

Raumkurven, die pseudogeodätische Linien eines Zylinders und eines Kegels sind.

Von

Walter Wunderlich

Wien.

I. Einleitung.

Als „pseudogeodätische Linien“ einer Fläche werden jene auf ihr verlaufenden Kurven bezeichnet, für welche in jedem Punkt die Schmiegeebene einen festen Winkel γ mit der Tangentialebene der Trägerfläche einschließt. Zur Gesamtheit der so erklärten Kurven gehören als Grenzfälle auch die Haupttangenten- oder Asymptotenlinien ($\gamma = 0$) und die echten Geodätischen ($\gamma = \pi/2$) der Fläche.

Im Anschluß an zwei Abhandlungen des Verfassers, die den pseudogeodätischen Linien auf Zylinder-¹⁾ bzw. Kegelflächen²⁾ gewidmet waren, wurden jene bemerkenswerten Raumkurven betrachtet, welche sich als Pseudogeodätische zweier Kegel auffassen lassen³⁾. Unter den zahlreichen Eigenschaften dieser „bikonischen Pseudogeodätischen“ sei nur jene hervorgehoben, wonach jede solche Kurve auch pseudogeodätische Linie einer Drehfläche ist, deren Achse die beiden Kegelspitzen verbindet.

In der vorliegenden Arbeit soll nun der noch ausständige Grenzfall erledigt werden, daß einer der beiden Trägerkegel zu einem Zylinder ausartet. Man könnte diese „zylindro-konischen Pseudogeodätischen“ über die bikonischen herleiten, indem man den Abstand der beiden Kegelspitzen über alle Grenzen wachsen läßt, und man würde auf diese Weise auch zu ihren wichtigsten Eigenschaften gelangen. Hier soll indessen ein direkter Weg der Unter-

¹⁾ Pseudogeodätische Linien auf Zylinderflächen. Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien (im Druck). Vorankündigung im Akad. Anzeiger Nr. 7 (1948).

²⁾ Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen. Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien (im Druck). Vorankündigung im Akad. Anzeiger Nr. 9 (1949).

³⁾ Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind. Mh. Math. 54 (1950).

suchung eingeschlagen werden, der unmittelbar auf eine elementare Parameterdarstellung der fraglichen Kurven führt, welche im bikonischen Fall (im allgemeinen) nicht möglich ist. Demgemäß lassen sich hier auch vielfach weitergehende Aussagen machen; insbesondere lassen sich die Basiskurven des Trägerzylinders bzw. -kegels einfach kennzeichnen: Sie sind bezüglich eines Kreises polarreziprok zu Kurven mit der Polargleichung $r \cdot \operatorname{ch}^k c\varphi = \text{const}$ bzw. zu Pseudotrochoiden. — Der konstruktive Grundgedanke der direkten Behandlung beruht auf der Transformation der zur Untersuchung stehenden Kurven durch das Polarsystem einer Kugel, das einen Zusammenhang mit gewissen Kegel- oder Bündelloxodromen herstellt, deren Gleichungen sich unschwer hinschreiben lassen. Charakteristisch sind vor allem die bei Rotation um die Zylinderachse von diesen Kurven überstrichenen und von ihren Tangenten umhüllten Drehflächen, die paarweise zentrisch-ähnlich ausfallen und *Clairautsche Multiplikatrizen* zu Meridianen haben. Die auf den hierzu polaren Drehflächen verlaufenden zylindro-konischen Pseudogeodätischen stellen auch für diese Flächen pseudogeodätische Linien dar, und die durch Rotation des Tangentensystems einer solchen Kurve erzeugte Strahlkongruenz ist unter anderem durch konstanten Brennebenenwinkel ausgezeichnet.

Unter den zylindro-konischen Pseudogeodätischen finden sich speziell die *zylindro-konischen Spiralen*, die als Bahnkurven der eingliedrigen Ähnlichkeitsgruppe des Raumes bekannt sind, ferner die *Kettenlinien auf Drehzylindern* mit lotrechter Achse und schließlich die *geodätischen Linien des Drehparaboloids*.

II. Darstellung der zu den zylindro-konischen Pseudogeodätischen polarreziproken Kegelloxodromen.

Sei k eine zylindro-konische Pseudogeodätische — deren Existenz wir vorwegnehmen — und seien γ_1, γ_2 die konstanten Winkel, die die Schmiegebenen von k in jedem Punkt mit dem Trägerzylinder Γ_1 bzw. dem Trägerkegel Γ_2 bilden. Für die analytische Darstellung bedienen wir uns eines Normalkoordinatensystems x, y, z , dessen z -Achse in die Erzeugendenrichtung des Zylinders fallen und dessen Ursprung O sich mit der Kegelspitze decken möge. Gelegentlich wird ein Koordinatentripel zu einem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ zusammengefaßt.

Üben wir die *Polarität* $\mathfrak{P}$ bezüglich der Einheitskugel um O aus, so wird aus der Tangentenschar von k das Tangentensystem der

polarreziproken Kurve l , und dieses besteht aus Treffgeraden der in der Ebene $\pi = xy$ liegenden Polarkurve g_1 des Zylinders Γ_1 . Der zu einer Tangente t von k gehörigen Schmiegeebene σ , bzw. Zylindertangentialebene τ_1 entsprechen als Pole der Berührungspunkt S der reziproken Polare $\bar{t}$ mit l , bzw. deren Treffpunkt T_1 mit g_1 . Nun ist zufolge einer elementaren Eigenschaft der Kugelpolarität $\ast SOT_1 = \ast \sigma\tau_1 = \gamma_1$, sodaß dem Kegel $\Lambda = O\Gamma$ die folgende kennzeichnende Eigenschaft zukommt (Abb. 1): Die zwischen den Berührungserzeugenden und der festen Ebene π gelegenen Sektoren der Tangentialebenen des Kegels Λ weisen den konstanten Winkel γ_1 (oder $\pi - \gamma_1$) auf. Λ kann daher als „Schleppkegel“ des Strahlbüschels $(O\pi)$ angesprochen werden; sein Schnitt mit einer konzentrischen Kugel ist eine *sphärische Großkreistraktria*, seine Schnitte mit den zu π parallelen Ebenen sind *Loxodromen*, d.h. Isogonaltrajektorien seiner Erzeugenden-schar.

