Zur Geometrie gewisser Glanzerscheinungen.

Von

W. Wunderlich, Wien.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 31. März 1950.)

I. Einleitung.

In dieser Arbeit sollen vom geometrischen Standpunkt aus gewisse Glanzphänomene betrachtet werden, die durch die Reflexion des von einer punktförmigen Quelle ausgehenden Lichtes an Systemen spiegelnder Linien hervorgerufen werden. Derartige Erscheinungen sind z. B. an blanken Metallteilen zu beobachten, welche von der Bearbeitung herrührende feine Rillen aufweisen, wie etwa kreisförmige Rillen als Spuren einer Herstellung auf der Drehbank. Für jede Rille sind es nur ganz bestimmte Stellen, die das Licht in das Auge des Betrachters reflektieren, und die Gesamtheit dieser Stellen verbindet sich zu einer kontinuierlich erscheinenden „*Glanzkurve*". Im Gegensatz hierzu würde eine vollkommen glatte Oberfläche im allgemeinen nur einzelne, diskret verteilte „Glanzpunkte" (Spiegelbilder der Lichtquelle) zeigen. Die erwähnte Glanzkurve geht übrigens sicherlich durch die Glanzpunkte, die auf der glatt gedachten Oberfläche auftreten würden.

Ähnliche Erscheinungen sind an den im Geometrieunterricht gebräuchlichen Drahtmodellen von Flächen festzustellen, bei welchen gewisse Flächenlinien durch blanke Metalldrähte materialisiert sind; besonders schön treten diese Glanzeffekte dann auf, wenn es sich um Modelle von Rotationsflächen handelt, die man in Drehung versetzt[1]. Auf zahlreiche, zum Teil recht alltägliche Objekte, die Gelegenheit zur Beobachtung solcher Glanzeffekte geben, wie Drahtgitter, rotierende

[1] Hübsche Aufnahmen solcher Glanzkurven auf einer Kugel und einem Torus mit Drahtmeridianen zeigt E. Papperitz in seinem Bericht „Über das Zeichnen im Raum", Jber. d. DMV. 20 (1911), 307–314, ohne jedoch näher darauf einzugehen.

Speichenräder, Schallplatten, gestriegelte Pferdeleiber, usw., weist W. H. Roever hin, der über diese Erscheinungen wiederholt mathematische Betrachtungen angestellt hat[2].

Gleichfalls hierher gehören die als „Asterismus" bezeichneten Eigenschaften gewisser Mineralien (z. B. Sternsaphir, Granat, Rosenquarz, Gips u. a.), die bei auf- oder durchfallendem Licht eigenartige, häufig sternförmig sich kreuzende Lichtbögen zeigen. Es handelt sich um ein Glanzphänomen, das durch die Reflexion des Lichtes an zahlreichen, regelmäßig angeordneten, nadelförmigen Einschlüssen oder Hohlräumen, „Asteriten" genannt, hervorgerufen wird. Bei vollkommen durchsichtigem Material wird offenbar eine zweidimensionale „*Glanzfläche*" zu erwarten sein, von der bei plattenförmigen Objekten natürlich nur ein bandartiger Ausschnitt auftritt; bei undurchsichtigem oder nur schwach durchscheinendem Material werden lediglich die unmittelbar an der Oberfläche oder in der äußersten Schicht befindlichen Asteriten wirksam und es erscheinen mehr oder weniger echte „Glanzkurven". Auch diesbezüglich liegen bereits Ansätze zu geometrischen Betrachtungen vor, die zum Teil wohl recht unzulänglich sind[3]; es darf jedoch nicht übersehen werden, daß die zu berücksichtigende Lichtbrechung beim Ein- und Austritt ziemliche Komplikationen mit sich bringt.

Allen genannten Erscheinungen liegt jedenfalls nach entsprechender Idealisierung und Auflösung der spiegelnden Linien in einzelne Linienelemente — und wenn man zunächst von der Brechung beim Asterismus absieht — der gleiche geometrische Sachverhalt zugrunde: Vorgelegt ist eine (stetige) *Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{S}$ *von* ∞^2 *oder* ∞^3 *Linienelementen* (T, t) im Raum, ferner ein *Augpunkt* A und ein *Lichtzentrum* B; gesucht sind jene Linienelemente, die einen von B kommenden Lichtstrahl nach A reflektieren und dadurch einen Glanzeffekt hervorrufen. Die Gesamtheit der zugehörigen Punkte T erfüllt im allgemeinen eine *Glanzkurve* oder *Glanzfläche*.

Ein „Glanzelement" ist dadurch gekennzeichnet, daß seine Richtung t gleiche Winkel mit dem Sehstrahl TA und dem Lichtstrahl TB

[2] Vgl. etwa die zusammenfassende Darstellung: W. H. Roever, Brilliant point phenomena; Washington Univ. Studies 8 (1921), 131–160. Einzelergebnisse wurde niedergelegt in den Ann. of Math. 3 (1902), den Transact. Amer. Math. Soc. 9 (1908) und im Amer. Math. Monthly 20 (1913), 21 (1914), 26 (1919), 28 (1921).

[3] P. Kämmerer, Studien über den Asterismus; Zbl. Min. (1915), 524–542, 546–553.

