

Nicht im Handel

Sonderabdruck

PHOTOGRAPHISCHE KORRESPONDENZ Bd. 85, Nr. 9 bis 10
ZEITSCHRIFT FÜR WISSENSCHAFTLICHE UND ANGEWANDTE PHOTOGRAPHIE UND
DIE GESAMTE REPRODUKTIONSTECHNIK

1949

Verlag Dr. Othmar Helwich in Wien

Alle Rechte vorbehalten

Einfacher Beweis für die Unabhängigkeit der Petzvalschen Bildkrümmung vom Dingort

Von

A. Reuschel (Optische Werke C. Reichert, Wien)

und

W. Wunderlich (Technische Hochschule Wien)

(Mit 2 Textfiguren)

Vorgelegt sei eine von s brechenden Kugelflächen gebildete, ausgerichtete Linsenfolge mit den Mittelpunkten C_1, C_2, \dots, C_s . Vermöge der Brechung an der 1. Kugelfläche wird dem Punkt P_1 des Objektraumes der auf dem Zentralstrahl C_1P_1 liegende Bildpunkt P_1' zugeordnet; analog soll diesem Punkt $P_1' = P_2$ — ohne Rücksicht auf seine Entstehung — mittels der Abbildung durch die 2. Kugelfläche der Bildpunkt P_2' auf C_2P_2 zugewiesen werden usw. Auf diese Weise fortfahrend, gelangt man schließlich zu einem Bildpunkt P_s' , der als das durch die gegebene Linsenfolge entstehende „Petzval-Bild“ von P_1 bezeichnet werden soll.

Für einen auf der optischen Achse liegenden Dingpunkt fällt das Petzval-Bild mit dem Gaußschen Bildpunkt zusammen. Dies gilt nicht mehr für die Punkte seitlich der Achse, für welche nämlich ein optisches Gerät im allgemeinen zwei Bildpunkte liefert, den meridionalen und den sagittalen. Der erste entsteht durch die Vereinigung der wenig geneigten und in der Einfallsebene liegenden Strahlen, der andere durch die Vereinigung der Strahlen, die in einer zur Einfallsebene normalen Ebene verlaufen. Einem ebenen Gegenstand entsprechen somit im allgemeinen zwei nicht ebene Bildflächen, die meridionale und die sagittale. Wenn diese beiden Bildschalen nicht zusammenfallen, dann ist ein *Zweischalenfehler* (Astigmatismus) vorhanden; im gegenteiligen Fall ist der Astigmatismus gehoben. Die Fläche, die in der Mitte zwischen den beiden erwähnten Bildschalen verläuft, heißt *mittleres Bildfeld*.

Bei Annahme einer einzigen brechenden Kugelfläche stellt das Petzval-Bild P_1' eines beliebigen Dingpunktes P_1 dessen wahres Bild (Zentralstrahlenbild) dar. Für $s > 1$ hingegen

könnte es zunächst scheinen, als ob dem Petzval-Bild überhaupt keine physikalische Bedeutung zukäme, weil ja in jedem Zwischenbild eine Richtungsänderung des Lichtstrahls vorgenommen wurde. Es läßt sich jedoch zeigen, daß das meridionale Bild vom Petzvalschen nach derselben Seite hin dreimal so weit entfernt liegt wie das sagittale¹⁾. Für astigmatisch korrigierte Objektive fallen demnach die meridionale und sagittale Bildschale mit der Petzvalschen zusammen. Aber auch bei Systemen, die Astigmatismus aufweisen, gestattet die Petzvalsche Bildschale eine gewisse Aussage über die Lage der meridionalen und der sagittalen Bildschale. Das Petzvalsche Bild spielt somit tatsächlich eine wichtige Rolle.