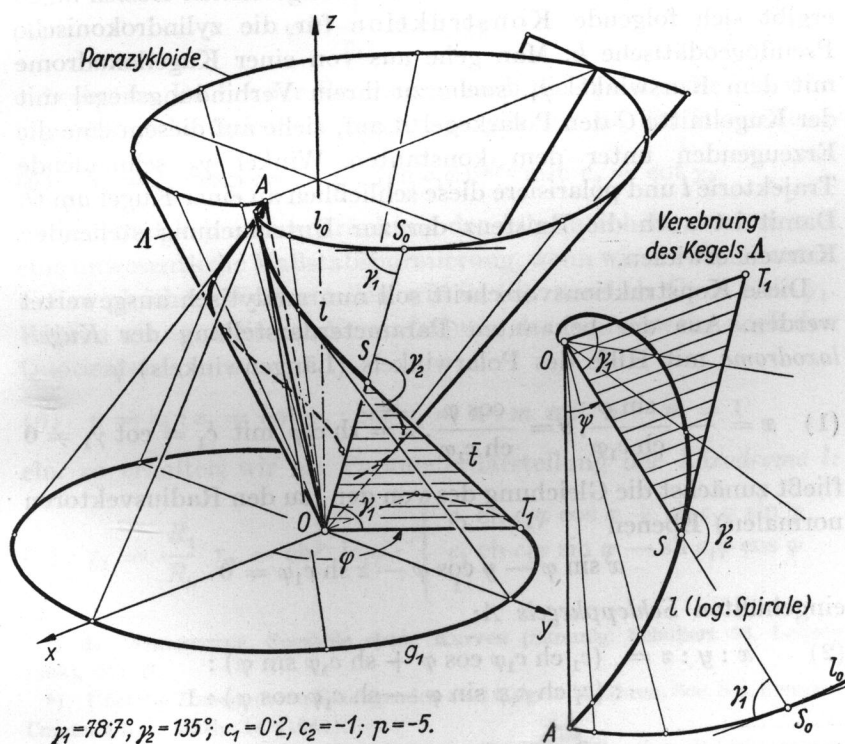


Abb. 1: Loxodrome l auf dem Schleppkegel des Strahlbüschels xy .

Der im Bündel O zu Λ gehörige „Polarkegel“ Λ^* — dessen Erzeugenden normal sind zu den Tangentialebenen von Λ und

umgekehrt — zeigt die entsprechende duale Eigenschaft: Λ^* durchsetzt das Ebenenbüschel mit der Achse z unter dem konstanten Schnittwinkel γ_1 ; sein Schnitt mit einer konzentrischen Kugel ist mithin die wohlbekannte, zum Kurswinkel γ_1 gehörige *Kugelloxodrome*. Beachten wir, daß die Erzeugenden von Λ^* zu den Tangenten von k parallel sind, so erkennen wir auf Grund rein geometrischer Überlegungen die schon früher¹⁾ mittels Rechnung bewiesene Tatsache, daß das *sphärische Tangentenbild jeder pseudogeodätischen Linie eines Zylinders eine Kugelloxodrome ist*⁴⁾.

Aus der Forderung, daß unsere Kurve k auch Pseudogeodätische eines von O ausstrahlenden Kegels Γ_2 sein soll, folgt nun, wie leicht einzusehen ist, daß die Polarreziproke l eine *Loxodrome* des Kegels Λ sein muß: Ist τ_2 die zur Tangente t von k gehörige Tangentialebene von Γ_2 , so entspricht ihr als Pol der Fernpunkt T_2 von $\bar{t}$ und es gilt $\angle SOT_2 = \angle \sigma\tau_2 = \gamma_2$.

Auf Grund der Umkehrbarkeit der festgestellten Beziehungen ergibt sich folgende Konstruktion für die zylindrokonische Pseudogeodätische k : Man gehe aus von einer Kugelloxodrome mit dem Kurswinkel γ_1 , suche zu ihrem Verbindungskegel mit der Kugelmittle O den Polarkegel Λ auf, ziehe auf diesem eine die Erzeugenden unter dem konstanten Winkel γ_2 schneidende Trajektorie l und polarisiere diese schließlich an einer Kugel um O . Damit ist auch die Existenz der zur Untersuchung stehenden Kurven erwiesen.

Diese Konstruktionsvorschrift soll nun analytisch ausgewertet werden. Aus der bekannten Parameterdarstellung der *Kugelloxodrome* mit Hilfe des Polarwinkels (Längenwinkels) φ

$$(1) \quad x = -\frac{\sin \varphi}{\operatorname{ch} c_1 \varphi}, y = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{ch} c_1 \varphi}, z = \operatorname{th} c_1 \varphi \text{ mit } c_1 = \cot \gamma_1 \neq 0$$

fließt zunächst die Gleichung des von den (zu den Radiusvektoren normalen) Ebenen

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi - z \operatorname{sh} c_1 \varphi = 0$$

eingehüllten *Schleppkegels* Λ :

$$(2) \quad x : y : z = (c_1 \operatorname{ch} c_1 \varphi \cos \varphi + \operatorname{sh} c_1 \varphi \sin \varphi) : \\ : (c_1 \operatorname{ch} c_1 \varphi \sin \varphi - \operatorname{sh} c_1 \varphi \cos \varphi) : 1.$$

⁴⁾ Hieraus folgt auch unmittelbar die Nichtexistenz von — zunächst auch denkbaren — „bizylindrischen Pseudogeodätischen“, denn der die beiden Pole der Kugelloxodrome verbindende Durchmesser legt eindeutig die Erzeugendenrichtung des Trägerzylinders fest.

Aus dieser Darstellung lassen sich sofort die Schichtenlinien $z = \text{const}$ des Kegels ablesen: Es handelt sich um *Parazykloiden*, jene merkwürdigen Kurven, die bei der Rollung eines komplexen Kreises auf einem reellen als Bahnen von Umfangspunkten entstehen⁵⁾. Auf die bisher anscheinend übersehene Identität dieser Kurven mit den ebenen Bündelloxodromen hat der Verfasser erst kürzlich hingewiesen⁶⁾.