W. Maier, Experimenteller Asterismus; Jb. f. Min. 78 (1943), 283–380.

bildet. Die physikalisch notwendige Zusatzbedingung für einen echten Glanzpunkt, daß die durch T gehende Normalebene eines solchen Elementes überdies die Punkte A und B trennen muß, wird im folgenden meist unberücksichtigt bleiben, so daß von den hier auf Grund der uneingeschränkten Glanzbedingung bestimmten Glanzgebilden praktisch nur gewisse, nicht näher bezeichnete Teile in Betracht kommen. Daß natürlich auch nur jene Stücke der geometrischen Glanzlinie wirksam werden, die in keinem Schattenbereich liegen, braucht wohl kaum ausdrücklich hervorgehoben zu werden. — Eine allgemein anwendbare Methode zur Ermittlung der Glanzelemente, deren sich auch W. H. Roever bedient, besteht darin, jene Elemente (T, t) aufzusuchen, die von Drehellipsoiden mit den Brennpunkten A, B berührt werden; bei ausdrücklicher Ausschaltung der zu denselben Brennpunkten gehörigen Drehhyperboloide — welche die konfokale Flächenschar erst vollständig machen würden — erscheint auch die erwähnte Nebenbedingung berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun für eine Reihe besonders charakteristischer, zweifach ausgedehnter Elementensysteme die Glanzkurven bestimmt und untersucht werden. Der Grundgedanke besteht dabei durchwegs darin, das vorgelegte System in eine einfache dreidimensionale Elementenmannigfaltigkeit einzubetten und zunächst deren Glanzfläche zu ermitteln; diese schneidet dann aus der Trägerfläche des gegebenen Systems die gesuchte Glanzkurve aus. Auf diese Weise ist der sonst schwer zu übersehende Formenreichtum der möglichen Glanzkurven verhältnismäßig klar zu erfassen.

II. Glanzkurven von Systemen paralleler Linienelemente. Glanzfläche des Parallelenbündels.

Das reflektierende System $\mathfrak{S}$ bestehe aus einer Mannigfaltigkeit von ∞^2 *parallelen* Linienelementen (T, t), deren Punkte eine *Ebene* ε erfüllen mögen; die Richtung der Elemente braucht ε jedoch keineswegs anzugehören[4]. Wir betrachten $\mathfrak{S}$ als Teilmenge sämtlicher ∞^3 gleichgerichteten Linienelemente des Raumes und ermitteln zunächst die Glanzfläche Σ dieses Obersystems, wobei wir vorerst endliche Lage von Augpunkt A und Lichtquelle B voraussetzen. — Wir wollen uns eines Normalkoordinatensystems x, y, z bedienen, dessen Ursprung O

[4] Ein derartiger Fall liegt z. B. bei einem Drahtgeflecht vor, wenn die Knikkung der Drähte berücksichtigt wird. Vgl. W. H. Roever, a. a. O.

in der Mitte der Strecke AB angenommen wird, dessen x-Achse die Richtung der Elemente hat und dessen z-Achse normal zu AB ist. Die Fundamentalpunkte sind dann durch $A\,(a, b, 0)$ und $B\,(-a, -b, 0)$ festgelegt (Abb. 1).

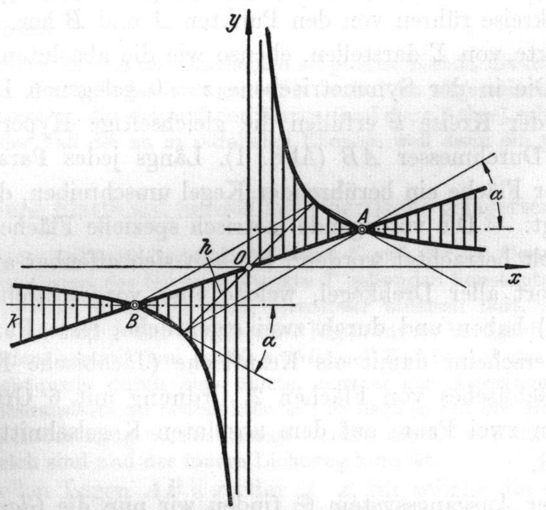

Abb. 1. Kubische Glanzfläche des Parallelenbündels x mit angedeuteten Kreisschnitten k.

Die von A unter einem bestimmten Winkel α gegen die Hauptrichtung x ausgehenden Sehstrahlen bilden einen *Drehkegel* mit x-paralleler Achse und der Öffnung $2\,\alpha$:

$$(x-a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (y-b)^2 + z^2. \tag{1}$$

Er hat mit dem analogen, von B ausstrahlenden Lichtkegel

$$(x+a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (y+b)^2 + z^2 \tag{2}$$

neben der Fernkurve einen eigentlichen *Kegelschnitt* h in der Ebene

$$a \operatorname{tg}^2 \alpha \,.\, x = by \tag{3}$$

gemein, der aus lauter Glanzpunkten besteht. Wir hätten ihn auch als Berührungslinie einer zu den Brennpunkten A, B gehörigen Drehfläche 2. Grades mit einem x-parallelen Tangentialzylinder erhalten können. Die Gesamtheit dieser Kegelschnitte h bildet die gesuchte *Glanzfläche* Σ, deren Gleichung sich durch Elimination von α etwa aus (1) und (3) zu

