Österreichische Akademie der Wissenschaften

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 27. April 1950

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1950, Nr. 7

(Seite 143 bis 147)

Das wirkl. Mitglied Erwin Kruppa legt folgende kurze Mitteilung vor:

„Die Haupttangentenkurven gewisser metrisch spezieller Flächen 3. Ordnung." Von Walter Wunderlich in Wien.

F. Hohenberg hat kürzlich eine elementare Ermittlung der Haupttangentenkurven der sogenannten „Müllerschen Fläche", einer metrisch speziellen Fläche 3. Ordnung mit einem biplanaren und zwei konischen Knotenpunkten, mitgeteilt.[1] Er stützt sich dabei auf einen einfachen Satz von G. Scheffers, wonach die Schnittkurven einer Fläche mit den Ebenen eines Büschels und die Berührungskurven der Tangentialkegel aus den Punkten der Büschelachse ein konjugiertes Netz bilden. Zweimalige Anwendung dieses Satzes legt die Involution konjugierter Tangenten und damit die Haupttangenten eines Flächenpunktes fest, und die Ausübung einer Inversion gestattet dann eine elegante Integration der Haupttangentenelemente.

In der vorliegenden Mitteilung soll auf ein anderes Prinzip zu einer Bestimmung der Haupttangentenlinien hingewiesen werden, das unmittelbar auf der ursprünglichen Erzeugung der genannten Fläche aus einer Ebene vermöge der „axialen Inversion"[2] beruht. Es bereitet keine nennenswerten Schwierigkeiten, das Verfahren gleich allgemeiner für jene kubischen Flächen darzulegen, die K. Strubecker[3] durch Transformation einer Ebene mittels einer „verallgemeinerten axialen Inversion" erhalten hat; es handelt sich hiebei um Flächen mit vier

[1] F. Hohenberg, Die Haupttangentenkurven der Müllerschen Fläche. Anz. d. math.-naturw. Klasse d. Österr. Akad. d. Wiss., 1949, Nr. 14, 287—290.

[2] E. Müller, Die axiale Inversion. Jber. d. DMV. 25 (1916), 209—251.

[3] K. Strubecker, Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, 140 (1931), 545—578.

konischen Knotenpunkten, also um duale Seitenstücke der „Römerfläche“ Steiners.

Die Strubeckersche Transformation $\mathfrak{T}$ gründet sich auf eine *Drehfläche 2. Ordnung* Ω mit der Achse z und den (zunächst reell und getrennt vorausgesetzten) Scheiteln A, B: Als zugeordnet gelten zwei Raumpunkte P_0 und P dann, wenn sie bezüglich eines Parallelkreises von Ω invers liegen. Mit Benützung der stereographischen Projektion oder elementarer Sätze der projektiven Geometrie bestätigt man leicht, daß die Strahlen AP_0 und BP einander auf Ω treffen, ferner daß die Projektionen entsprechender Figuren $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}$ aus A bzw. B auf eine Bildebene $\pi \perp z$ invers bezüglich des Fixkreises $\Omega\pi$ erscheinen, was eine bequeme darstellend-geometrische Behandlung ermöglicht. Einer Ebene ε_0 durch A entspricht danach jener orthogonale Kegel 2. Grades ε, der den Fixkegelschnitt $\Omega\varepsilon_0$ aus B projiziert, und da $\mathfrak{T}$ involutorisch ist, gilt entsprechendes auch für Ebenen durch B. Hieraus folgt, daß eine *Gerade* allgemeiner Lage durch $\mathfrak{T}$ in einen *aufrechten kubischen Kreis* transformiert wird, der A, B und die absoluten Punkte I, J der zu z normalen Stellung enthält.

Eine allgemeine *Ebene* Φ_0 wird durch die kubische Transformation $\mathfrak{T}$ in eine *kubische Fläche* Φ verwandelt, die in den Hauptpunkten A, B, I, J konische Knotenpunkte aufweist und die Kanten des Tetraeders $ABIJ$ enthält. Denken wir uns z lotrecht und ist f eine durch A und B gehende Hyperbel mit einer waagrechten Asymptote, dann erfüllen alle Horizontalkreise, die auf z und f Gegenpunkte haben, eine solche Fläche Φ (Bild 1); sie wird durch $\mathfrak{T}$ eindeutig auf eine Ebene Φ_0 abgebildet, wobei f in eine Fallinie und die Schichtenkreise in die Schichtenlinien von Φ_0 übergehen.

Fassen wir einen beliebigen Flächenpunkt P ins Auge, dessen entsprechender Punkt P_0 durch seine 1. Projektion P_0' aus A auf die Horizontalebene β durch B festgelegt sei. Eine *Haupttangente* h, die mit der Fläche Φ drei in P zusammengerückte Punkte gemein hat, wird durch $\mathfrak{T}$ in einen kubischen Kreis h_0 transformiert, der Φ_0 als *Schmiegebene* in P_0 besitzt. Im Zentralriß aus P_0 auf β (Projektionszeiger c) erscheint h_0 als *Kreis* h_0^c durch $A^c = P_0'$ und $B^c = B$, der die Spur $s_0 = \Phi_0\beta$ berührt; hiedurch ist der Kreis vollkommen bestimmt und kann gezeichnet werden (2 Lösungen). Der Berührungspunkt T_0 mit s_0 stellt den Spurpunkt der zu P_0 gehörigen Tangente t_0 von h_0 dar, die Verbindung T_0P_0' gibt daher die 1. Projektion von t_0 an (Bild 1).