Bei der Verebnung des Schleppkegels Δ werden aus den Schichtenlinien *logarithmische Spiralen*. Bezeichnen wir mit R den Ursprungsabstand eines Mantelpunktes und mit φ den verebneten Mantelwinkel, gezählt von der Rückkehrerzeugenden $\varphi = 0$ aus, so gilt für die Punkte $S_0(x_0)$ der Schichtenlinie $z_0 = 1$:

$$(3) \quad R_0 = |x_0| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{1 + c_1^2} \cdot \text{ch } c_1 \varphi \\ = \sqrt{1 + c_1^2} \cdot \exp c_1 \varphi,$$

woraus wir den Mantelwinkel

$$(4) \quad \varphi = \frac{1}{c_1} \ln \text{ch } c_1 \varphi$$

entnehmen. Da bei der Verebnung auch die Loxodrome l in eine logarithmische Spirale übergeht, so gilt für sie die Darstellung

$$(5) \quad R_1 = C \cdot \exp c_2 \varphi = C \cdot (\text{ch } c_1 \varphi)^{c_2/c_1} \text{ mit } c_2 = \cot \gamma_2.$$

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern nur eine unwesentliche Maßstabsnormierung, wenn wir der Konstanten C den gleichen Wert erteilen wie in (3), nämlich $C_1 = 1/\sin \gamma_1$. Führen wir zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise noch den Quotienten

$$(6) \quad p = c_2 : c_1 = \cot \gamma_2 : \cot \gamma_1 = n : m \text{ mit } n - m = 1$$

ein, so erhalten wir als Parameterdarstellung der *Loxodrome* l :

$$(7) \quad \xi_1 = \frac{R_1}{R_0} \xi_0 = \text{ch}^{p-1} c_1 \varphi \cdot \begin{cases} c_1 \text{ch } c_1 \varphi \cos \varphi + \text{sh } c_1 \varphi \sin \varphi \\ c_1 \text{ch } c_1 \varphi \sin \varphi - \text{sh } c_1 \varphi \cos \varphi \\ 1 \end{cases}$$

⁵⁾ H. WIELEITNER, Spezielle ebene Kurven (Sammlg. Schubert 56, Leipzig 1908), 211 ff.

⁶⁾ Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren. Soc. Sci. Fennica, Comm. Phys. Math. 14 (1949).

In der durch die euklidische Metrik des Bündels O in einer Schichtenebene $z = \text{const}$ induzierten elliptisch-nichteuklidischen Geometrie CAYLEY-KLEINScher Prägung läßt sich die vorliegende Parazykloide offenbar als *Traktrix einer Geraden* auffassen, nämlich der euklidischen Ferngeraden der Ebene.

Ein Vergleich der Koordinate z_1 mit (5) führt auf die Relation

$$(8) \quad R_1 = C_1 \cdot z_1^n \quad \text{mit} \quad n = \frac{p}{p-1},$$

die als Gleichung einer *Drehfläche* Φ_1 mit der Achse z aufgefaßt werden kann, auf welcher unsere Loxodrome l verläuft. Mit Benützung der durch $z = R \cos \theta$ erklärten „Poldistanz“ θ nimmt die Flächengleichung die Form

$$(9) \quad R \cos^p \theta = \text{const}$$

an. Die durch dieselbe Polargleichung beschriebene Meridiankurve der Drehfläche ist eine *Clairautsche Multiplikatrix* ⁷⁾. Die Abhängigkeit ihrer Gestalt vom Wert des charakteristischen Exponenten p ist aus Abb. 2 ersichtlich. Zu gegengleichen Werten von p gehören inverse Formen. Hinsichtlich ausgezeichneter Sonderfälle siehe Abschnitt V.

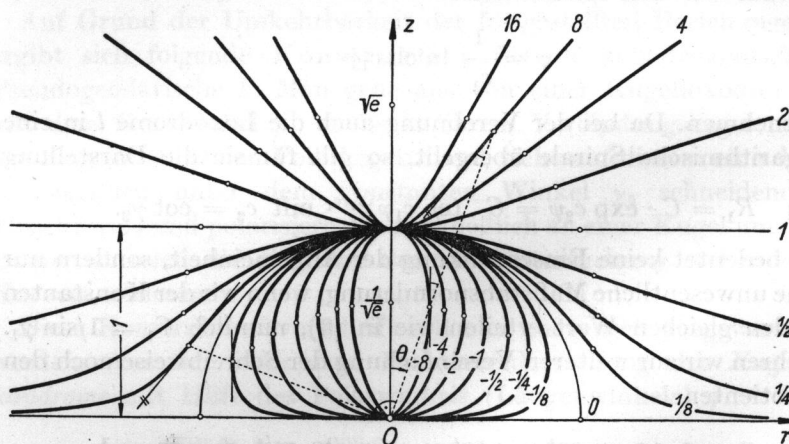


Abb. 2: Gestaltliches Aussehen der Drehflächen Φ in Abhängigkeit vom Quotienten $p = \text{tg } \gamma_1 : \text{tg } \gamma_2$. Die Meridiankurven sind Multiplikatrizen von Clairaut mit der Polargleichung $R \cos^p \theta = 1$.

Durch Angabe des Exponenten p ist nur das Verhältnis $\text{tg } \gamma_1 : \text{tg } \gamma_2$ festgelegt, der Wert des Loxodromenwinkels γ_2 bleibt jedoch noch unbestimmt. Auf einer Drehfläche Φ liegen daher ∞^1 Drehscharen unserer Bündelloxodromen l . Es gilt mithin

Satz 1. Sämtliche auf einer Drehfläche $x^2 + y^2 + z^2 = Cz^{2n}$ ($n \neq 0$) verlaufenden Loxodromen des Ursprungsbündels

⁷⁾ G. LORIA - F. SCHÜTTE, Spezielle algebraische und transzendente Kurven (Leipzig u. Berlin 1910), Bd. I, 384 ff.

werden aus dem Ursprung auf eine Bildebene $z = \text{const}$ als Parazykloiden projiziert. Ihre Darstellung ist im wesentlichen durch das Gleichungssystem (7) mit $p = n / (n - 1)$ gegeben; der Loxodromenwinkel beträgt dabei $\text{arccot } c_1 p$.

Die Kenntnis ihrer einfachen Zentralprojektion und ihrer Trägerflächen Φ vermittelt in jedem Fall eine anschauliche Vorstellung vom Verlauf unserer Loxodromen. Dieselben besitzen stets eine Spitze ($\varphi = 0$) und geben auf Grund ihres verschiedenartigen asymptotischen Verhaltens für $\varphi \rightarrow \pm \infty$ Anlaß zur Unterscheidung von drei Haupttypen:

- $p < 0$. Der reelle Zug der Loxodrome verläuft ganz im Endlichen und nähert sich asymptotisch in zwei gegenläufigen Windungen dem Ursprung (Abb. 1).
- $0 < p < 1$. Die Loxodrome nähert sich asymptotisch der xy -Ebene und entfernt sich dabei nach Art zweier gegenläufigen logarithmischen Spiralen vom Ursprung.
- $p > 1$. Die Loxodrome entfernt sich in gegenläufigen, immer größer werdenden Windungen und nähert sich der Fernebene.