$$x\,(ay^2 + az^2 - bxy) + ab\,(bx - ay) = 0 \tag{4}$$

ergibt. Es handelt sich darnach um eine bezüglich des Ursprungs und der xy-Ebene symmetrische *kubische Fläche*, welche eine Asymptotenebene $x = 0$ und einen Asymptotenkegel 2. Ordnung $a(x^2 + y^2) = bxy$ besitzt. Die Ebenen $x = \text{const}$ schneiden die Fläche nach *Kreisen* k, die im Normalriß auf die yz-Ebene ein hyperbolisches Büschel bilden; dessen Nullkreise rühren von den Punkten A und B her, die konische Knotenpunkte von Σ darstellen, ebenso wie die absoluten Punkte der yz-Ebene. Die in der Symmetrieebene $z = 0$ gelegenen Durchmesserendpunkte der Kreise k erfüllen die gleichseitige Hyperbel $xy = ab$ und deren Durchmesser AB (Abb. 1). Längs jedes Parallelkreises k läßt sich der Fläche ein berührender Kegel umschreiben, dessen Spitze auf AB liegt. — Die vorliegende metrisch spezielle Fläche 3. Ordnung ist wiederholt betrachtet worden[5]. Sie läßt sich offenbar auch erklären als Spitzenort aller Drehkegel, welche eine vorgeschriebene Achsenrichtung (x) haben und durch zwei eigentliche, feste Punkte (A, B) gehen; sie erscheint damit als Kernfläche (Jacobische Fläche) eines speziellen Gebüsches von Flächen 2. Ordnung mit 6 Grundpunkten, von welchen zwei Paare auf dem absoluten Kegelschnitt zusammengerückt sind.

Für unser Ausgangssystem $\mathfrak{S}$ finden wir nun die *Glanzkurve* s im Schnitt der Trägerebene ε mit der Glanzfläche Σ. Im allgemeinen wird s eine ***elliptische Kubik*** sein, deren Gleichung sich in jedem Fall leicht hinschreiben läßt. Echte Glanzpunkte enthält natürlich nur der Ast innerhalb der Grenzen $x = \pm a$; er weist eine durch $x = 0$ festgelegte Asymptote auf. — Auf Grund unserer Kenntnisse über die Glanzfläche Σ haben wir bei Anwendung darstellend-geometrischer Methoden alle Mittel zu einer ausreichenden konstruktiven Behandlung der Glanzkurve s in der Hand.

Die Glanzfläche Σ gewährt auch eine klare Übersicht über die möglichen Sonderfälle. So ergibt sich etwa eine *rationale* Glanzkubik s, wenn die Ebene ε Tangentialebene von Σ ist oder durch einen der Knotenpunkte A oder B geht. Die Glanzkurve *zerfällt* hingegen (in eine Gerade und einen Kegelschnitt), wenn die Ebene ε zwei Knotenpunkte enthält,

[5] L. Klug, Über einen geometrischen Ort. Arch. Math. Phys. 67 (1882), 330–331.
H. Thieme, Über eine besondere Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Z. Math. Phys. 40 (1895), 362–369.
G. Da Fano, Über eine besondere Fläche dritter Ordnung. Z. f. Realschulwesen 37 (1912), 524–538.

also — bei Beschränkung auf die reellen Möglichkeiten — durch A und B geht oder normal zur Elementenrichtung x steht; ebenso tritt Zerfall ein, wenn ε die z-Achse enthält. — Zwei Annahmen seien besonders hervorgehoben:

1) $\varepsilon \parallel x$. Ebene Oberfläche mit parallelen Rillen, Gitter mit parallelen Drähten.

Die Glanzkurve ist eine im allgemeinen elliptische Kubik, die durch das Bild und den Reflex der Lichtquelle B geht. Sie besitzt im allgemeinen zwei rechtwinklige Asymptoten, die sich auf der Kurve (und der z-Achse) schneiden; auszunehmen ist der Fall der zu xz parallelen Ebenen, weil dann ein parabolischer Ast auftritt.

2) $\varepsilon \perp x$. Dünne Platte mit normal zur Oberfläche gelagerten Asteriten.

Als Glanzkurve tritt ein *Parallelkreis* k von Σ auf, der die Gerade AB trifft und der sich auf Grund des für seine Punkte T geltenden konstanten Abstandsverhältnisses $AT : BT = A\varepsilon : B\varepsilon$ auch elementar ableiten läßt. Die Normalrisse der Punkte A und B auf die Ebene ε liegen invers bezüglich k. — Dieser Glanzkreis ist identisch mit dem „*cercle parhélique*" Babinets[6], der bei Betrachtung einer Lichtquelle durch eine dünne, normal zur Asteritenrichtung abgeschliffene Mineralplatte zu beobachten ist; es liegt ja auf der Hand, daß der Einfluß der Lichtbrechung vernachlässigt werden kann, weil Ein- und Austrittswinkel gleich sind und der innere Lichtweg kurz ist.

Die speziellen Lagen $AB \parallel x$ oder $\perp x$, für welche die Glanzfläche zu einer *Ebene* ausartet, bedürfen wohl keiner näheren Erörterung.

Abschließend sei nur noch die Annahme eines uneigentlichen Augpunktes A (Parallelprojektion) oder Lichtzentrums B (Parallelbeleuchtung) gestreift. In diesen Fällen reduziert sich die Glanzfläche auf einen von B, bzw. A ausstrahlenden und den Fernpunkt A, bzw. B enthaltenden *Drehkegel*, dessen Achse die Richtung der spiegelnden Linienelemente hat. Dementsprechend sind die ebenen Glanzkurven im allgemeinen *Kegelschnitte*, deren Art oder Zerfall leicht zu übersehen ist. — Für den Fall, daß beide Fundamentalpunkte im Unendlichen liegen, rufen entweder *sämtliche* Linienelemente oder *keines* einen Glanzeffekt hervor.