Das Petzval-Bild einer zur optischen Achse x senkrechten Ebene ist also — zum Unterschied vom Gaußschen Bild — nicht wieder eine Ebene, sondern eine gewisse Drehfläche mit der Achse x , die in ihrem auf x gelegenen Scheitelpunkt von der Gaußschen Bildebene berührt wird. Die Scheitelkrümmung der Petzvalschen Bildfläche ist nach dem Gesagten von entscheidender Bedeutung für die optischen Qualitäten eines zentrierten Linsensystems²⁾. Sie wird kurz die „Petzval-Krümmung“ schlechtweg genannt, seit der österreichische Mathematiker Josef Petzval (1807 bis 1891), ein Pionier der mathematischen Optik, als erster die merkwürdige Tatsache erkannte, daß die genannte Scheitelkrümmung

¹⁾ M. Berek: Grundlagen der praktischen Optik. Analyse und Synthese optischer Systeme (Berlin und Leipzig 1930), 53 ff.

H. Chrétien: Cours de calcul des combinaisons optiques, 3. Aufl. (Paris 1938), 764 f.

²⁾ Vgl. diesbezüglich etwa S. Czapski — O. Eppenstein: Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, 3. Aufl. (Leipzig 1924), 262 ff., 279.

unabhängig vom Ort der Dingebene, also gegen Parallelverschiebungen derselben unempfindlich ist.

Der Petzvalsche Lehrsatz, der sich auf die Abbildung von Kugelflächen ausdehnen läßt, die die optische Achse senkrecht schneiden, hatte seinerzeit in Fachkreisen großes Aufsehen erregt. Petzval selbst hatte seinen Satz ohne Beweis veröffentlicht³⁾. Die seither gegebenen Beweise beruhen fast ausschließlich auf Reihenentwicklungen und sind keineswegs einfach und vor allem nicht durchsichtig.⁴⁾ — Es ist eigenartig, bei dieser Gelegenheit fest-

sehen übrig läßt. Das Fehlen eines einfachen Beweises ist wohl auch der Grund dafür, daß die Bedeutung der Petzval-Krümmung — über die sich Petzval vollkommen im klaren war — selbst von anerkannten Fachleuten noch jahrzehntelang verkannt und mißverstanden wurde.

Auf Grund der Rotationssymmetrie eines zentriert vorausgesetzten Linsensystems können wir uns auf die Betrachtung einer Achsenebene (Meridianebene) beschränken. Bedeutet in Fig. 1 der Kreisbogen k mit dem Mittelpunkt C auf x und dem Radius r die Trennungslinie zwischen zwei Medien mit den Brechzahlen n und n' , so

