Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

(Eingelangt am 27. August 1950.)

1.

Jene auf einer Fläche verlaufenden Kurven, deren *Schmiegkugeln die Fläche berühren*, heißen „D-Kurven", nach G. Darboux, der sie als erster betrachtet hat[1]. Im Rahmen der konformen Geometrie kommt ihnen offenbar eine ähnliche Bedeutung zu, wie den Asymptotenlinien für die projektive Flächentheorie, doch ist ihre Mannigfaltigkeit um eine Stufe höher. Eine gewisse Einsicht in ihre Eigenart vermitteln die folgenden geometrischen Überlegungen.

Sei k eine *D-Kurve* der Fläche Φ, T ein laufender Kurvenpunkt, t die zugehörige Tangente, τ die Schmiegebene und Σ die Schmiegkugel. Σ schneidet Φ nach einer Kurve h, die in T einen Doppelpunkt aufweist und mit k vier vereinigte Punkte gemein hat; k durchsetzt mithin den einen Zweig von h einfach, den anderen oskulierend. Jeder durch t gelegte ebene Schnitt hat mit h mindestens $2 + 1 = 3$ zusammengerückte Punkte gemein, sein Krümmungskreis liegt daher auf der Trägerkugel Σ von h, die damit als die zum Linienelement (T, t) gehörige *Meusnier-Kugel* zu erkennen ist. Unter den durch t legbaren Ebenen ist nun die Schmiegebene τ von h ausgezeichnet: Alle das Element (T, t, τ) oder das entsprechende Element des zweiten Zweiges von h enthaltenden Flächenkurven — und nur diese! — treffen h in (wenigstens) $3 + 1 = 4$ zusammenfallenden Punkten und besitzen somit Σ als *Schmiegkugel*. Für jedes Linienelement (T, t) der Fläche Φ

[1] *G. Darboux*: Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. C. R. 73 (1871), 732–736.— Bezüglich weiterer Literatur siehe Enz. math. Wiss. III D 3, Nr. 39.

ist demnach über die zugehörige Meusnierkugel Σ und deren Schnittlinie $\Sigma\Phi = h$ die Schmiegebene τ eindeutig mitbestimmt. Die Ermittlung der D-Kurven von Φ beruht danach auf der *Aneinanderreihung von Elementen* (T, t, τ) aus einem Vorrat von ∞^3 Exemplaren, erfordert also die Integration einer *gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung.* Auf einer (nichtsphärischen) Fläche existieren mithin ∞^2 D-Kurven; durch jeden allgemeinen Punkt gehen ∞^1 davon.

Aus der Tatsache, daß der Krümmungskreis $\Sigma\tau$ von k mit h und daher auch mit Φ vier zusammengerückte Punkte gemein hat, fließt zwanglos eine zweite Kennzeichnung der D-Linien: *Es sind jene Flächenkurven, deren Krümmungskreise die Fläche hyperoskulieren.*

2.

Schon Darboux selbst hat a. a. O.[1] den Fall einer Grundfläche 2. Ordnung betrachtet und deren D-Linien mit Hilfe elliptischer Koordinaten durch elliptische Integrale dargestellt. Sein Ansatz wurde später von A. Pell ausgewertet, der auch einige interessante geometrische Eigenschaften dieser speziellen Kurven entdeckte[2]. Einen bequemen Zugang zu den D-Linien der Quadriken eröffnen aber auch schon die einfachen, in Nr. 1 dargelegten Vorstellungen; diesen Weg beschritt vor kurzem der Verfasser, wobei sich neben neuen Eigenschaften vor allem eine tiefere Einsicht und verschiedene merkwürdige Zusammenhänge ergaben[3].

