z - e = \frac{b^2\sqrt{3}}{e\sqrt{3} - 2au}$$

dargestellt wird. Wir erkennen, daß eine Asymptote ($u_1 = \infty$) in der Hauptsymmetrieebene $z = e$ des Drehkegels Φ liegt, während die Richtung der anderen ($u_2 = e\sqrt{3}/2a$) durch

$$\lim \frac{Z - e}{X} = \frac{b\sqrt{3}}{a(2u_2^2 - 1)} = \frac{2ab\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2} = -\operatorname{tg} 2\alpha$$

angezeigt wird; der Asymptotenwinkel der Aufrißhyperbel und der Öffnungswinkel des Grundkegels Φ sind mithin supplementär. Der über dieser Hyperbel errichtete y -parallele Zylinder schneidet aus Φ unsere Pseudogeodätische heraus und wird Φ

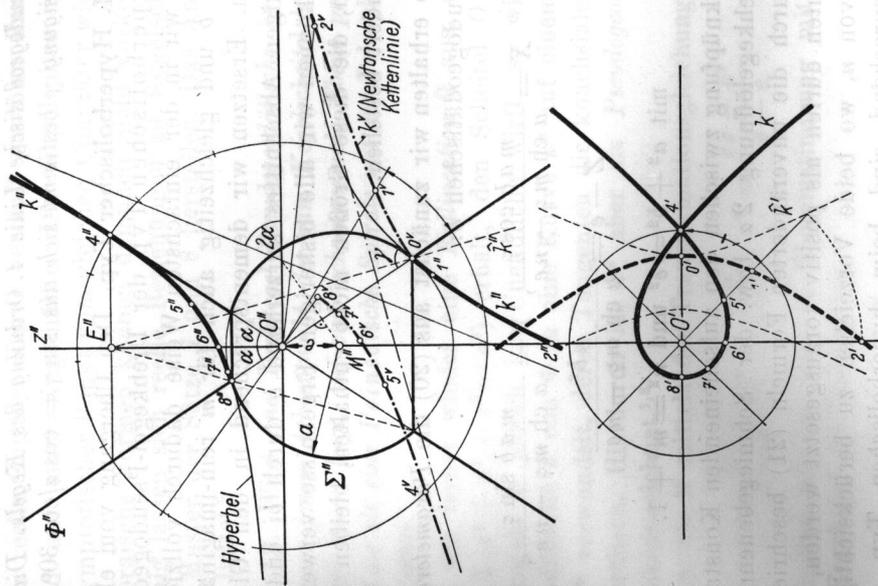


Fig. 3. Pseudogeodätische Linie 4. Ordnung eines Drehkegels ($m = 1/2$, $e : a = 1 : 2$; $\operatorname{tg} \alpha = 2/\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \gamma = 2/\sqrt{3}$)

an einer Stelle berühren müssen, um so den notwendigen Doppelpunkt ($u = 0$) der Schnittkurve zu verursachen. Wir haben damit den

Satz 12. Die Schnittlinie eines Drehkegels mit dem Öffnungswinkel $2\alpha > 60^\circ$ und eines reell berührenden hyperbolischen Zylinders mit dem Asymptotenwinkel $180^\circ - 2\alpha$, welcher die Hauptsymmetrieebene des Kegels zu einer asymptotischen Ebene besitzt, ist

eine pseudogeodätische Linie 4. Ordnung des Kegels. Die Schmiegebenenneigung γ bestimmt sich aus $\sin \gamma = \cos \alpha / \cos 30^\circ$.

VI. Hyperbolischer Typ. Den Übergang vom elliptischen zum hyperbolischen Typ der Drehkegel-Pseudogeodätischen können wir in der einfachsten Weise dadurch vollziehen, daß wir für b und gleichzeitig auch für m rein-imaginäre Werte zulassen. Ersetzen wir dementsprechend in den Gleichungen des vorigen Abschnittes kurzerhand b durch bi und m durch mi , so können wir alle bisherigen Ergebnisse verwenden; alle Formeln, die diese Größen nicht enthalten, bleiben überhaupt unverändert bestehen.