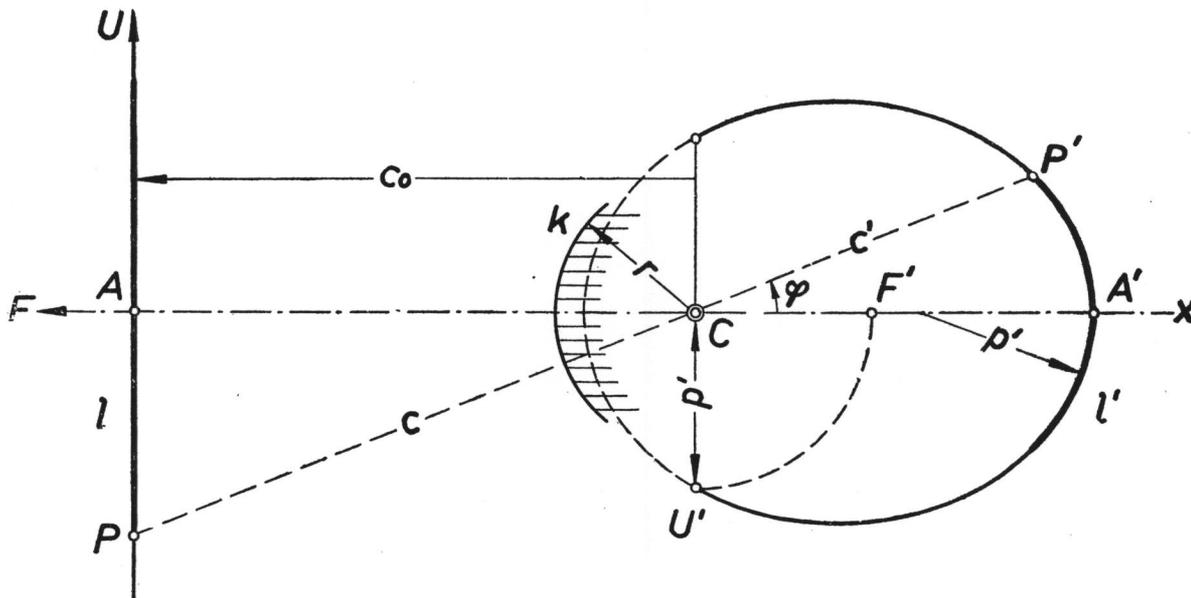


Fig. 1.
Petzval-Bild einer Geraden ($n': n = 1:8$).

stellen zu müssen, daß in der sogenannten „geometrischen Optik“ wahrhaft geometrische Methoden sich verhältnismäßig selten finden. Daß diese jedoch nicht nur mit Erfolg, sondern auch mit Vorteil eingesetzt werden können, soll der in der Folge dargelegte elementare Beweis für die Invarianz der Petzval-Krümmung zeigen, der an Kürze und Durchsichtigkeit nichts zu wün-

³⁾ J. Petzval: Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen (Pest 1843), 27. — Bericht über optische Untersuchungen. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 24 (1857), 99 ff.

⁴⁾ H. Zinken, genannt Sommer: Über die Berechnung der Bildkrümmung bei optischen Apparaten. Pogg. Ann. 122 (1864), 563—574.

A. Gleichen: Lehrbuch der geometrischen Optik (Leipzig und Berlin 1902), 218—222.

F. Schiffner: Bemerkung zu der sogenannten Petzvalbedingung der photographischen Optik. Z. Math. Phys. 54 (1907), 92—95.

wird die Abhängigkeit zwischen einem Achsenpunkt A und seinem Bildpunkt A' durch die bekannte Beziehung

$$(1) \quad \frac{1}{n'e'} - \frac{1}{nc} = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{r}$$

zwischen den von C aus gerechneten und mit Vorzeichen versehenen Abständen $CA = c$ und $CA' = c'$ beherrscht; das Licht wird wie üblich als im positiven Sinn der x -Achse (in den Figuren von links nach rechts) fortschreitend angenommen und r als positiv angesetzt, wenn Mittelpunkt und Scheitel des brechenden Kreisbogens k im positiven Sinn aufeinanderfolgen⁵⁾.

⁵⁾ Verwendet man zur Festlegung eines Punktes auf der optischen Achse seinen Abstand vom Scheitel des brechenden Kreisbogens, so ist es üblich, den Radius als positiv festzusetzen, wenn Scheitel und Mittelpunkt im positiven Sinn aufeinanderfolgen. Bei dieser

Da die Achse x im Falle einer einzigen brechenden Kreislinie in keiner Weise ausgezeichnet ist, so gilt die Beziehung (1) auch auf allen übrigen Durchmessern von k . Machen wir C zum Nullpunkt eines Systems von Polarkoordinaten c, φ , dessen Nullrichtung mit $+x$ zusammenfallen möge, so haben ein beliebiger Dingpunkt $P(c, \varphi)$ und sein Bild $P'(c', \varphi')$ den gleichen Polarwinkel und ihre Polardistanzen sind ebenfalls durch die Gleichung (1) verknüpft. Mit Hilfe der Gleichung (1) kann man demnach die sämtlichen Punkte der Objektfläche abbilden.

Die optische Abbildung $P \rightarrow P'$ stellt nun eine auch für den Mathematiker durchaus bemerkenswerte algebraische Punktverwandtschaft dar; sie ist durch die Gleichung (1) über die jeweils realisierbaren physikalischen Möglichkeiten hinaus geometrisch für alle Punkte der Ebene erklärt. Um ihren Grad festzustellen, der vor allem interessiert, lassen wir den Punkt P eine Gerade l durchlaufen und bestimmen den Ort l' des zugehörigen Bildpunktes P' . Es bedeutet dabei keine Einschränkung, wenn wir, wie in Fig. 1, die Dinggerade l normal zur Nullrichtung x annehmen, so daß sie durch die einfache Polargleichung