Hinsichtlich der ausgeschalteten Grenzfälle vgl. Abschnitt V.

III. Rotationskongruenzen aus Loxodromentangenten.

Lassen wir die durch (7) dargestellte Loxodrome l eine Drehung um die z -Achse ausführen, so überstreicht sie dabei die Drehfläche Φ_1 , während ihr Tangentensystem eine gewisse Rotationskongruenz $\mathfrak{L}$ erzeugt, für welche Φ_1 den einen Brennflächenmantel abgibt. Wir beweisen nun den für diese Strahlkongruenz grundlegenden

Satz 2. Auf sämtlichen Strahlen der Rotationskongruenz $\mathfrak{L}$ werden von irgend zwei zur Brennfläche Φ_1 bezüglich des Ursprungs zentrisch-ähnlichen Flächen Strecken abgeschnitten, die aus dem Ursprung unter konstantem Gesichtswinkel erscheinen.

Zum Beweis bilden wir zunächst durch Ableitung von (7) nach φ den Tangentenvektor der Loxodrome l ; er erweist sich als proportional zu

$$(10) \quad \mathbf{t} = \begin{cases} c_3 \operatorname{ch} c_1 \varphi \cos \varphi + \operatorname{sh} c_1 \varphi \sin \varphi \\ c_3 \operatorname{ch} c_1 \varphi \sin \varphi - \operatorname{sh} c_1 \varphi \cos \varphi \\ 1 \end{cases} \quad \text{mit } c_3 = \cot (\gamma_1 - \gamma_2).$$

Tragen wir nunmehr auf den Tangenten der Loxodrome von den Berührungspunkten $S(\mathfrak{x}_1)$ aus im gleichen Sinn Strecken ST ab, deren Höhendifferenz zu z_1 proportional ist, so finden wir für den Ort der Endpunkte T eine Darstellung

$$(11) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + h \operatorname{ch}^{p-1} c_1 \varphi \cdot \mathbf{t},$$

die, ausgerechnet, eine zu (7) weitgehend analoge Bauart zeigt. Es handelt sich um eine Kurve, die auf einer zu Φ_1 ähnlichen

Drehfläche Φ verläuft, denn es gilt entsprechend (8) die Beziehung

$$(12) \quad R = C \cdot z^n, \text{ wobei } C = (1+h)^{-n} \sqrt{(1+h)^2 + (c_1+c_3h)^2}.$$

Beachten wir ferner, daß das innere Produkt der zu zwei Werten h und h' gehörigen Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ proportional zu $\text{ch}^{2p}c_1\varphi$ ist, während ihre Beträge R und R' zu $\text{ch}^p c_1\varphi$ proportional sind, so fällt der von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ gebildete Winkel SOT tatsächlich unabhängig von φ aus, womit Satz 2 bewiesen ist.

Im besonderen werden auf den Kongruenzstrahlen auch von einer einzigen Fläche Φ Strecken abgeschnitten, die aus O unter konstanten Winkel gesehen werden; h und h' sind dann so zu wählen, daß sie über (12) denselben Wert C liefern. Lassen wir überdies h und h' zusammenrücken, ermitteln wir also die stationären Werte von C , so finden wir Flächen, die von allen Kongruenzstrahlen berührt werden, also die *Brennflächen* von $\mathfrak{L}$. Die Bedingung $dC/dh = 0$ führt in der Tat auf eine quadratische Gleichung für h

$$m(1+c_3^2) \cdot h^2 + [2m + (m+n)c_1c_3 - c_3^2] \cdot h + (m+nc_1^2 - c_1c_3) = 0,$$

deren absolutes Glied verschwindet, sodaß sich der Wurzel $h_1=0$ entsprechend die Brennfläche Φ_1 wiederfindet. Als zweite Lösung erhalten wir nach einigen Umformungen

$$(13) \quad h_2 = \frac{(p-1)c_3^2 - (p+1)c_1c_3 - 2}{1+c_3^2} = \frac{\sin \gamma_2 \cos \gamma_2}{\sin \gamma_1 \cos \gamma_1} - 1;$$

hierzu gehört gemäß (11) die Kurve

$$(14) \quad \mathfrak{x}_2 = q \text{ch}^{p-1}c_1\varphi \begin{cases} \frac{1}{c_2} \text{ch } c_1\varphi \cos \varphi + \text{sh } c_1\varphi \sin \varphi \\ \frac{1}{c_2} \text{ch } c_1\varphi \sin \varphi - \text{sh } c_1\varphi \cos \varphi \\ 1 \end{cases} \quad \text{mit } q = \sin 2\gamma_2 / \sin 2\gamma_1,$$

längs welcher die Drehfläche Φ_2

$$(15) \quad R_2 = C_2 z_2^n \text{ mit } C_2 = q^{-m} \sec \gamma_2$$

von der Tangentenfläche der Loxodrome l berührt wird⁸⁾. Φ_2 gibt die zweite Brennfläche der Kongruenz $\mathfrak{L}$ ab; der lineare Ähnlichkeitsfaktor für den Übergang von Φ_1 zu Φ_2 beträgt mit Rücksicht auf $C_1 = 1/\sin \gamma_1$

$$(16) \quad \lambda = \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{1/m} = \frac{\sin \gamma_2 \cos^p \gamma_2}{\sin^p \gamma_1 \cos \gamma_1}.$$

⁸⁾ Die Zentralprojektion der Berührungskurve aus dem Ursprung auf eine Ebene $z = \text{const}$ ist eine *Pseudotrochoide*⁵⁾.

Die Gleichberechtigung der beiden Brennflächen Φ_1 und Φ_2 reicht jedoch noch weiter und ist eine vollständige: Entsprechend dem Loxodromenwinkel $\gamma_2 = \angle r_1 t$ erweist sich auch der Winkel $\delta_2 = \angle r_2 t$ als unveränderlich; dies folgt prinzipiell durch Spezialisierung von Satz 2, wenn wir $h = h_2$ und $h' = \infty$ setzen, doch führt auch die direkte Auswertung schnell zum Festwert $\delta_2 = 90^\circ - \gamma_1$. — Wir können auch folgendermaßen schließen: Gehen wir statt von den ursprünglichen Winkelwerten γ_1 und γ_2 von den Komplementen $\delta_1 = 90^\circ - \gamma_2$ und $\delta_2 = 90^\circ - \gamma_1$ aus, so gelangen wir gemäß (6) zunächst zu demselben charakteristischen Exponenten p und zu demselben System von Drehflächen Φ ; zeichnen wir hierauf unter diesen durch Wahl der Konstanten $C'_1 = C_2$ die Fläche Φ_2 aus und betrachten wir die auf ihr verlaufenden Bündelloxodromen mit dem Schnittwinkel δ_2 , so stimmt deren Tangentenkongruenz $\mathfrak{L}'$ mit unserer Kongruenz $\mathfrak{L}$ überein, denn aus (16) folgt $\lambda' = 1/\lambda$ und $C'_2 = C_1$, sodaß Φ_1 als zweite Brennfläche auftritt. Die aus (14) ersichtliche Zuordnung $z_2 = qz_1$ zusammengehöriger Parallelkreise von Φ_1 und Φ_2 ist wegen $q' = 1/q$ erhalten geblieben.