So erhalten wir zunächst aus (20) die Parameterdarstellung der Pseudogeodätischen k :

$$(27) \quad X = \frac{mab \cos \varphi}{a \operatorname{ch} m\varphi - ne}, \quad Y = \frac{mab \sin \varphi}{a \operatorname{ch} m\varphi - ne}, \\ Z - e = \frac{nb^2}{a \operatorname{ch} m\varphi - ne}$$

mit $a^2 + b^2 = e^2$ und $n^2 = m^2 + 1$.

Die Verknüpfung zwischen den aufscheinenden Konstanten und der Drehkegelföffnung 2α bzw. der Schmiegebenenneigung γ wird durch die unveränderten Formeln (21) beschrieben. Alle Konstanten dürfen als positiv vorausgesetzt werden, mit Ausnahme von n , wo beide Vorzeichen zu berücksichtigen sind. Dementsprechend sind beim hyperbolischen Typ zwei Erscheinungsformen zu unterscheiden, die nicht (wie beim elliptischen Typ) durch reelle Bewegungen ineinander überführbar sind:

$n > 0$: Der reelle Zug der Kurve besteht aus zwei Ästen, die auf verschiedenen Kegelhälften liegen und im Unendlichen regulär zusammenhängen. Der den Scheitel $\varphi = 0$ enthaltende Ast weist keine höhere Singularität auf, während sich der andere Ast der Kegelspitze von zwei Seiten in asymptotischer Weise nähert, dieselbe nach Art zweier zylindro-konischer Spiralen in beiderlei Sinn umkreisend ($\varphi \rightarrow \pm \infty$).

$n < 0$: Der reelle Zug der Kurve verläuft ganz im Endlichen und auf einer Kegelhälfte. Die Kegelspitze ist ein asymptotischer Punkt vom gleichen Charakter wie oben.

Algebraische Formen können demnach nicht vorkommen. Ebensowenig lassen sich reelle Beziehungen zu Kegelschnitten nach dem Muster der Sätze 7 und 8 herstellen. Das Analogon zu Satz 9 lautet:

Satz 13. Wird eine Drehkegel-Pseudogeodätische hyperbolischen Typs aus jenem Achsenpunkt, der zum Kegelscheitel bezüglich der Leikugel invers liegt, auf eine achsennormale Ebene projiziert, so erscheint sie als eine Poinsoitsche Spirale mit der Polargleichung $r \operatorname{ch} m\varphi = \operatorname{const.}$

Üben wir ferner wieder eine Kollimation \mathfrak{K} aus, die die Leitkugel $\Sigma (x^2 + y^2 + z^2 = a^2)$ erhält, den Scheitel $O(0, 0, e)$ des Drehkegels Φ jedoch ins Unendliche wirft, so wird die Pseudogeodätische k von Φ in eine Kurve k^* auf einem Drehzylinder Φ^* verwandelt, deren Tangenten die koaxiale Kugel $\Sigma^* = \Sigma$ berühren. Hierdurch ist k^* aber als Pseudogeodätische von Φ^* gekennzeichnet.^{1,8}

Setzen wir \mathfrak{K} mittels der Transformationsgleichungen

$$(28) \quad x^* = \frac{bx}{z - e}, \quad y^* = \frac{by}{z - e}, \quad z^* = \frac{ez - a^2}{z - e}$$

an, so erhalten wir aus (27) in Übereinstimmung mit einem früheren Ergebnis¹ die Darstellung

$$(29) \quad X^* = \frac{a}{n} m \cos \varphi, \quad Y^* = \frac{a}{n} m \sin \varphi, \quad Z^* = \frac{a}{n} \operatorname{ch} m\varphi$$

der Pseudogeodätischen k^* des Drehzylinders Φ^* mit der Achse z und dem Halbmesser a/n . Die konstante Schmiegebenenneigung ist gleich dem Schnittwinkel von Φ^* und Σ und beträgt $\gamma^* = \operatorname{arccot} m = \operatorname{arcsin} (1/n)$.

Satz 14. Die auf einem Drehkegel mit dem Öffnungswinkel 2α verlaufenden pseudogeodätischen Linien hyperbolischen Typs mit der Schmiegebenenneigung $\gamma < 90^\circ - \alpha$ sind kollinear zu jenen Pseudogeodätischen auf einem Drehzylinder, deren Schmiegebenenneigung γ^* sich aus $\sin \gamma^* = \sin \gamma / \cos \alpha$ ergibt.