$$(2) \quad c \cdot \cos \varphi = c_0$$

beschrieben wird. Für die Bildkurve l' folgt dann mittels (1) sofort die Gleichung

$$(3) \quad c' [(n' - n) c_0 - n'r \cos \varphi] = -nr c_0,$$

aus deren Bauart

$$(4) \quad c' (1 - \varepsilon' \cos \varphi) = p'$$

wir schließen, daß l' ein zu x symmetrischer Kegelschnitt mit dem Brennpunkt C und den charakteristischen Konstanten

$$(5) \quad \varepsilon' = \frac{n'r}{(n' - n) c_0}, \quad p' = \frac{-nr}{n' - n}$$

ist. Das bedeutet, daß es sich bei der Abbildung $P \rightarrow P'$ um eine quadratische Transformation handelt. Wir bemerken noch, daß sämtliche Punkte des Kreises k ($c = r$) ebenso wie seine Mitte C ($c = 0$) „Doppelpunkte“ der

Vereinbarung stimmt also der Radius auch dem Vorzeichen nach mit der Abszisse des Kreismittelpunktes überein.

Im vorliegenden Aufsatz hingegen werden die Abszissen c und c' auf der optischen Achse vom Mittelpunkt des brechenden Kreisbogens aus gemessen. In diesem Falle ist die oben getroffene Vorzeichenfestsetzung zweckmäßig. Der Radius stimmt dann samt seinem Vorzeichen mit der Abszisse des Scheitelpunktes überein. Abgesehen von dieser Abweichung hält sich die hier verwendete Bezeichnungsweise so weit wie möglich an das Normblatt DIN 1335.

Abbildung sind, d. h. mit ihren Bildpunkten zusammenfallen. Weiter wollen und brauchen wir die Abbildung jedoch nicht zu untersuchen⁶⁾.

Die beiden in (5) angeführten Kegelschnittkonstanten haben bekannte Bedeutungen: ε' ist die numerische Exzentrizität und gibt Aufschluß über die Gestalt des Kegelschnittes; es liegt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel vor, je nachdem der Betrag von ε' kleiner, gleich oder größer als 1 ist; p' hingegen ist der sogenannte „Parameter“ und tritt als Radiusvektor für $\varphi = 90^\circ$ auf, gleichzeitig aber auch als Krümmungsradius im Hauptscheitel $\varphi = 0^\circ$.

In der Tatsache, daß die Scheitelkrümmung $1/p'$ der Bildkurve l' gemäß (5) unabhängig ist vom Abstand c_0 der Dinggeraden l , können wir bereits den Kern des Petzval'schen Satzes

⁶⁾ Die Abbildung ist übrigens zwei-zweideutig, d. h. jeder Punkt besitzt in streng geometrischer Auffassung zwei Bildpunkte und ist auch Bild zweier Dingpunkte. Dies liegt daran, daß als Einfallspunkte jeweils zwei Gegenpunkte der (vollständigen) brechenden Kreislinie k in Betracht kommen.

Für Freunde räumlicher Betrachtungen sei noch auf folgende Deutungsmöglichkeit der Abbildung hingewiesen, die sich unmittelbar daraus ableiten läßt, daß die Punktreihen P und P' auf einem Durchmesser „projektiv“ sind: Errichtet man über dem Kreis k einen Drehkegel und projiziert man seine Punkte P aus zwei Punkten O und O' der Kegelachse auf die Kreisebene, so hängen die Projektionen P und P' durch eine Transformation vom Typ (1) zusammen. Auf diese Weise kann man ganz ohne jede Rechnung einsehen, daß eine Gerade l auf einen Kegelschnitt l' mit dem Brennpunkt C abgebildet wird. Wählt man O' insbesondere als Fernpunkt der Kegelachse, so erweist sich die Tatsache, daß die Petzval'sche Bildkrümmung (Scheitelkrümmung des Kegelschnittes l') von der Lage der Geraden l unabhängig ist, als ein Abbild des folgenden Satzes der räumlichen Geometrie: Schneidet man einen Drehkegel mit Ebenen durch einen festen Punkt O der Kegelachse und sucht von diesen Kegelschnitten den Normalriß auf die Grundkreisebene des Drehkegels, so haben alle Projektionskegelschnitte dieselbe Scheitelkrümmung. — Auch alle folgenden Überlegungen lassen sich auf diese Weise rein geometrisch durchführen.