Zur Bestimmung der *Haupttangentenkurven* von Φ führen wir zunächst die Integration der ∞^2 Linienelemente (P_0', t_0') in β durch, die sich elementar erledigen läßt: Denken wir uns den Winkel BT_0P_0' starr und so bewegt, daß sein Scheitel T_0 längs der Geraden s_0 gleitet, während der Schenkel T_0B ständig

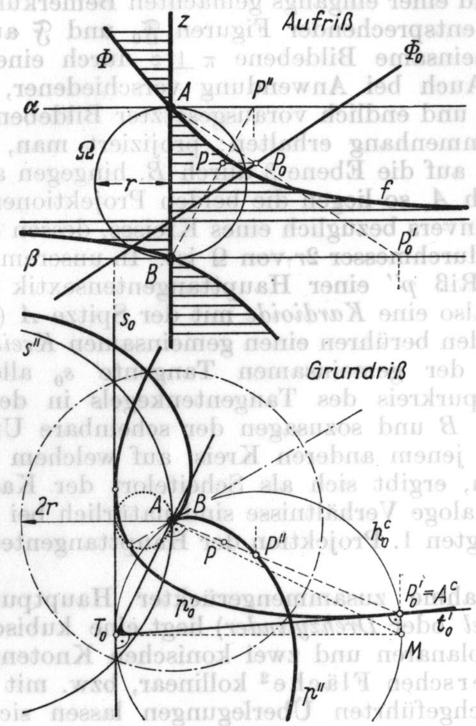

Bild 1

durch den Punkt B geführt wird, dann hüllt der zweite Schenkel t_0' eine gewisse Kurve p_0' ein, die jede Lage von t_0' im zugehörigen Punkt P_0' berührt; aus den Elementen der Kinematik folgt nämlich, daß das Momentanzentrum der Bewegung in den Gegenpunkt M von T_0 auf dem Kreis h_0^c zu liegen kommt. (Bild 1). — Die Hüllkurve p_0' ist bekanntlich eine *Parabel*, die s_0 berührt und B zum Brennpunkt hat, und die Gesamtheit der gesuchten Integralkurven in β besteht aus den ∞^1 möglichen Parabeln p_0', die offensichtlich eine Schar erfüllen: Grundtangenten sind s_0, die Ferngerade von β und das Minimalgeradenpaar durch B. Hiezu gehören als Vereine der Elemente (P_0, t_0)

in der Ebene Φ_0 ∞^1 *Kegelschnitte* p_0, die die vier Seitenflächen des Hauptetraeders $ABIJ$ berühren.[4] Die Ausübung der kubischen Cremonatransformation $\mathfrak{T}$ verwandelt sie in die gesuchten Haupttangentenkurven p von Φ, die sich als *rationale Kurven 6. Ordnung* mit Spitzen in A, B und I, J erweisen.

Auf Grund einer eingangs gemachten Bemerkung hängen die Projektionen entsprechender Figuren $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}$ aus A bzw. B auf eine gemeinsame Bildebene $\pi \perp z$ durch eine Inversion zusammen. Auch bei Anwendung verschiedener, jedoch stets achsennormal und endlich vorausgesetzter Bildebenen bleibt der inverse Zusammenhang erhalten; projiziert man, wie etwa in Bild 1, aus A auf die Ebene β durch B, hingegen aus B auf die Ebene α durch A, so liegen die beiden Projektionen $\mathfrak{F}_0'$ und $\mathfrak{F}''$ im Grundriß invers bezüglich eines Kreises, dessen Radius gleich dem Äquatordurchmesser $2r$ von Ω ist. In unserem Fall ist demnach der 2. Riß p'' einer Haupttangentensextik p invers zur Parabel p_0', also eine *Kardioide* mit der Spitze A (Bild 1). Alle diese Kardioiden berühren einen gemeinsamen *Kreis* s'' durch A, entsprechend der gemeinsamen Tangente s_0 aller Parabeln; s'' ist der Spurkreis des Tangentenkegels in dem konischen Flächenpunkt B und sozusagen der scheinbare Umriß von Φ. Entsprechend jenem anderen Kreis, auf welchem alle Parabelscheitel liegen, ergibt sich als Scheitelort der Kardioiden eine *Gerade*. — Analoge Verhältnisse sind natürlich bei der durchaus gleichberechtigten 1. Projektion der Haupttangentenkurven festzustellen.

Bei Annahme zusammengerückter Hauptpunkte $A = B$ (Ω = *Drehkegel* oder *Drehzylinder*) liegt eine kubische Fläche Φ mit einem biplanaren und zwei konischen Knotenpunkten vor, die zur Müllerschen Fläche[2] kollinear, bzw. mit ihr identisch ist. Die durchgeführten Überlegungen lassen sich hier stark vereinfachen und führen auf Haupttangentenkurven *5. Ordnung*.

Im Falle konjugiert-imaginärer Hauptpunkte A, B (Ω = *einschaliges Drehhyperboloid*) ist die stereographische Projektion aus A und B wohl nicht mehr reell ausführbar, doch kann das obige Ergebnis ohne weiteres übernommen und konstruktiv ausgewertet werden, wonach die Haupttangentenkurven der Fläche Φ vermöge $\mathfrak{T}$ aus den dem Haupttetraeder $ABIJ$ eingeschriebenen Kegelschnitten der Ebene Φ_0 hervorgehen.

[4] K. Strubecker beweist diese Tatsache a. a. O. mit Hilfe gewisser quadratischer Strahlkomplexe, die mit den A, B, I und J festlassenden automorphen Kollineationen der Fläche Ω („nichteuklidischen Schraubungen") zusammenhängen.

Österreichische Staatsdruckerei. 6400 50