Die Leitkugel, deren Gleichung ursprünglich $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ lautet, wird nun durch $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta + 1)^2 = 1$ dargestellt; der Kegelscheitel liegt auf ihrer Oberfläche, wie es sein muß. — Die Pseudogeodätische parabolischen Typs ist stets *transzendent* und besitzt den Kegelscheitel zu einem asymptotischen Doppelpunkt.

Üben wir eine *Kollimation* aus, die den Kegelscheitel unter Erhaltung der Rotationssymmetrie ins Unendliche wirft, also etwa

$$(32) \quad \xi^* = \frac{\xi \cot \alpha}{\zeta}, \quad \eta^* = \frac{\eta \cot \alpha}{\zeta}, \quad \zeta^* = \frac{2 \cot^2 \alpha}{\zeta},$$

so wird die Pseudogeodätische (31) in die folgende Raumkurve transformiert:

$$(33) \quad \xi^* = \cos \varphi, \quad \eta^* = \sin \varphi, \quad \zeta^* = \varphi^2 - \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Es handelt sich offensichtlich um eine Kurve, die auf einem *Drehzylinder* verläuft und bei dessen Verebnung in eine *Parabel* übergeht.¹⁴

Satz 15. Die Drehkegel-Pseudogeodätischen von parabolischem Typ sind *kollinear* zu einer Kurve, die sich durch Aufwickeln einer Parabel auf einen achsenparallelen Drehzylinder ergibt.

VIII. Verebnung. Der Mantelwinkel ψ eines Drehkegels mit der Öffnung 2α hängt mit dem Polarwinkel φ durch

$$(34) \quad \psi = \varphi \cdot \sin \alpha$$

zusammen. Damit können wir aus den Darstellungen (20), (27) bzw. (31) sofort die Polargleichung der *Verebnung* einer Drehkegel-Pseudogeodätischen k ableiten, d. h. jener ebenen Kurve k^φ , in welche k durch die Abwicklung des Trägerkegels Φ übergeht:

$$(35) \quad \begin{aligned} r(1 - \lambda \cos l\psi) &= \text{const} \dots \text{ Elliptischer Typ} \\ r(1 - \lambda \operatorname{ch} l\psi) &= \text{const} \dots \text{ Hyperbolischer Typ} \\ r(1 - \psi^2) &= \text{const} \dots \text{ Parabolischer Typ} \\ r \exp(-l\psi) &= \text{const} \dots \text{ Konischer Typ.} \end{aligned}$$

¹⁴ Diese Raumkurve ist, nebenbei bemerkt, die Gratlinie einer Torse, die einem Drehparaboloid mit lotrechter Achse längs einer seiner Böschungslinien umschrieben ist.

VII. Parabolischer Typ. Auch der parabolische Fall läßt sich aus dem elliptischen ableiten, und zwar durch einen geeigneten Grenzübergang, bei welchem die Halbachsen a und b des Ellipsoides Δ über alle Grenzen wachsen, während gleichzeitig m gegen Null strebt. Wir müssen hierbei nur fordern, daß b^2/a einem endlichen Grenzwert $p \neq 0$ zustrebe, damit Δ ein *Paraboloid* werde, und daß auch das Produkt mb gegen einen endlichen Wert $q \neq 0$ konvergiere. Unter diesen Bedingungen, die $\varepsilon = e/a \rightarrow 1$ und $n \rightarrow 1$ nach sich ziehen, behalten die Formeln (21) einen Sinn, der sich in die Beziehungen

$$(30) \quad \cot \alpha = \operatorname{tg} \gamma = \frac{p}{q}, \quad \alpha + \gamma = 90^\circ$$

zusammenfassen läßt.

Vor allem interessiert zunächst der Grenzwert des gemeinsamen Nenners in den Gleichungen (20):

$$\begin{aligned} u &= \lim (ne - a \cos m\varphi) = \lim (ne - a) + 2 \lim a \sin^2 \frac{m\varphi}{2} = \\ &= - \lim \frac{b^2 + m^2 e^2}{a + ne} + 2 \lim \frac{a}{b^2} \cdot m^2 b^2 \cdot \frac{\sin^2 m\varphi/2}{m^2} = \\ &= - \left(\frac{p}{2} + \frac{q^2}{2p} \right) + \frac{q^2}{2p} \varphi^2. \end{aligned}$$