⁷⁾ Dies zeigt man etwa, indem man unter Verwendung von kartesischen Koordinaten für einen Kegelschnitt $b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2$ die vom Brennpunkte ausgehende Kegelschnittsordinate sowie den Krümmungsradius im Hauptscheitel ($y = 0$) berechnet, wobei sich übereinstimmend der Betrag b^2/a ergibt.

Der durch (5) gelieferte Wert p' genügt gleichfalls der für die Linsenkrümmung getroffenen Vorzeichenfestsetzung.

erblicken. Dieses Verhalten ist übrigens geometrisch evident: Verschieben wir nämlich die Gerade l in Achsenrichtung, so bleibt ihr Fernpunkt U unverändert, so daß auch dessen Bild U' fest bleibt; die Strecke CU' gibt aber den allen Bildkegelschnitten gemeinsamen Parameter und Scheitelkrümmungshalbmesser p' an.

Vorläufig haben wir allerdings nur eine einzige brechende Fläche angenommen. Um eine Aussage über die durch eine zweite Linsenfläche bewirkte weitere Abbildung des Zwischenbildes l_1' machen zu können, müssen wir auch auf die Abbildung *krummer* Linien eingehen. Wir betrachten also zunächst an Stelle

Kegelschnitt mit dem Brennpunkt C , dessen Gleichung sich sofort hinschreiben läßt:

$$(6) \quad c(1 - \varepsilon \cos \varphi) = p \quad \text{mit} \quad c_0(1 - \varepsilon) = p.$$

Hiebei wird p wiederum als positiv angesetzt, wenn die konvexe Seite des Scheitelelementes bei A in die positive Richtung der x -Achse weist (vgl. Fig. 2).

Dieser eindeutig bestimmte Kegelschnitt l bildet sich dann zufolge (1) auf eine Linie l' mit der Gleichung

$$(7) \quad \frac{1}{n'c'} = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{r} + \frac{1}{np} (1 - \varepsilon \cos \varphi)$$

ab, die sich auf die Gestalt (4) bringen läßt.