Aus $\angle r_1 t = \gamma_2$ und $\angle r_2 t = \delta_2$ folgt $\angle r_1 r_2 = \gamma_2 - \delta_2$: Die Brennstrecke aller Kongruenzstrahlen erscheint aus O unter dem konstanten Gesichtswinkel $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 - 90^\circ$. — Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 3. Sämtliche Tangenten der ∞^1 Loxodromen, die auf einer Drehfläche Φ_1 mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = Cz^{2n}$ verlaufen und die Strahlen des Ursprungsbündels unter dem festen Winkel γ schneiden, berühren eine zweite, gleichartige Fläche Φ_2 , die zu Φ_1 bezüglich des Ursprungs zentrisch-ähnlich liegt. Sie bilden auch die Tangenten einer Drehschar von Loxodromen auf Φ_2 , die das Ursprungsbündel unter einem festen Winkel δ durchsetzen. Die von den Berührungspunkten begrenzten Tangentenstrecken erscheinen aus dem Ursprung unter dem konstanten Winkel $\gamma - \delta$. Die Winkel sind durch die Relation $\cot \gamma \cot \delta = n/(n-1) = p$ verknüpft und legen den linearen Ähnlichkeitsfaktor zwischen Φ_1 und Φ_2 durch $\lambda = \sin \gamma \cos^p \gamma / \sin \delta \cos^p \delta$ fest.

Da sich auch bei festem n die Winkel γ und δ so bestimmen lassen, daß das Ähnlichkeitsverhältnis λ einen vorgelegten Wert annimmt, so gilt auch umgekehrt:

Satz 4. Die gemeinsamen Tangenten zweier bezüglich des Ursprungs zentrisch-ähnlicher Drehflächen $(x^2 + y^2 + z^2)z^t = \text{const}$ bilden oder enthalten eine zweifach ausgedehnte Man-

nigfaltigkeit von Strahlen, deren Berührungsstrecken aus dem Ursprung unter einem unveränderlichen Gesichtswinkel erscheinen. Aus ihnen lassen sich Torsen aufbauen, deren Gratlinien Loxodromen des vom Ursprung ausgehenden Strahlbündels sind.

Lassen wir im besonderen die Flächen Φ_1 und Φ_2 zusammenrücken, indem wir $\gamma = \delta$ machen (was $\lambda = 1$ und $q = 1$ nach sich zieht), so werden aus den gemeinsamen Tangenten die Haupttangente der Fläche und wir erhalten eine Aussage über ihre Asymptotenlinien:

Satz 5. Die Asymptotenlinien der Drehflächen $x^2 + y^2 + z^2 = Cz^{2n}$ sind Loxodromen des Ursprungsbündels, dessen Strahlen sie unter dem festen Winkel $\gamma = \arctg \sqrt{1 - n^{-1}}$ durchsetzen.

IV. Die zylindro-konischen Pseudogeodätischen.

Nach ausreichenden Kenntnissen über die Kegelloxodromen l wollen wir nun gemäß Abschnitt II durch Ausübung der Polarität $\mathfrak{P}$ an der Einheitskugel zu den zylindro-konischen Pseudogeodätischen k übergehen. Die Punkte von k entsprechen dabei den Schmiegeebenen von l . Für den in (7) festgehaltenen Loxodromenpunkt $S(x_1)$ wird nun die Schmiegeebene von dem unter (10) angeführten Tangentenvektor t und dem zu seiner Ableitung proportionalen Vektor

$$(17) \quad t' = \begin{cases} c_2 \operatorname{sh} c_1 \varphi \cos \varphi - \operatorname{ch} c_1 \varphi \sin \varphi \\ c_2 \operatorname{sh} c_1 \varphi \sin \varphi + \operatorname{ch} c_1 \varphi \cos \varphi \\ 0 \end{cases}$$

aufgespannt und somit durch die Determinantengleichung $|\xi, t, t'| = |\xi_1, t, t'|$ beschrieben, d.i. ausgerechnet

$$(18) \quad -(c_2 \operatorname{sh} c_1 \varphi \sin \varphi + \operatorname{ch} c_1 \varphi \cos \varphi)x + (c_2 \operatorname{sh} c_1 \varphi \cos \varphi - \operatorname{ch} c_1 \varphi \sin \varphi)y + (c_2 \operatorname{sh}^2 c_1 \varphi + c_3 \operatorname{ch}^2 c_1 \varphi)z = (c_3 - c_1) \operatorname{ch}^{p+1} c_1 \varphi.$$

Vergleich mit der Polarform $Xx + Yy + Zz = 1$ der Einheitskugel liefert dann die Parameterdarstellung der zylindro-konischen Pseudogeodätischen k :

$$(19) \quad \xi = \frac{a}{\operatorname{ch}^{p+1} c_1 \varphi} \begin{cases} \operatorname{ch} c_1 \varphi \cos \varphi + c_2 \operatorname{sh} c_1 \varphi \sin \varphi \\ \operatorname{ch} c_1 \varphi \sin \varphi - c_2 \operatorname{sh} c_1 \varphi \cos \varphi \\ -c_3 \operatorname{ch}^2 c_1 \varphi - c_2 \operatorname{sh}^2 c_1 \varphi \end{cases}$$

mit $c_1 = \cot \gamma_1$, $c_2 = \cot \gamma_2$, $c_3 = \cot(\gamma_1 - \gamma_2)$
und $a = 1/(c_1 - c_3)$, $p = c_2/c_1$.