Vorläufig streben die Zähler der Gleichungen (20) noch gegen ∞ ; dies liegt daran, daß die der Polarität zugrundeliegende Kugel Ω (Radius b_i) über alle Schranken wächst. Um dies zu kompensieren, betrachten wir die verkleinerten Koordinaten $X/a, Y/a, (Z - e)/a$. Deren Grenzwerte sind endlich und ergeben sich mit

$$(31) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{q}{u} \cos \varphi = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\varphi^2 \sin^2 \alpha - 1} \cos \varphi \\ \eta &= \frac{q}{u} \sin \varphi = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\varphi^2 \sin^2 \alpha - 1} \sin \varphi \\ \zeta &= \frac{p}{u} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\varphi^2 \sin^2 \alpha - 1} \end{aligned}$$

Damit ist gleichzeitig die *Parameterdarstellung* einer Drehkegel-Pseudogeodätischen parabolischen Typs gefunden; der Trägerkegel hat die Öffnung 2α und seinen Scheitel im Ursprung.

Für die Konstanten λ und l gelten dabei mit Rücksicht auf die Formeln (21) bzw. Satz 6 die Beziehungen

$$(36) \quad \lambda = \frac{a}{ne} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma, \quad l = \frac{m}{\sin \alpha} = \sqrt{\pm 1 \mp \cot^2 \alpha \cot^2 \gamma};$$

die beiden Konstanten sind demnach nicht unabhängig, sondern durch $\lambda^{-2} + l^2 = 1$ gekoppelt.

Bei diesen ebenen Kurven handelt es sich im elliptischen Fall um *winkelgestreckte Hyperbeln* (Exzentrizität $\lambda > 1$, Streckungsfaktor $1/l > 1$), im hyperbolischen Fall um *imaginär winkeligestreckte Ellipsen* (Exzentrizität $\lambda < 1$, Streckungsfaktor i/l), im parabolischen Fall um eine *inverse Galileische Spirale*, und im konischen Fall um eine *logarithmische Spirale*. Da bei festgesetzten Konstanten die Winkel α und γ noch unbestimmt bleiben, kann jede der Kurven (35) auf einen Drehkegel beliebiger Öffnung aufgewickelt werden; diese Tatsache steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem allgemeinen Satz 1.

Nun werden bekanntlich auch die auf einem Drehkegel verlaufenden *Kegelschnitte* bei der Abwicklung in Kurven übergeführt, deren Polargleichung die Bauart (35a) hat. Es müßte daher umgekehrt möglich sein, die Ebene mit einer Kurve k^2 elliptischen Typs derart zu einem Drehkegel zu verbiegen, daß k zu einem ebenen Schnitt desselben wird. Dies ist dann erreicht, wenn in dem die Kurve k beschreibenden Gleichungssystem (20) die Konstante m den Wert ± 1 annimmt; zufolge (36) hat der Drehkegel dann den halben Öffnungswinkel

$$\alpha = \pm \arcsin \frac{1}{l} = \pm \operatorname{arctg} \lambda i,$$

ist also *nullteilig (imaginär)*. Diese Annahme zieht überdies $\operatorname{tg} \gamma = \pm i$ nach sich.

Die betreffende Kegelkurve k wird dann in Zylinderkoordinaten ρ, φ, z beschrieben durch

$$\rho = \frac{C}{1 - \lambda \cos \varphi}, \quad z = \rho \cot \alpha = \frac{\pm Ci}{\lambda(1 - \lambda \cos \varphi)}.$$

Zwischen den Normalkoordinaten $x = \rho \cos \varphi$ und z besteht die lineare Beziehung

$$x \pm iz = -C/\lambda;$$

die Kurve k liegt demnach in einer *Minimalebene*. Damit hat sich eine interessante komplex-geometrische Deutung unserer elliptischen Pseudogeodätischen ergeben, die sich auch auf den hyperbolischen Fall ausdehnen läßt:

Satz 16. *Wird ein nullteiliger, nicht isotroper Drehkegel $(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2 = 0, \lambda^2 \neq 1)$ mit einer Minimalebene geschnitten, deren reelle Gerade in der Hauptsymmetrieebene des Kegels liegt, so geht dieser Schnitt bei Verbiegung des Kegels zu einem anderen Drehkegel von beliebiger (insbesondere reeller) Öffnung in eine pseudogeodätische Linie des letzteren über. Dieselbe gehört zum elliptischen oder hyperbolischen Typ, je nachdem $\lambda^2 > 1$ oder $\lambda^2 < 1$ ist.*