III. Glanzkurven von Systemen radialer Linienelemente. Glanzfläche des eigentlichen Strahlbündels

In Verallgemeinerung der in Abschnitt II untersuchten Annahme bestehe das reflektierende System $\mathfrak{S}$ jetzt aus ∞^2 *radialen* Linienelementen (T, t), deren Geraden t also sämtlich durch ein festes eigentliches *Zentrum* C laufen; wir wollen uns wiederum darauf beschränken,

[6] Babinet, Sur le cercle parhélique; C. R. 4 (1837), 638–642; vgl. a. 762ff.

als Ort der Punkte T eine *Ebene* ε vorauszusetzen, die jedoch den Punkt C nicht zu enthalten braucht. Wir fassen $\mathfrak{S}$ als Teil der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der von den Strahlen des *Bündels* C getragenen Elemente auf und bestimmen zunächst die Glanzfläche dieses Obersystems, wobei die Fundamentalpunkte A und B vorerst gleichfalls im Endlichen angenommen werden. — Wir bedienen uns eines Normalkoordinatensystems x, y, z, dessen Ursprung O in der Mitte der Strecke AB liegt, dessen z-Achse mit AB zusammenfällt und in welchem die y-Koordinate von C verschwindet. Die Grundpunkte sind dann durch $A(0, 0, e)$, $B(0, 0, -e)$ und $C(a, 0, b)$ festgelegt (Abb. 2).

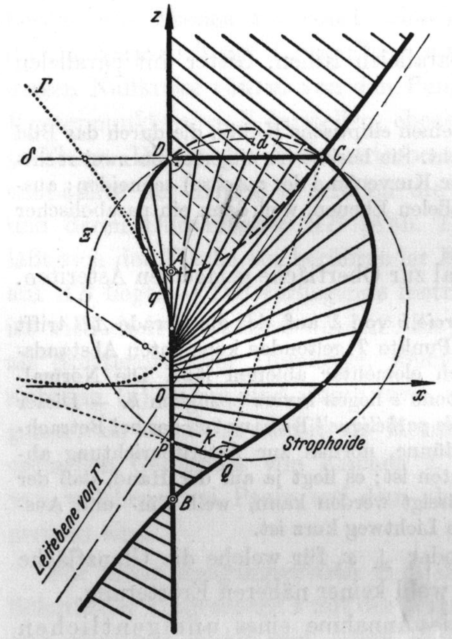

Abb. 2. Glanzfläche 4. Ordnung des eigentlichen Strahlbündels C mit angedeuteten Kreisschnitten k.

Die Glanzfläche konstruieren wir mittels des in Abschnitt I angeführten Prinzips: An die Quadriken Θ der durch die Brennpunkte A und B bestimmten Schar

$$\frac{x^2+y^2}{c^2-e^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{5}$$

legen wir die Tangentialkegel aus C; der Berührungskegelschnitt h wird jeweils von der Polarebene γ

$$\frac{ax}{c^2-e^2}+\frac{bz}{c^2}=1 \tag{6}$$

ausgeschnitten. Die Elimination des Parameters c aus (5) und (6) liefert dann als Gleichung der von h überstrichenen *Glanzfläche* Σ

$$(x^2+y^2+z^2-ax-bz)\,(bx^2+by^2-axz)=e^2(x^2+y^2-ax)\,(z-b). \tag{7}$$

Es handelt sich um eine rationale, die z-Achse enthaltende und zur xz-Ebene symmetrische *Fläche 4. Ordnung*, deren Fernkurve in den absoluten Kugelkreis i und einen reellen Kegelschnitt f zerfällt. Für $z=b$ verschwindet die rechte Seite von (7), während auf der linken ein vollständiges Quadrat auftritt; die damit zusammenhängende Existenz eines *Doppelkreises* d

$$x^2+y^2-ax=0, z=b \tag{8}$$

läßt sich auch rein geometrisch einsehen: Sei δ die durch C gehende Normalebene von z und D ihr Schnittpunkt mit z; durch jeden der in δ gelegenen Kreise p um D gehen zwei Flächen Θ der Schar (5), so daß die Berührungspunkte der aus C an p legbaren Tangenten Doppelpunkte der Glanzfläche Σ darstellen; ihr Ort ist aber der in δ gelegene Thaleskreis d über dem Durchmesser CD. — Auf Grund des vorhandenen Doppelkegelschnittes gehört Σ zu einer eingehend studierten Unterart der Flächen 4. Ordnung.[7]

Die Ebene γ jedes erzeugenden Kegelschnittes h schneidet die Fläche Σ neben h noch nach einem zweiten Kegelschnitt k, der als *Kreis* zu erkennen ist, da seine Fernpunkte nur auf i liegen können. Ein Schnittpunktpaar von h und k gehört dem Doppelkreis d an, in dem anderen findet indessen Berührung zwischen γ und Σ statt (eine zweite Doppelkurve würde ja das Zerfallen sämtlicher ebenen Schnitte von Σ nach sich ziehen). Die ∞^1 Ebenen γ sind demnach *Doppeltangentialebenen*. Ihr Hüllgebilde, der *parabolische Zylinder* Γ

$$(ax+bz+e^2)^2=4\,b\,e^2\,z, \tag{9}$$

berührt Σ längs einer rationalen Quartik q, die den Ort der genannten Berührungspunktepaare darstellt. Als Polarebenen ausgearteter Quadriken Θ gehören neben der Fernebene auch die Ebenen $x=0$ und $z=0$ zu den Tangentialebenen von Γ; da sie einen rechten Winkel bilden, ebenso wie die Γ gleichfalls berührenden Tangentialebenen der beiden durch C gehenden Flächen Θ, so stellt die Verbindungsebene Cy die *Leitebene* von Γ dar (Abb. 2).