Der Trägerzylinder Γ_1 von k — beschrieben durch die ersten zwei Koordinaten in (19) — ist das Polargebilde der in der xy -Ebene

gelegenen Spurkurve g_1 der Tangentenfläche von l . Die Gleichung $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 t - z_1 t$ von g_1 schreibt sich mit Rücksicht auf (7) und (10) in Polarkoordinaten

$$(20) \quad r = (c_1 - c_3) \operatorname{ch}^p c_1 \varphi.$$

Diese Kurve und die Basiskurve von Γ_1 sind polarreziprok bezüglich des Einheitskreises um den Nullpunkt.

Der Trägerkegel Γ_2 von k ist polar zur Fernkurve g_2 der Tangentenfläche von l , mithin kongruent zum „Polarkegel“ des Tangentenrichtkegels von l im Sinne der euklidischen Bündelgeometrie. Nun ist aber die in der Schichtenebene $z = 1$ gelegene Spurkurve des vom Ursprung ausstrahlenden Richtkegels zufolge (10) die *Pseudotrochoide*

$$(21) \quad \begin{aligned} x &= c_3 \operatorname{ch} c_1 \varphi \cos \varphi + \operatorname{sh} c_1 \varphi \sin \varphi \\ y &= c_3 \operatorname{ch} c_1 \varphi \sin \varphi - \operatorname{sh} c_1 \varphi \cos \varphi, \end{aligned}$$

und die in der gleichen Ebene verlaufende Schichtenlinie von Γ_2 ist zu dieser Kurve polarreziprok bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Satz 6. Jede zylindro-konische Pseudogeodätische (mit den Schmiegeebenenneigungen γ_1, γ_2) wird in einem geeigneten Achsenkreuz durch Gleichung (19) dargestellt. Die Basis des Zylinders ist bezüglich eines Kreises polarreziprok zur Doppelspirale $r = \operatorname{ch}^p c_1 \varphi$, die Basis des Kegels polarreziprok zur Pseudotrochoide (21).

Die Trägerfläche Φ_1 und die ähnliche Tangentenstützfläche Φ_2 der Loxodrome l werden durch die Polarität $\mathfrak{P}$ wiederum in ein bezüglich O zentrisch-ähnliches *Drehflächenpaar* Ψ_1, Ψ_2 verwandelt, das die analoge Rolle für die Pseudogeodätische k übernimmt; jetzt ist jedoch Ψ_2 die Trägerfläche von k und Ψ_1 die Tangentenstützfläche, während das in (16) festgehaltene Ähnlichkeitsverhältnis λ dasselbe bleibt. Die Gleichung dieser Drehflächen Ψ schreibt sich zufolge (8) in Ebenenkoordinaten u, v, w (die als Koeffizienten der in der Gestalt $ux + vy + wz = 1$ angenommenen Ebenengleichung erklärt sind)

$$(22) \quad u^2 + v^2 + w^2 = Cw^{2n}.$$

Ihre Gleichung in Punktkoordinaten (Zylinderkoordinaten r, z) läßt sich im allgemeinen nur in Parameterform angeben und lautet im Anschluß an (9) und bei Unterdrückung eines konstanten Faktors

$$(23) \quad r = \sin \theta \cos^p \theta, \quad z = \cos^{p-1} \theta (\cos^2 \theta - n).$$

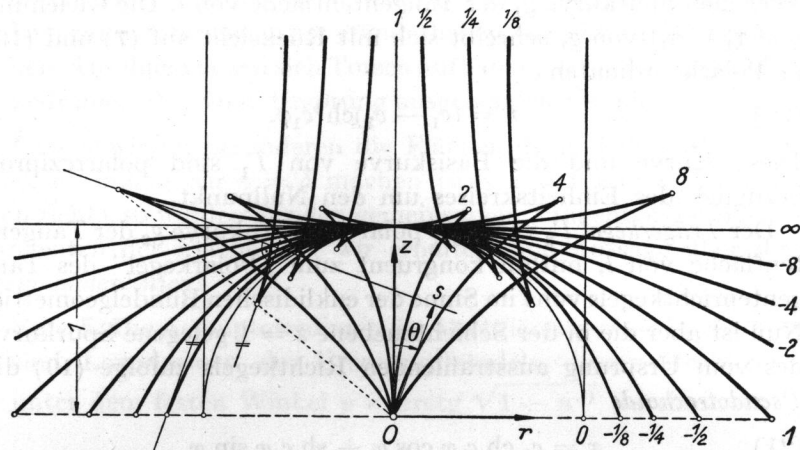


Abb. 3: Gestaltliches Aussehen der Drehflächen Ψ in Abhängigkeit vom Quotienten $p = \operatorname{tg} \gamma_1 : \operatorname{tg} \gamma_2$. Die Meridiankurven werden in polaren Strahlkoordinaten durch die Gleichung $s \cos p \theta = 1$ beschrieben. (Vgl. die polarreziproke Abb. 2).

Die Gestalt dieser Drehflächen in Abhängigkeit vom Exponenten p ist aus Abb. 3 ersichtlich. — Im Zusammenhang damit erkennen wir auch für die zylindronischen Pseudogeodätischen drei Haupttypen, die sich durch ihr asymptotisches Verhalten für $p \rightarrow \pm \infty$ unterscheiden und den in Abschnitt II angeführten Typen der Schleppkegelloxodromen entsprechen:

- $p < 0$. Die Kurve entfernt sich in gegenläufigen, immer größer werdenden Windungen und nähert sich der Fernebene.
- $0 < p < 1$. Die Kurve strebt gegen den Fernpunkt der z -Achse, diese in immer enger werdenden, gegenläufigen Windungen umschlingend.
- $p > 1$. Der reelle Zug der Kurve verläuft ganz im Endlichen und nähert sich in gegenläufigen Windungen asymptotisch dem Ursprung.

Die zu $\mathfrak{L}$ polare Strahlkongruenz $\mathfrak{K}$ besitzt Ψ_1 und Ψ_2 zu Brennflächen; der in Satz 3 festgehaltenen Eigenschaft von $\mathfrak{L}$ entspricht bei $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft *festen Brennebenenwinkels*. Das bedeutet aber, daß die Kurve k eine pseudogeodätische Linie der Drehfläche Ψ_2 darstellt; die Schmiegebenenneigung beträgt $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 - 90^\circ$.

Satz 7. Jede Raumkurve, welche pseudogeodätische Linie eines Zylinders und eines Kegels ist, ist auch Pseudogeodätische einer Drehfläche, deren Achse die Richtung der Zylindererzeugenden hat und durch die Kegelspitze geht; ihr Meridian ist die Polarreziproke einer Clairautschen Multiplikatrix bezüglich eines konzentrischen Kreises. Die Summe der drei Schmiegebenenneigungen ergibt bei geeigneter Vorzeichenfestsetzung einen rechten Winkel.