IX. Zusammenhänge mit Kettenlinien und Schleppekurven.

Wie in der Einleitung erwähnt und in einer früheren Arbeit¹ ausführlich dargelegt wurde, kommt den Pseudogeodätischen des Drehzylinders eine bemerkenswerte mechanische Bedeutung zu: Sie stellen (bei lotrechter Zylinderachse) Kettenlinien dar, d. h. sie geben die Gleichgewichtsform eines homogenen und vollkommen biegsamen, schweren Fadens an, der der Zylinderfläche reibungslos anliegt und einer konstanten, parallel zur Zylinderachse wirkenden Schwerebeschleunigung unterliegt. In Verallgemeinerung dieser Tatsache liegt die Vermutung nahe, daß auch die Pseudogeodätischen des Drehkegels einer analogen Deutung fähig sind. Diese Vermutung läßt sich bestätigen, wenn wir an Stelle des homogenen ein Newtonsches Gravitationsfeld voraussetzen, dessen Zentrum mit der Kegelspitze O zusammenfällt; die Beschleunigung wirkt hier in der Richtung O und ist dem Betrag nach umgekehrt proportional dem Quadrat der Zentralentfernung r .

Um die Gleichung einer solchen „konischen Kettenlinie“ zu ermitteln, die auf einem beliebigen, von O ausstrahlenden Kegel verläuft, betrachten wir ein Kettenelement ds und die darauf wirkenden Kräfte. Diese sind:

- 1) Die *Zentralkraft* (das Gewicht) $M ds/r^2$ in Richtung auf O hin oder von O weg.
- 2) Die *Tangentiale Kräfte* (Spannkraft) — T und $T + dT$ in Richtung der Anfangs- bzw. Endtangente des Elementes.

3) Die *Normalkraft* (der Auflagerdruck) $N ds$ in Richtung der Flächennormale.

Diese vier Kräfte halten einander das Gleichgewicht. Da uns der Auflagerdruck nicht zu interessieren braucht, beschränken wir uns auf die Normalprojektionen auf die Tangentialebene. Die beiden Spannkraften vermindern sich hierbei nur um Beträge 2. Ordnung, die wir nicht zu berücksichtigen brauchen. Ihre Resultierende können wir gemäß Fig. 4 in eine Tangential- und eine Normalkomponente zerlegen; abgesehen von Differenzen 2. Ordnung ist der Betrag der ersteren gleich dem Spannkraftzuwachs dT , während die letztere den vom Richtungsunterschied $d\tau$ der Endtangentialen verursachten Wert $T d\tau$ hat und in die hohle Seite der Kurve weist; diese Komponente ist mit dem negativen Vorzeichen anzusetzen, wenn, wie in Fig. 4, die hohle Kurvenseite dem Ursprung abgewendet ist, weil τ mit wachsendem Mantelwinkel ψ abnimmt. Bezeichnet ϑ den Winkel des Bogenelementes ds mit der Kegeleerzeugenden, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Tangential- und Normalkomponenten — unabhängig von der Gestalt des betrachteten Kegels —

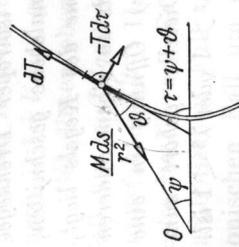


Fig. 4

$$(37) \quad \begin{aligned} dT &= \frac{M ds}{r^2} \cos \vartheta = M \frac{dr}{r^2} \\ -T d(\psi + \vartheta) &= \frac{M ds}{r^2} \sin \vartheta = M \frac{d\psi}{r} \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen läßt sich unmittelbar integrieren und liefert, wenn wir die Integrationskonstante mit M/q bezeichnen, falls sie von Null verschieden ist

$$(38) \quad T = M \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right), \text{ bzw. } T = -\frac{M}{r}.$$

Gehen wir damit in die zweite Bedingung (37) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$r d\psi + (r - q) d\vartheta = 0, \text{ bzw. } d\vartheta = 0.$$