Da jeder unserer Kreise k den Doppelkreis d in zwei (nicht notwendig reellen) Punkten trifft, so existiert stets eine k und d verbindende *Kugel* Ξ. Ihr vollständiger Schnitt mit der Fläche Σ besteht aus dem absoluten Kreis i, dem einfachen Kreis k und dem doppelt zählenden Kreis d. Der von D verschiedene Schnittpunkt $P = \Xi z$ kann als Σ und Ξ gemeinsamer Punkt nur dem Kreis k angehören. Wie aus Abb. 2 ohne weiteres ersichtlich ist, ist P der Antipode von C auf Ξ, so daß sich der Gegenpunkt Q von P auf k im Fußpunkt des aus C auf die

[7] Vgl. etwa W. F. Meyer, Spezielle algebraische Flächen; Enz. math. Wiss. III C 10 b, Abschn. III u. IV.

Kreisebene γ gefällten Lotes befindet. Die beiden in der Symmetrieebene $y = 0$ liegenden Durchmesserendpunkte P und Q des Kreises k durchlaufen mithin einerseits die z-Achse, anderseits die Fußpunktskurve des parabolischen Zylinders Γ bezüglich des der Leitebene angehörenden Punktes C, also eine *Strophoide* mit dem Doppelpunkt C (rationale zirkulare Kubik mit normalen Doppelpunktstangenten[8]). Die Punkte A und B sind offensichtlich wieder *konische Knotenpunkte* der Glanzfläche.

Zwischen den Kugeln des Büschels $d\,(\Xi)$ und den Tangentialebenen des parabolischen Zylinders $\Gamma\,(\gamma)$ besteht eine durch die Reihe gemeinsamer Punkte $z\,(P)$ vermittelte *projektive Beziehung*, als deren Erzeugnis Σ angesehen werden kann; die Ferntangentialebene von Γ ist dabei Bestandteil der zugeordneten zerfallenen Büschelkugel.

Auf Grund ausreichender Kenntnisse über die Glanzfläche Σ läßt sich nun die Vielfalt der möglichen Glanzkurven des ebenen Ausgangssystems $\mathfrak{S}$ übersehen. Es handelt sich im allgemeinen um *monozirkulare elliptische Quartiken*, die sich mit Hilfe der Kreisschnitte k ohne weiteres punktweise konstruieren lassen. Im Hinblick auf die projektive Erzeugung von Σ kann eine solche Glanzkurve als Erzeugnis eines Kreisbüschels und einer dazu projektiven Tangentenreihe einer Parabel angesehen werden. — Im besonderen ergibt sich jedoch eine *rationale* Glanzkurve 4. Ordnung, wenn die Trägerebene ε von $\mathfrak{S}$ die Glanzfläche berührt oder durch einen der Knoten A oder B geht. Enthält ε beide Knoten, so reduziert sich die Glanzkurve unter Abspaltung der Achse $AB = z$ auf eine *rationale Kubik*, sie zerfällt hingegen in ein *Kreis-Kegelschnitt-Paar* $k + h$, wenn ε Tangentialebene des parabolischen Zylinders Γ ist. — Besonders hingewiesen sei auf den praktisch häufigen Fall der *vereinigten Lage* von ε und C, der einer mit radialen Spiegelrillen versehenen Ebene zugrunde liegt; das Zentrum C ist in diesem Fall stets ein Doppelpunkt der Glanzkurve, die allgemein von 4. Ordnung, im übrigen aber aller angeführten Ausartungen fähig ist und sich für $AB \perp \varepsilon\ (= \delta)$ sogar auf einen doppelt zu zählenden Kreis reduziert.

[8] Diese Strophoide stellt die Glanzkurve des der xz-Ebene angehörenden *Strahlbüschels* C dar und ist als solche des öfteren betrachtet worden:

R. Niemtschik, Neue Konstruktionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe; Sitzungsb. Ak. Wiss. Wien 53 (1866).

E. Sang, On the curves produced by reflexion from a polished revolving straight wire; Edinburgh Trans. 28 (1877), 273—276.

G. Loria, Identité de la strophoïde avec la focale à nœud, son application à l'optique géométrique. Nouv. Ann. Math. (3) 16 (1897), 262—265.

Einige Sonderlagen der Grundpunkte A, B und C sind noch ausdrücklich zu erwähnen:

1) $a = 0$. A, B, C in einer Geraden.

Die Gleichung (7) der Glanzfläche nimmt nach Abspaltung des Faktors $x^2 + y^2$ die Form

$$x^2 + y^2 + (z - b)\left(z - \frac{e^2}{b}\right) = 0 \tag{7'}$$

an. Es liegt demnach eine *Kugel* durch C und den zu C bezüglich A und B harmonischen Punkt vor, also eine „Apollonische Kugel" des Punktepaares A, B. Ihre Glanzflächeneigenschaft wäre leicht elementar zu bestätigen. — Die Glanzkurven der ebenen Systeme $\mathfrak{S}$ sind mithin stets *Kreise*.

2) $b = 0$. C von A und B gleich weit entfernt.

Die Gleichung (7) der Glanzfläche nimmt nach Abspaltung des Faktors z die Form

$$ax\,(x^2 + y^2 + z^2 - ax) + e^2\,(x^2 + y^2 - ax) = 0 \tag{7''}$$

an. Diese Fläche 3. Ordnung erweist sich als *parabolische Dupinsche Zyklide* mit reellen Knoten in A und B. Der Hauptschnitt $y = 0$ besteht aus der Geraden AB und dem Kreis ABC (als Rudiment der Strophoide). Der Zylinder 2. Klasse Γ ist in zwei Ebenenbüschel zerfallen: Das Parallelenbüschel der Polarebenen $\gamma \perp x$, in welchen die Kegelschnitte h liegen, und in das eigentliche Büschel mit der Achse $x = -e^2/h$, $z = 0$, dessen Ebenen Kreise enthalten. Auch die Ebenen durch die Achse AB schneiden die Zyklide bekanntlich nach Kreisen. — Die gestaltlichen Varianten der im allgemeinen kubischen und zirkularen Glanzkurven ebener Systeme sind ohne weiteres zu übersehen.