Die drei Flächen schneiden einander längs der gemeinsamen

Pseudogeodätischen natürlich unter durchwegs konstanten Winkeln. Auf Grund des dualen Seitenstückes zu Satz 2 gilt

Satz 8. Jede mit dem begleitenden Dreikant einer zylindro-konischen Pseudogeodätischen starr verbundene Ebene, die die Tangente enthält, bleibt während der Bewegung des Dreikants längs der Kurve in ständiger Berührung mit einer Drehfläche, die zentrisch-ähnlich zu jener ist, auf der die Kurve verläuft.

Dual zu den Sätzen 2 und 4 haben wir schließlich den

Satz 9. Die gemeinsamen Tangenten zweier beliebiger Drehflächen der Ähnlichkeitsschar $(u^2 + v^2 + w^2)w^k = \text{const}$ bilden oder enthalten eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Strahlen, deren Brennebenen (Berührungsebenen) einen festen Winkel einschließen und aus welchen auch an alle übrigen Scharflächen Tangentialebenen gehen, die feste Winkel miteinander bilden. Die Gratlinien der aus solchen Strahlen aufgebauten Torsen sind pseudogeodätische Linien auf den Drehflächen und überdies auf Zylinderflächen parallel zur z -Achse und auf Kegelflächen, die vom Ursprung ausstrahlen.

Da die Haupttangente polarer Flächen einander entsprechen, so folgt aus Satz 5 der duale

Satz 10. Die Asymptotenlinien der Drehflächen $u^2 + v^2 + w^2 = Cw^{2n}$ sind Pseudogeodätische auf den hindurchgehenden z -parallelen Zylindern sowie auf den Verbindungskegeln mit dem Ursprung. Der Schnitt einer solchen Drehfläche mit den genannten Zylinder- und Kegelflächen erfolgt längs der Asymptotenlinien unter den festen Winkeln $\gamma_1 = \arctg \sqrt{1 - n^{-1}}$ bzw. $\gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1$.

V. Sonderfälle.

Während die zylindro-konischen Pseudogeodätischen selbst ausnahmslos transzendent sind, können die sie tragenden Drehflächen auch *algebraisch* ausfallen, nämlich für *rationale* Werte von $p = \tg \gamma_1 : \tg \gamma_2$. Schreiben wir diesen Quotienten $p = n : m$ als gekürzten Bruch $\nu : \mu$ an (μ, ν ganz und teilerfremd), dann finden wir für die Multiplikatrix (8) — und für die von ihr erzeugten Drehflächen Φ , auf der die Loxodromen l liegen — die Ordnung $M = \max(|\mu|, |\nu|, |\mu - \nu|)$, und die Klasse $N = |\mu| + \max(|\mu|, |\nu|)$, vorausgesetzt daß μ und ν ungerade sind; andernfalls sind die Werte zu verdoppeln. Für die polarreziproken Drehflächen Ψ vertauschen die Charaktere M und N ihre Bedeutung.

Die folgende Tabelle umfaßt die einfachsten algebraischen Fälle bis $M = 4$:

p	m	n	M	N	Meridiankurve von Φ (Multiplikatrix)
0	— 1	0	2	2	Kreis um O
∞	0	1	2	2	Geradenpaar durch O
— 1	— 1/2	1/2	2	2	Kreis durch O
3	1/2	3/2	3	4	Kubische Duplikatrix von Longchamps
1/3	— 3/2	— 1/2	3	6	
— 3	— 1/4	3/4	4	4	Einblatt (Kepler-Oval)
— 1/3	— 3/4	1/4	4	6	Cartesisches Oval mit Flachpunkt
2	1	2	4	6	Kampyla des Eudoxus
1/2	— 2	— 1	4	8	

Einzelne Fälle dieser Zusammenstellung sollen anschließend noch kurz gekennzeichnet werden.

1) $p = 0$. *Pseudogeodätische Linien des Drehzylinders.*

Mit $c_2 = p = 0$ vereinfacht sich das Gleichungssystem (19) der Pseudogeodätischen k zu

$$(24) \quad X = a \cos \varphi, \quad Y = a \sin \varphi, \quad Z = \frac{a}{c_1} \operatorname{ch} c_1 \varphi.$$

k verläuft mithin auf einem Drehzylinder $\Gamma_1 = \Psi_2$ und geht bei dessen Verebnung in eine Kettenlinie über. Daß sich die Pseudogeodätischen des Drehzylinders bei lotrechter Achse als Gleichgewichtsfiguren homogener, dem Zylinder reibungslos anliegender Ketten deuten lassen, wurde bereits a.a.O.¹⁾ festgestellt, wo diese Linien eingehend untersucht wurden. Jede dieser Kurven k ist wegen $\gamma_2 = \pi/2$ echte Geodätische des Kegels $\Gamma_2 = Ok$ und ihre Tangenten und Schmiegeebenen berühren eine feste Kugel Ψ_1 , und zwar in den Punkten einer Großkreistratrix, die mit der zu k polaren Bündelloxodrome l identifiziert werden kann. (Die sonst vorhandene Ähnlichkeit zwischen Ψ_1 und Ψ_2 ist hier durch Ausartung gestört.)

2) $p = \infty$. *Zylindro-konische Spiralen.*

Dieser Fall verlangt wegen der bisher ausgeschlossenen Annahme $\gamma_1 = \pi/2$ ($c_1 = 0$) eine besondere Behandlung. Die in Abschnitt II als sphärisches Tangentenbild einer Zylinderpseudogeodätischen erhaltene Kugelloxodrome ist im vorliegenden Grenzfall einer echten Zylindergeodätischen (Böschungslinie) in einen Kreis ausgeartet; der die polare Bündelloxodrome l tragende „Schleppkegel“ ist mithin ein Drehkegel und l selbst die wohlbekannte „zylindro-konische Spirale“, die als Bahnkurve der allgemeinen kontinuierlichen eingliedrigen Ähnlichkeitsgruppe des

Raumes auftritt⁹⁾. Sie wird durch die Kugelpolarität in eine durchaus gleichartige Kurve k verwandelt, deren Gleichungen in der Gestalt

$$(25) \quad X = e^{a\varphi} \cos \varphi, \quad Y = e^{a\varphi} \sin \varphi, \quad Z = b \cdot e^{a\varphi}$$

angesetzt werden können. Diese Kurve ist echte Geodätische und Böschungslinie auf einem z -parallelen Zylinder Γ_1 , dessen Basis eine *logarithmische Spirale* mit dem Schnittwinkel $\alpha = \operatorname{arccot} a$ ist, ferner Pseudogeodätische und Loxodrome auf einem Drehkegel Γ_2 mit der halben Öffnung $\beta = \operatorname{arccot} b$; die zugehörige Schmiegeebenenneigung γ_2 ergibt sich aus der Formel $\sin \gamma_2 = \sin \alpha \cos \beta$, welche umgekehrt die Festlegung der Konstanten a und b bei vorgeschriebenem Wert von γ_2 gestattet.