Ersetzen wir hierin das erste Glied durch das Äquivalent

$dr \cdot \operatorname{tg} \vartheta$, so lassen sich die Veränderlichen trennen und wir gewinnen die Zwischenlösung

$$(39) \quad (r - q) \sin \vartheta = p = \text{const.}, \text{ bzw. } \vartheta = \text{const.}$$

Damit kennen wir den Tangentenwinkel ϑ als Funktion von r und finden aus $\operatorname{tg} \vartheta = r d\psi/dr$ die Darstellung des Mantelwinkels ψ in Abhängigkeit von r :

$$(40) \quad \psi = \int_{r_0}^r \operatorname{tg} \vartheta \frac{dr}{r} = \int_{r_0}^r \frac{p dr}{r \sqrt{(r - q)^2 - p^2}}.$$

Im allgemeinen Fall wird es bequem sein, den Anfangspunkt in den Scheitel $\vartheta = \pi/2$ zu verlegen, so daß $r_0 = p + q$ ist. Zur Auswertung des Integrals führen wir die Hilfsveränderliche $u = 1/r$ ein (Potential!) und erhalten mit Benützung der Abkürzung $p^2 - q^2 = \pm d^2$

$$(41) \quad \psi = \begin{cases} \frac{p}{d} \arccos \frac{q + d^2 u}{p} & \text{für } p^2 - q^2 = d^2 > 0 \\ \frac{p}{d} \operatorname{arch} \frac{q - d^2 u}{p} & \text{„ } p^2 - q^2 = -d^2 < 0 \\ \sqrt{1 - 2qu} & \text{„ } p^2 - q^2 = 0 \\ \operatorname{tg} \vartheta \cdot \ln \frac{u_0}{u} & \text{„ } q = \infty. \end{cases}$$

Hieraus fließt dann die Gleichung der gesuchten *Kettenlinie* (gleichzeitig die Polargleichung ihrer Verebnung):

$$(42) \quad \begin{aligned} r \left(p \cos \frac{d}{p} \psi - q \right) &= d^2 \\ r \left(q - p \operatorname{ch} \frac{d}{p} \psi \right) &= d^2 \\ r(1 - \psi^2) &= 2q \\ r \exp(-\psi \cot \vartheta) &= r_0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen erweisen sich nun tatsächlich als identisch mit den Gleichungen (35), wenn wir bloß $p/q = \lambda$ und $d/p = l$ setzen; die Koppelbedingung $\lambda^{-2} \pm l^2 = 1$ ist wegen $p^2 - q^2 = \pm d^2$ erfüllt. Damit hat sich nicht nur unsere Vermutung hinsichtlich der mechanischen Bedeutung der Pseudo-

geodätischen des Drehkegels als richtig erwiesen, sondern wir haben auch noch eine Aussage über die *verebneten Pseudogeodätischen* gewonnen, die wir nunmehr als „*Newtonische Kettenlinien*“ charakterisieren können, nämlich als Gleichgewichtsformen freier hängender Ketten in einem Newtonschen Schwerfeld.

Satz 17. Die Gleichgewichtsform, die eine homogene Kette in einem Newtonschen Schwerfeld annimmt, wenn sie an einem vom Gravitationszentrum ausstrahlenden, vollkommen glatten Drehkegel anliegt, ist eine Pseudogeodätische des Kegels.

Satz 18. Die Pseudogeodätischen eines Drehkegels gehen bei Verebnung des Mantels in Newtonsche Kettenlinien über.

Wir haben in Abschnitt IV (Satz 5) festgestellt, daß die Tangenten einer jeden auf einem Drehkegel Φ verlaufenden Pseudogeodätischen k , die nicht dem konischen Typ angehört, eine gewisse Leitkugel Σ berühren, die die Kegelachse als Durchmesser besitzt. Der Ort der Berührungspunkte ist eine Kurve u , die die Tangenten t von k rechtwinklig durchsetzt, also eine (spezielle) Fadenevolvente von k darstellt. Diese Kurve u ist aber auch eine Orthogonaltrajektorie jener Drehschar von Kleinkreisen, die die Tangentialebenen von Φ aus Σ ausschneiden; sie ist mithin eine *sphärische Schleppkurve* eines jener beiden Kreise h , die von den sphärischen Mittelpunkten der Schar Kreise erfüllt werden.