3) A oder B im Unendlichen. Parallelprojektion, bzw. -beleuchtung.

Dieser Grenzfall erfordert eine eigene Behandlung, führt jedoch auf keine wesentlichen Unterschiede gegenüber den allgemeinen Verhältnissen. Die konfokalen Quadriken Θ sind jetzt Drehparaboloide, die Glanzfläche Σ ist wieder von 4. Ordnung, nur zerfällt ihre Fernkurve jetzt in den absoluten Kugelkreis und ein Tangentenpaar desselben.

IV. Glanzkurven auf Drehflächen mit spiegelnden Parallelkreisen. Glanzfläche des koachsialen Kreissystems.

Das spiegelnde System $\mathfrak{S}$ bestehe aus den ∞^2 Linienelementen der *Parallelkreise einer Drehfläche* Φ, deren Achse wir mit der z-Achse des zu benützenden Koordinatensystems zusammenfallen lassen, während wir hinsichtlich der Wahl der anderen Achsen vorläufig keine Festsetzung treffen. Wir denken uns gleich den ganzen Raum durch spiegelnde Kreise mit der Achse z erfüllt und ermitteln zunächst die Glanzfläche dieses Einbettungssystems, vorerst unter der Annahme endlicher Fundamentalpunkte $A\,(a_1, a_2, a_3)$ und $B\,(b_1, b_2, b_3)$.

Die ∞^3 Linienelemente des genannten Obersystems ordnen wir mit Hilfe der *Meridianebenen* γ durch z. Unter den ∞^2 zu einer Ebene γ normalen Elementen befinden sich ∞^1 Glanzelemente (T, t), die sich zufolge II 2) längs eines AB treffenden Kreises, des Babinetschen „cercle parhélique" verteilen. Dieser *Glanzkreis* ist der Ort aller Punkte T, für welche die Proportion

$$AT : BT = A\gamma : B\gamma = \text{const}$$

gilt, und ergibt sich demnach konstruktiv als Schnitt der Meridianebene γ mit einer *Apollonischen Kugel* Γ des Punktepaares A, B. Dreht sich γ um z, so durchläuft Γ das durch die Nullkugeln A und B bestimmte hyperbolische Büschel, dessen (nullteiliger) Grundkreis mit c bezeichnet sei. Die Zuordnung der beiden Büschel $z(\gamma)$ und $c(\Gamma)$ ist durch die Schnittbedingung von γ und Γ auf AB festgelegt und demnach eine (1, 2)-Korrespondenz. Das Erzeugnis, die gesuchte *Glanzfläche* Σ, ist darnach von *4. Ordnung* und geht einfach durch die aus dem Kreis c und dem absoluten Kegelschnitt i bestehende Basis des Kugelbüschels, hingegen zweimal durch die Achse z. Die Punkte A und B sind wieder konische Doppelpunkte mit berührenden Drehkegeln; neben ihrer Verbindungsgeraden gehören der Fläche noch vier weitere Geraden an, die von der zerfallenden Büschelkugel herrühren (darunter zwei uneigentliche).

Um die Gleichung der Glanzfläche zu gewinnen, stellen wir die Ebene γ als Linearkombination der durch A und B gehenden Büschelebenen α und β dar:

$$\alpha - \lambda\beta = 0 \text{ mit } \alpha \equiv a_2 x - a_1 y \text{ und } \beta \equiv b_2 x - b_1 y. \tag{10}$$

Analog ergibt sich die Büschelkugel Γ mit Hilfe der Nullkugeln A und B zu

$$\begin{aligned} \mathsf{A} - \mu\,\mathsf{B} = 0 \text{ mit } \mathsf{A} &\equiv (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \\ \text{und } \mathsf{B} &\equiv (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Parameterwerte für die Büschelelemente, die einen bestimmten Punkt $x = a_1 + (b_1 - a_1)\,t$, $y = a_2 + (b_2 - a_2)\,t$, $z = a_3 + (b_3 - a_3)\,t$ der Leitlinie $l = AB$ enthalten, ergeben sich durch Einsetzen mit

$$\lambda = \frac{t}{t-1}, \quad \mu = \left(\frac{t}{t-1}\right)^2,$$

die „Schnittbedingung" drückt sich daher einfach durch $\lambda^2 = \mu$ aus und die Glanzflächengleichung lautet mit Benützung der eingeführten Abkürzungen