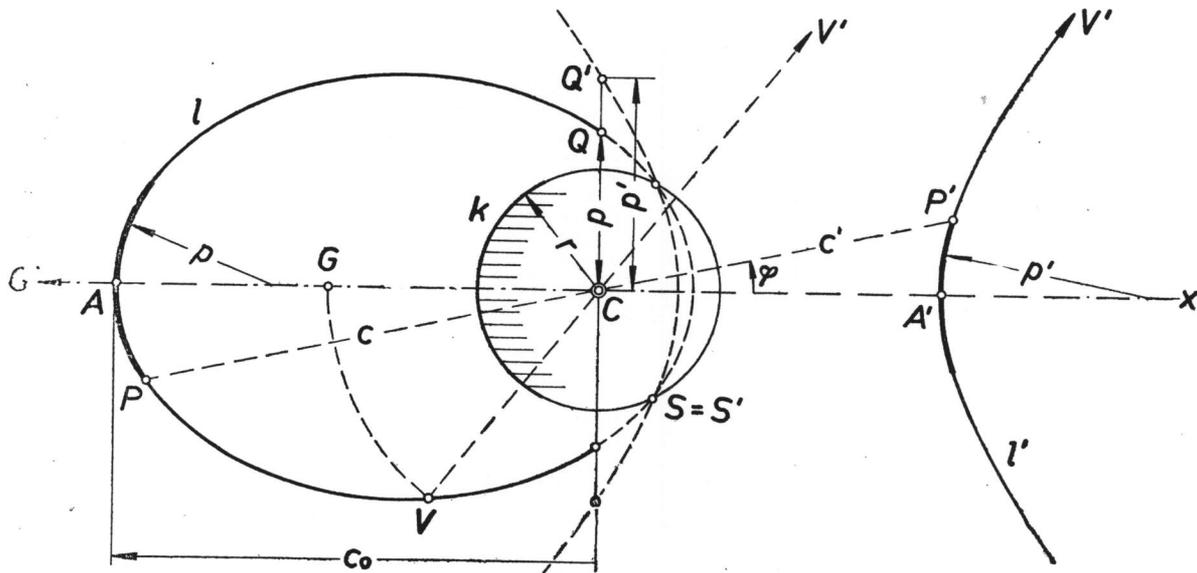


Fig. 2.
Petzval-Bild einer Ellipse, die den Mittelpunkt des brechenden Kreisbogens zum Brennpunkt hat ($n': n = 1.8$).

der Dinggeraden eine Dingkurve l , die zur x -Achse symmetrisch sein soll und im Achsenpunkt (Scheitel) $A(c_0, 0)$ den Krümmungsradius p besitzen möge, und fragen wieder nach dem entsprechenden Krümmungsradius p' der Bildkurve l' . Da oskulierende Dingkurven stets auch oskulierende Bildkurven besitzen⁸⁾, so muß sich p' durch p ausdrücken lassen und wird nicht durch den Gesamtverlauf der Kurve beeinflusst. Diese Freiheit ausnützend, können wir uns eine möglichst bequeme Linie l mit der vorgeschriebenen Krümmung $1/p$ wählen, etwa einen

⁸⁾ Rücken nämlich drei ursprünglich getrennte Schnittpunkte zweier Dingkurven zusammen, so vereinigen sich auch die entsprechenden drei Punkte, die die Bildkurven gemeinsam haben.

Die Bildkurve l' ist also wiederum ein zu x symmetrischer Kegelschnitt mit C als Brennpunkt. Ein Vergleich von (4) und (7) liefert für die Konstanten die Formeln

$$(8) \quad \varepsilon' = \frac{n'r\varepsilon}{(n-n')p + n'r}, \quad p' = \frac{nrp}{(n-n')p + n'r}.$$

Bemerkenswert ist wieder, daß der Parameter oder Scheitelkrümmungshalbmesser p' von l' nicht von ε , also auch nicht von c_0 abhängt. Damit ist jetzt die allgemeinere, dem Satz von Petzval zugrunde liegende Tatsache bewiesen, daß die Krümmung $1/p'$ des Bildelementes nur von der Krümmung $1/p$ des abgebildeten Elementes abhängt, nicht aber von dessen Ort auf der Achse! Der aus (8) ersichtliche Zusammenhang läßt sich auf die übersichtlichere Gestalt

$$(9) \quad \frac{1}{n'p'} - \frac{1}{np} = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{r}$$

bringen. Es ist kein Zufall, daß diese Formel mit der Abbildungsgleichung (1) übereinstimmt, denn für $\varphi = 90^\circ$ ist $c = p$ und $c' = p'$. Der Sachverhalt liegt geometrisch wieder auf der Hand (Fig. 2): Alle zu x symmetrischen Kegelschnitte l mit dem Brennpunkt C und dem Scheitelkrümmungsradius p haben denselben Parameter und gehen daher durch zwei gemeinsame Punkte $Q (\pm p, 90^\circ)$; diesen entsprechen zwei gemeinsame Punkte $Q' (\pm p', 90^\circ)$ der Bildkegelschnitte l' , und da letztere ebenfalls C als Brennpunkt besitzen, haben sie mithin gemeinsamen Parameter und Scheitelkrümmungsradius p' .

Der eigentliche Satz von Petzval folgt nun unmittelbar durch sukzessive Wiederholung. Die Abbildung vermöge eines brechenden Kreises k_1 , der zwei Mittel mit den Brechzahlen n_1 und n_2 trennt, verwandelt ein zu x normales Dinglelement l_1 mit der Krümmung $1/p_1$ in ein analoges Element $l_1' = l_2$ mit der vom Dingort unabhängigen Krümmung $1/p_2$; dessen Bildelement $l_2' = l_3$, erzeugt durch einen weiteren Kreis k_2 als Grenze gegen das nächste Mittel mit der Brechzahl n_3 , hat eine Scheitelkrümmung $1/p_3$, die unabhängig vom Ort von l_2 , also auch vom Ort des Dinglelementes l_1 , ist, usf.