Bilden wir nunmehr die Leitkugel Σ stereographisch ab, d. h. projizieren wir sie aus einem ihrer beiden Schnittpunkte mit der Kegelachse z auf eine zu z normale Ebene, so erscheint wegen der Winkel- und Kreistreue dieser Abbildung die Berührungskurve u als die Orthogonaltrajektorie u^c einer ebenen Drehschar von Kreisen, also als *ebene Kreistratrix*. Die Tangenten t von k gehen hierbei in die Normalen t^c von u^c über und wir erkennen die Projektion k^c von k als identisch mit der *Evolvente* von u^c . Umgekehrt kann eine vorliegende ebene Kreistratrix u^c stets als stereographische Projektion einer sphärischen Kreistratrix u aufgefaßt werden, wobei der Radius der Trägerkugel Σ noch beliebig angenommen werden kann; lassen wir diesen über alle Grenzen wachsen, so wird der zu-

gehörige Drehkegel Φ immer flacher, und wir können es so einrichten, daß sich die auf ihm verlaufende Pseudogeodätische k innerhalb eines endlichen Bereiches beliebig wenig von k^c unterscheidet. Hieraus geht aber hervor, daß k^c selbst eine *Newtonische Kettenlinie* sein muß¹⁵.

Es sei erwähnt, daß auch bei den Schleppkurven des Kreises zwischen einem elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Typ unterschieden werden kann, je nachdem die Schleppstrecke größer, gleich oder kleiner als der Grundkreisradius ist¹⁶. Es besteht Übereinstimmung mit dem Typ der zugehörigen Drehkegel-Pseudogeodätischen.

In Ergänzung der Sätze 5 und 8 haben wir jetzt also festgestellt:

Satz 19. Die Berührungskurve der Tangentenfläche einer Drehkegel-Pseudogeodätischen elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Typs mit der Leitkugel ist eine sphärische Kreistratrix gleichen Typs.

Bei stereographischer Projektion der Leitkugel aus einem Achsenpunkt bildet sich die Berührungskurve als ebene Kreistratrix ab; deren Evolute fällt mit der Projektion der Pseudogeodätischen zusammen und stellt eine Newtonsche Kettenlinie dar.

X. Natürliche Kennzeichnung der Drehkegel-Pseudogeodätischen. Jede Kurve, deren Tangentenfläche einer Kugel umschrieben ist, ist bekanntlich eine Kegelgeodätische. Dies gilt mithin auch für unsere pseudogeodätischen Linien k auf

¹⁵ Die Tatsache, daß die Evolute einer ebenen Kreistratrix eine Newtonsche Kettenlinie ist, wurde auch von F. Morley bemerkt (The "No-Rolling" Curves of Amsler's Planimeter. Ann. of Math. 1, 1899). — Daß umgekehrt unter den Evoluten einer Newtonschen Kettenlinie stets die Schleppkurve eines Kreises vorkommt, kann auch aus Gleichung (39) gefolgert werden, die geometrisch besagt, daß jede Kettentangente einen Kreis mit dem festen Halbmesser p berührt, dessen Mittelpunkt auf dem Radiusvektor des Berührungspunktes liegt und den konstanten Zentralabstand q hat.

¹⁶ W. Wunderlich, Über die Schleppkurven des Kreises. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 156 (1948). — In dieser Arbeit hat der Verfasser übrigens auch gezeigt, daß die Evolute jeder ebenen Kreistratrix elliptischen Typs als Zentralprojektion einer echten Drehkegelgeodätischen erhalten werden kann (Satz 9).

Drehkegeln, soweit sie eine Leitkugel besitzen; jede von ihnen ist eine echte geodätische Linie auf einem Kegel, der vom Leitkugelmittelpunkt ausstrahlt. Ausgeschlossen sind hierbei die Pseudogeodätischen vom konischen Typ, die ja keine Leitkugel haben; als Böschungslinien (vgl. Satz 6) sind sie jedoch Zylindergeodätische und lassen sich in diesem Sinne als Grenzfall einordnen.