$$\alpha^2\,\mathsf{B} - \beta^2\,\mathsf{A} = 0. \tag{12}$$

Schlagen wir um den in der Mittelebene ω von A und B liegenden Punkt O der z-Achse jene Kugel Ω, die durch A und B geht, und beachten wir, daß sie alle Meridianebenen γ und Büschelkugeln Γ, also auch die Glanzkreise $\gamma\Gamma$ rechtwinklig schneidet, so erkennen wir, daß die Glanzfläche Σ die *Inversion* bezüglich Ω verträgt, also *anallagmatisch* ist. Üben wir unter diesen Umständen die durch Ω bestimmte Darbouxsche Transformation $\mathfrak{T}$ aus, die jedem bezüglich Ω inversen Punktepaar P, $\overline{P}$ den Pol P^* seiner Mittelebene zuordnet[9], so wird Σ in eine gewisse *Strahlfläche* (Regelfläche) Σ^* verwandelt. Wir bemerken, daß $\mathfrak{T}$ das Büschel $z(\gamma)$ ebenenweise festläßt, während das Kugelbüschel $c(\Gamma)$ in ein zweites Ebenenbüschel $c^*(\Gamma^*)$ übergeführt wird, dessen Achse c^* mit der reziproken Polare von AB identisch ist. Diese Ebenenbüschel sind gleichfalls einzweideutig aufeinander bezogen und Σ^* ist als ihr Erzeugnis eine *kubische Strahlfläche*, festgelegt etwa durch die doppelte Leitgerade z, die einfache Leitgerade c^* und den $AB = l$ entsprechenden Leitkegelschnitt l^*, der mit z den Punkt O gemein hat. Damit ist die Glanzfläche Σ auf eine einfachere Fläche Σ^* zurückgeführt, aus welcher sie umgekehrt mittels der inversen Transformation $\mathfrak{T}^{-1}$ abgeleitet werden kann.

Die auf unserer Drehfläche Φ auftretende Glanzkurve wird nun von der Glanzfläche Σ ausgeschnitten. Demgemäß ergeben sich z. B. auf *Drehflächen 2. Ordnung* mit spiegelnden Parallelkreisen im allgemeinen *Glanzkurven 8. Ordnung*, die in den beiden Flächenscheiteln Doppelpunkte aufweisen; bei einer *Kugel* verbleibt nach Abspaltung des absoluten Kegelschnittes eine eigentliche *Glanzkurve 6. Ordnung*.

Von besonderem Interesse ist der Fall einer Ebene ε mit konzentrischen Kreisrillen. Die möglichen Glanzkurven sind die achsennormalen Schnitte $z = \text{const}$ der Glanzfläche Σ, also im allgemeinen *monozirkulare Quartiken* vom Geschlecht 2, die einen Doppelpunkt im Rillenzentrum aufweisen; von den beiden reellen Asymptoten fällt die eine mit der Normalprojektion von AB zusammen, die andere läuft parallel zu der durch den Halbierungspunkt von AB gehenden Achsenebene[10].

[9] G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques (Paris 1873).
$\mathfrak{T}$ ist eine einzweideutige, quadratische Punktverwandtschaft, welche die Orthogonalkreise, bzw. -kugeln von Ω in Geraden, bzw. Ebenen überführt.

[10] W. H. Roever zeigt a. a. O. sehr schöne Photographien derartiger Glanzlinien auf einem Kreissägenblatt.

Im folgenden seien einige spezielle Anordnungen angeführt, wobei ω die Mittelebene von AB bedeutet:

1) $\omega \parallel z$.

Da $O = \omega z$ ins Unendliche rückt, artet die Orthogonalkugel Ω in eine *Symmetrieebene* der Glanzfläche Σ aus. Der Symmetrieschnitt besteht aus der *Geraden* $l = AB$ und einer *Strophoide* m, die ihren Doppelpunkt auf der z-Achse hat und durch A, B und jenen Punkt C von l geht, der z am nächsten liegt[11]. Durch die beiden Leitlinien l und m ist die Schar der Kreise, die in den Meridianebenen durch z liegen, und damit auch die Fläche Σ vollkommen bestimmt. Die Fläche ist nach wie vor von 4. Ordnung, besitzt aber *drei konische Knotenpunkte*, nämlich A, B und C.

2) ω durch z.

$O = \omega z$ wird unbestimmt auf z, die Glanzfläche verträgt daher ∞^1 Inversionen und enthält sämtliche (zur Leitgeraden l inversen) Kreise durch A und B, die z treffen, womit sie als *parabolische Dupinsche Zyklide* (3. Ordnung) zu erkennen ist. Es wäre auch unschwer elementar einzusehen, daß an Stelle der Strophoide m von 1) ein *Kreis* tritt.

3) AB trifft z.

Die Glanzfläche zerfällt in die doppelt zählende *Meridianebene* durch A und B, und jene *Apollonische Kugel* des Punktepaares A, B, welche den Schnittpunkt von AB und z enthält, denn deren zugeordnete Büschelebene wird unbestimmt. Für diese Annahme treten demnach besonders einfache Glanzkurven auf; im Falle einer nach konzentrischen Kreisen gerieften *Ebene* besteht die Glanzlinie aus einem *Kreis* und einer *Doppelgerade*[10].

4) A oder B unendlich fern.

Lassen wir etwa B ins Unendliche rücken (Parallelbeleuchtung), dann haben die Kugeln des Büschels $c(\Gamma)$ den Augpunkt A als gemeinsamen Mittelpunkt. Die Glanzfläche bleibt von 4. Ordnung, weist jetzt aber neben z noch eine *zweite Doppelgerade* auf, nämlich die Ferngerade der Ebene Bz. Der Knotenpunkt B hat damit auch seinen konischen Charakter in einen biplanaren abgeändert.

5) A und B unendlich fern.

Es ist klar, daß im Falle von Parallelbeleuchtung und Parallelprojektion alle zu einem Glanzelement parallelen Linienelemente gleichberechtigt sind (vgl. Abschnitt V). Die Glanzfläche besteht in unserem Fall aus *zwei Meridianebenen*, von welchen im konkreten Fall nur eine mit echten Glanzelementen behaftet ist. Entsprechend besteht die Glanzkurve einer Drehfläche mit spiegelnden Parallelkreisen aus zwei *Meridianen*, von denen der eine jedoch nur als virtuelle Glanzkurve anzusehen ist.