3) $p = -1$. Geodätische Linien des Drehparaboloides.

Die Trägerflächen und Tangentenstützflächen Φ der Bündelloxodromen l sind zufolge (9) *Kugeln* des parabolischen Büschels $x^2 + y^2 + z^2 = Cz$; l gehört mithin zu den *sphärischen Bündelloxodromen*, welche erstmalig von G. PIRONDINI betrachtet wurden¹⁰⁾, wobei der vorliegende Sonderfall — *inverse Parazykloiden* — allerdings keine Beachtung fand. Diese Kurven und die mit ihnen verknüpfte Rotationskongruenz $\mathfrak{L}$ hat der Verfasser bei anderer Gelegenheit⁶⁾ ausführlich behandelt.

Durch Ausübung der Polarität $\mathfrak{P}$ wird das Kugelbüschel in eine Schar *konfokaler Drehparaboloiden* Ψ mit dem gemeinsamen Brennpunkt O verwandelt. Wegen $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ ist ω ein rechter Winkel und unsere zylindro-konischen Pseudogeodätischen sind — in Übereinstimmung mit dem klassischen Ergebnis von CHASLES — identisch mit den *echten Geodätischen* der Drehparaboloiden. Die Basis des achsenparallelen Zylinders Γ_1 , auf dem eine solche Kurve liegt, besitzt die aus (19) ablesbare, durch $p + 1 = 0$ vereinfachte Gleichung

$$(26) \quad \begin{aligned} X &= a(\operatorname{ch} c_1 \varphi \cos \varphi - c_1 \operatorname{sh} c_1 \varphi \sin \varphi) \\ Y &= a(\operatorname{ch} c_1 \varphi \sin \varphi + c_1 \operatorname{sh} c_1 \varphi \cos \varphi) \end{aligned}$$

und ist daher eine *Hyperzykloide*⁵⁾, wie schon a.a.O.⁶⁾ bemerkt wurde.

Satz 11. Die geodätischen Linien des Drehparaboloides sind pseudogeodätische Linien auf den durch sie legbaren achsenparallelen Zylindern und auf ihren Verbindungskegeln mit dem Brennpunkt. Bei Normalprojektion auf die Scheitel-ebene erscheinen sie als Hyperzykloiden. Ihre sphärischen Tangentenbilder sind Kugelloxodromen.

Der sinngemäß hier angewandte Satz 8 stellt einen Spezialfall einer allgemeinen, von R. BRICARD entdeckten Eigenschaft der geodätischen Linien auf beliebigen Flächen 2. Grades dar, wonach die aus den Tangenten einer solchen Kurve an die konfokalen Flächen gelegten Berührungsebenen feste Winkel miteinander bilden¹¹⁾.

⁹⁾ G. SCHEFFERS, Besondere transzendente Kurven. *Enz. math. Wiss.* III D 4, 252ff.

¹⁰⁾ G. PIRONDINI, Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. *Crelles J. f. r. u. a. Math.* 118 (1897).

¹¹⁾ R. BRICARD, Sur une propriété des quadriques homofocales. *Nouv. Ann. Math.* 67 (1908).

Vgl. auch: W. WUNDERLICH, Über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades. *Soc. Sci. Fenn., Comm. Phys. Math.* 15 (1950).

4) $p = 3$.

Die Trägerdrehflächen Φ der Loxodromen l sind von 3. Ordnung und haben als Meridian die sogenannte „kubische Duplikatrix“, während die polaren Flächen Ψ von 4. Ordnung sind und durch Rotation der dreispitzigen *Steinerschen Hypozykloide* entstehen. Durch Spezialisierung der Sätze 5 und 10 ergeben sich die außerhalb des vorliegenden Zusammenhanges recht merkwürdigen Aussagen:

Satz 12. Die Asymptotenlinien der kubischen Drehfläche, die durch Rotation der kubischen Duplikatrix um ihre Symmetrieachse entsteht, sind Loxodromen des vom isolierten Doppelpunkt der Fläche ausgehenden Strahlbündels, das sie unter dem konstanten Schnittwinkel von 30° durchsetzen. Bei Zentralprojektion aus dem Doppelpunkt auf eine achsennormale Ebene erscheinen sie als Parazykloiden.

Satz 13. Die Asymptotenlinien der Drehfläche 4. Ordnung, welche durch Rotation einer Steinerzykloide um eine Spizentangente entsteht, sind pseudogeodätische Linien auf achsenparallelen Zylindern und auf Kegeln, die ihren Scheitel im Dornpunkt der Fläche haben. Die festen Schmiegebeneneigungen betragen 30° und 60° .

5) $p = 2$.

Die Meridiane der Drehflächen Φ und Ψ sind die *Kampyla des Eudoxus* und das dazu polare „*Maltakreuz*“ (Selbstberührung aufweisende Parallelkurve der Astroide) Auch hier lassen sich spezielle Aussagen über die Asymptotenlinien der Drehflächen nach dem Muster der Sätze 12 und 13 machen; die charakteristischen Winkelwerte betragen hier $\gamma_1 = \operatorname{arccot} \sqrt{2}$ und $\gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1$.

6) $p = -2$.

Der Meridian der Drehfläche Φ ist die zur *Kampyla* inverse *Müngersche Doppelleinie*. Als Sonderfall von Satz 4 erhalten wir:

Satz 14. Die durch Rotation der Müngerschen Doppelleinie um eine Symmetrieachse erzeugte Doppelleifläche 6. Ordnung $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = Cz^4$ hat die Eigenschaft, daß die auf ihren Doppeltangenten von den Berührungspunkten begrenzten Strecken aus dem Nullpunkt unter dem konstanten Winkel $2\gamma = \operatorname{arctg}(-2\sqrt{2})$ gesehen werden. Die Gratlinien der aus Doppeltangenten aufgebauten Torsen sind Loxodromen des Ursprungsbündels mit dem Schnittwinkel $90^\circ - \gamma$.
(Eingegangen den 7. März 1950.)