Wir werfen in diesem Zusammenhange die Frage auf, ob es außer dem Drehkegel auch noch andere Kegelflächen gibt, die pseudogeodätische Linien besitzen, welche gleichzeitig echte Geodätische auf einem zweiten Kegel (oder einem Zylinder im Grenzfall) sind? Die Antwort läßt sich leicht erteilen: Jede Kegelgeodätische ist Gratlinie einer Torse, die einer Kugel Σ umschrieben ist; drehen wir ihre Schmiegeebenen um die Tangenten durch einen festen Winkel γ ; so berühren die Neulagen eine konzentrische Kugel Σ_1 ; sollen diese neuen Ebenen aber die Tangentialebenen eines Kegels sein, so kann dieser, da er Σ_1 längs einer Linie berühren muß, nur ein *Drehkegel* sein. Zum selben Schluß kommt man auch im Grenzfall der Zylindergeodätischen (wo man an Stelle der Kugeln mit Richtkegeln zu operieren hat), sodaß wir sagen können:

Satz 20. *Die Drehkegel sind die einzigen Kegel, deren pseudogeodätische Linien gleichzeitig echte Geodätische auf anderen Kegel- oder Zylinderflächen sind.*

Bei allen Kegelgeodätischen ist bekanntlich die konische Krümmung τ/x der Bogenlänge s proportional, wenn diese von einem Henkelpunkt ($\tau=0$) aus gezählt wird. Im Anschluß an diese Bemerkung wird die Kenntnis der *vollständigen natürlichen Gleichungen* unserer Drehkegel-Pseudogeodätischen interessieren. Unter Verzicht auf die Wiedergabe der etwas langwierigen Rechnung, die von den Parameterdarstellungen (20), (27), bzw. (31) ausgehend nach üblichen Regeln abläuft, seien zunächst die Ausdrücke für die Bogenlänge s und den Krümmungsradius ρ mitgeteilt. Man findet etwa im elliptischen Fall

$$(43) \quad s = \frac{ab \sin m\varphi}{a \cos m\varphi - ne}, \quad \rho = \frac{mab}{n} \cdot \frac{(a - ne \cos m\varphi)^2}{(a \cos m\varphi - ne)^3}.$$

Elimination des Parameters φ aus dem Gleichungspaar liefert

dann die gesuchte natürliche Gleichung in Form einer algebraischen Beziehung 6. Grades zwischen s und ρ von folgender Bauart:

$$(44) \quad \rho = \frac{1}{x} = (s^2 + A^2) (B \pm \sqrt{s^2 + A^2}) / C$$

mit $A = a \sin \gamma$, $B = a \cot \alpha \cos \gamma$, $C = a^2 \cot \alpha \sin \gamma$.

Die zweite Gleichung, die zu (44) hinzutritt und mit dieser die Raumkurve der Gestalt nach vollkommen festlegt, bezieht sich auf die schon erwähnte Eigenschaft der konischen Krümmung und lautet

$$(45) \quad \frac{\tau}{x} = \frac{s}{a};$$

a bedeutet dabei den Leitkugelradius.

Es liegt auf der Hand, daß die vorliegende Darstellung (44) und (45) auch für den hyperbolischen und parabolischen Fall gültig ist. Der Unterschied äußert sich nur im Größenverhältnis der beiden Konstanten A und B : Der elliptische Typ ist durch $A > B$ gekennzeichnet, der parabolische durch $A = B$ und der hyperbolische durch $A < B$.

Auch mit Hilfe dieser Darstellung ließe sich nun der Satz 20 unschwer beweisen.

Abschließend sei kurz auf eine Fragestellung hingewiesen, die in diesem Zusammenhang nahegelegt wird: Gibt es Raumkurven, die *gleichzeitig Pseudogeodätische zweier Kegel* sind? Im Gegensatz zu der entsprechenden Frage für zwei Zylinderflächen, die bereits eine negative Erledigung erfahren hat¹⁷, läßt sich die vorliegende Frage durchaus positiv beantworten, wie schon aus Satz 20 gefolgert werden kann. Den Schlüssel zur vollständigen Lösung dieses Problems bietet Satz 3; über die im Verlauf der Behandlung erzielten bemerkenswerten Ergebnisse wird eine eigene, demnächst in den „Monatsheften für Mathematik“ erscheinende Abhandlung berichten¹⁷.

¹⁷ Zusatz bei der Korrektur. Diese Arbeit ist inzwischen erschienen: „Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind“, *Mh. Math.* 54 (1950). Eine ergänzende Abhandlung, „Raumkurven, die pseudogeodätische Linien eines Zylinders und eines Kegels sind“, befindet sich bei den „Compositio Mathematica“ im Druck.