In dieser Weise kann beliebig oft weitergeschlossen werden, wenn nur alle Kreismitteln C_i auf derselben Achse x liegen. Der Übergang von einer Krümmung zur nächsten erfolgt dann stets durch das auf (9) beruhende Gesetz

$$(10) \quad \frac{1}{n_{i+1} p_{i+1}} - \frac{1}{n_i p_i} = \left(\frac{1}{n_{i+1}} - \frac{1}{n_i} \right) \frac{1}{r_i}$$

Bei insgesamt s brechenden Kugelflächen ergibt sich schließlich der Scheitelkrümmungsradius $p_s' = p_{s+1}$ des Petzval-Bildes durch Summation der s Gleichungen (10) für $i = 1, \dots, s$ aus

$$(11) \quad \frac{1}{n_s' p_s'} = \frac{1}{n_1 p_1} + \sum_{i=1}^s \left(\frac{1}{n_{i+1}} - \frac{1}{n_i} \right) \frac{1}{r_i}$$

Diese Krümmung ist also vollkommen unabhängig von der Entfernung des abgebildeten Scheitelementes und von der Lage der Zwischenbilder. Die Invarianz der Petzvalschen Bildkrümmung gegenüber Parallelverschiebungen der Dingfläche längs der optischen Achse hat sich damit auf höchst elementare und anschauliche Art ergeben.

Man kann also die Krümmung des Petzvalschen Bildfeldes schon berechnen, wenn außer den Brechzahlen sämtlicher Medien und den Radien der brechenden Kugelflächen nur noch die Krümmung der Objektfläche gegeben ist. Hingegen braucht über die Lage der Objektfläche, über die Dicke der Linsen und über die Größe der Luftabstände der ausgerichteten Linsenfolge nichts bekannt zu sein. Es ist durchaus begreiflich, daß dieser außerordentlich bemerkenswerte Zusammenhang, den Petzval noch dazu ohne Beweis mitgeteilt hatte, seinerzeit großes Aufsehen erregt hat. Je mehr sich die Petzvalsche Bildfläche der achsennormalen Ebene nähert, um so geringer ist die Petzvalsche Bildkrümmung. Man ist deshalb bestrebt, den Krümmungsradius p_s' möglichst groß zu machen.

Bei einer ausgerichteten Linsenfolge, die frei von Astigmatismus ist, fallen das meridionale, sagittale und mittlere Bildfeld mit dem Petzvalschen zusammen. Man kann daher für ein solches anastigmatisches System ohne jede Durchrechnung von irgendwelchen Strahlen auf Grund der Formel (11) sofort die Krümmung des Bildfeldes angeben. Insbesondere ist für ein optisches System mit anastigmatischer Bildfeldebnung, bei dem also der Zwi-schalenfehler und die mittlere Bildfeldwölbung gleichzeitig gehoben sind, das Verschwinden der Petzval-Krümmung zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Ist die Petzval-Krümmung null, so können Astigmatismus und Bildfeldwölbung noch beträchtliche Werte haben. Ist aber die Petzval-Krümmung null und außerdem einer dieser beiden Bildfeldfehler gehoben, so ist es auch der andere. Es liegt dann ein anastigmatisches System mit ebenem Bildfeld vor.

Unter der Voraussetzung eines ebenen Dinglelementes ($p_1 = \infty$) fällt in (11) der erste Summand weg und $1/p_s'$ stellt die einleitend gekennzeichnete „Petzval-Krümmung“ dar. Für ein Trockenobjektiv wird das erste und letzte Mittel von Luft gebildet und demnach ist $n_1 = n_s' = 1$ zu setzen. Für ein Immersionsobjektiv ist n_1 die Brechzahl des Immersionsmittels; außerdem ist die Vorderfläche der Frontlinse gewöhnlich eben ($r_1 = \infty$). Für eine homogene Immersion stimmen überdies die Brechzahlen für Immersionsmittel und Frontlinse überein ($n_1 = n_2$).