[11] Diese kubische Glanzkurve m der konzentrischen Kreisschar deckt sich (in geometrischer Hinsicht) mit der Glanzkurve des Durchmesserbüschels und ist daher identisch mit der in Fußnote 8 erwähnten Strophoide.

V. Glanzkurven auf Drehflächen mit spiegelnden Meridianen bei Parallelprojektion und Parallelbeleuchtung.

Der Fall einer beliebigen *Drehfläche Φ mit spiegelnden Meridianen* läßt sich bei endlicher Lage von Augpunkt A und Lichtquelle B mit Benützung der Ergebnisse von Abschnitt III behandeln, indem man je ∞^1 Linienelemente längs eines Parallelkreises p zusammenfaßt und in ein radiales System einbettet. Die Bestimmung der auf p gelegenen Glanzpunkte läuft dann auf den Schnitt von p mit der Glanzfläche 4. Ordnung eines Strahlbündels hinaus, d. h. mit Rücksicht auf ein gemeinsames Paar absoluter Punkte im allgemeinen auf eine *Aufgabe 6. Grades*.

Unter diesen Umständen wollen wir nur auf die wesentlich einfachere Annahme uneigentlicher Fundamentalpunkte A, B eingehen. Denken wir uns die Sehstrahlen auf A zu und die Lichtstrahlen von B weg orientiert, dann rufen alle jene Linienelemente Glanzeffekte hervor, die parallel zu einer gewissen „*Leitebene*" ω liegen, welche den Winkel eines beliebigen Sehstrahl-Lichtstrahl-Paares hälftet; parallel zur Halbierungsebene des Nebenwinkels liegen nur virtuelle Glanzelemente, die außer Betracht bleiben sollen.

Die punktweise Konstruktion der *Glanzkurve* s einer Drehfläche Φ mit spiegelnden Meridianen läßt sich nach dem Gesagten leicht durchführen: Wir umschreiben Φ längs eines Parallelkreises p den Drehkegel und legen durch seine Spitze die zur Stellung ω parallele Ebene; diese schneidet p in zwei Glanzpunkten. Anders ausgedrückt: Die Glanzkurve ist die Berührungslinie des der Drehfläche umschriebenen *Konoids*, dessen Leitlinien die Ferngerade u von ω und die Flächenachse z sind. Sie läßt sich mithin auffassen als die Schnittlinie von Φ mit der „benachbarten" Fläche Φ_1, die aus Φ durch die „infinitesimale" *windschiefe Affinität* $\mathfrak{A}_1$ mit den Achsen u und z (schiefe achsiale Symmetrie) hervorgeht. Diese Vorstellung gestattet eine rasche Beurteilung der Glanzkurve s von *algebraischen* Drehflächen Φ: Hat Φ die Ordnung n, dann wird s im allgemeinen die Ordnung n^2 haben, die jedoch im Falle vorhandener Doppellinien mit der Gesamtordnung d und Rückkehrkanten mit der Gesamtordnung r um $2d + 3r$ zu vermindern ist, von höheren Singularitäten abgesehen; ebenso sind allfällige Φ angehörende Treffgeraden von u und z abzuziehen.

Ist Φ z. B. eine *Mittelpunktsfläche 2. Ordnung* — insbesondere eine *Kugel*[1] —, dann tritt als Glanzkurve eine zentralsymmetrische *Quartik* auf, die die Flächenscheitel sowie die absoluten Punkte der Hauptsymmetrieebene enthält und daher aus der Flächenmitte durch einen orthogonalen Kegel 2. Ordnung projiziert wird, der die Flächenachse als Scheitelerzeugende besitzt[12]. Im Fall eines *Drehparaboloids* spalten sich noch die beiden Fernerzeugenden ab, so daß für die eigentliche Glanzkurve ein *Kegelschnitt* durch den Flächenscheitel übrigbleibt.

Ist Φ schließlich ein *Torus*[1] ($n = 4$), so ist der absolute Kugelkreis ($d = 2$) zweifach von $\Phi\Phi_1$ abzuziehen und es ergibt sich eine eigentliche *Glanzkurve 12. Ordnung*, die die vier auf u und z gelegenen Flächenpunkte zu Doppelpunkten und die absoluten Punkte der Äquatorebene zu vierfachen Punkten besitzt.

Bei analytischer Behandlung ergibt sich die Glanzkurve einer beliebigen Drehfläche Φ, dargestellt durch

$$F(r, z) = 0 \text{ mit } r^2 = x^2 + y^2, \tag{13}$$

als Schnitt mit der Fläche Ψ

$$(u_1 x + u_2 y) \frac{\partial F}{\partial z} - u_3 r \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \tag{14}$$

wenn $x : y : z = u_1 : u_2 : u_3$ die den Winkel zwischen Blick- und Lichtrichtung halbierende Richtung ($\perp \omega$) angibt. Ψ kann als *Glanzfläche* des mit den spiegelnden Meridianen der einparametrigen Flächenschar $F(r, z) = \text{const}$ erfüllten Raumes angesehen werden; die Art dieser Flächenschar hängt allerdings noch wesentlich von der Gestalt ab, die man der Gleichung von Φ erteilt.

[12] W. H. Roever beschreibt a. a. O. ein hierhergehöriges Glanzphänomen, das auf dem halbkugelförmigen Kuppeldach der Kathedrale von St. Louis zu beobachten ist und seine Ursache in der Form und Anordnung der glasierten Dachziegel hat, die spiegelnde Rinnen und Stränge längs der Meridiane bilden.

Printed in Austria