Die benützten Hilfskurven h, die aus der Grundfläche Φ von ihren Berührungskugeln Σ ausgeschnitten werden, sind nämlich im Falle einer Quadrik im allgemeinen *rationale Kurven 4. Ordnung mit vier gemeinsamen Fernpunkten* U_i $(i = 1, \ldots, 4)$, jenen Punkten von Φ, die auf dem absoluten Kugelkreis liegen. Jede solche Quartik wird aus ihrem Doppelpunkt T durch einen *Kegel 2. Ordnung* Δ projiziert, der die beiden Doppelpunktstangenten t enthält und längs derselben von den zugehörigen Schmiegebenen τ berührt wird; alle ∞^3 Kegel Δ haben ebenfalls die Fixpunkte U_i gemein, so daß ihre Fernkegelschnitte lediglich ein Büschel erfüllen. Die *Tangentenfläche* einer D-Kurve k besteht nun aus Streifenelementen (t, τ) und wird also längs jeder Erzeugenden von einem Kegel Δ tangiert: Dementsprechend wird ihre *Fernkurve*

[2] *A. Pell*: „D" lines on quadrics. Transact. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 315–322.

[3] *W. Wunderlich*: Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken. Math. Tidsskr. 1951 (im Druck).

in jedem Punkte von einem der Kegelschnitte des Büschels $U_1\, U_2\, U_3\, U_4$ berührt und *muß daher notwendig mit einem dieser Kegelschnitte c zusammenfallen.* Umgekehrt ist auch jede Flächenkurve, deren Tangenten einen festen Büschelkegelschnitt c treffen, eine D-Linie, weil sie aus Elementen (T, t, τ) besteht.

Damit sind die D-Kurven der Quadriken zunächst einmal als affine Böschungslinien gekennzeichnet und es gilt

Satz 1: Die D-Kurven einer Fläche 2. Ordnung Φ sind identisch mit jenen affinen Böschungslinien von Φ, deren Tangentenrichtkegel konzyklisch mit Φ sind[4].

Durch Spezialisierung auf *Drehquadriken* ergibt sich in Übereinstimmung mit einer Bemerkung von W. Blaschke, daß deren D-Kurven mit ihren (vielfach betrachteten) *gewöhnlichen Böschungslinien* für lotrechte Achsenlage zusammenfallen[5].

Durch Satz 1 werden die D-Kurven der Quadriken einer *konstruktiven Behandlung* zugänglich gemacht, die auf der Anwendung der vom Verfasser vor einiger Zeit entwickelten projektiven Theorie der Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung beruht[6]. Dies findet sich in der unter Fußnote 3 genannten Arbeit näher ausgeführt.

3.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der Schmiegkugelmitten zu, wobei wir uns vorübergehend der Rechnung bedienen wollen. Sei — bei Beschränkung auf Mittelpunktsflächen —

$$\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 + \gamma\, z^2 = \delta \tag{1}$$

die Gleichung der *Grundquadrik Φ* in Normalkoordinaten x, y, z, so wird der konzyklische *Tangentenrichtkegel* einer D-Linie etwa durch

$$(\alpha - \lambda)\, x^2 + (\beta - \lambda)\, y^2 + (\gamma - \lambda)\, z^2 = 0 \tag{2}$$

---

[4] Diese Aussage ist bei Mittelpunktsquadriken offenbar äquivalent mit einem Satz von *A. Pell*, wonach die zu den Tangenten einer D-Kurve parallelen Flächendurchmesser gleich lang sind. *Pell* scheint jedoch nicht beachtet zu haben, daß Durchmesser gleicher Länge auf einem (konzyklischen) Kegel 2. Ordnung liegen. — Es ist hervorzuheben, daß der hier bewiesene Satz 1 auch für Flächen ohne Mittelpunkt gilt.

[5] *W. Blaschke*: Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Mh. Math. Phys. 19 (1908), 188—204.

[6] *W. Wunderlich*: Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 155 (1947), 309—331.

dargestellt. Der parallele, von einem Flächenpunkt $T\,(x_0, y_0, z_0)$ ausstrahlende *Kegel Δ* hat dann die Gleichung

$$(\alpha - \lambda)\,(x - x_0)^2 + (\beta - \lambda)\,(y - y_0)^2 + (\gamma - \lambda)\,(z - z_0)^2 = 0, \tag{3}$$

und deren Subtraktion von (1) liefert die zu T gehörige, im Büschel $\Phi\Delta$ enthaltene *Schmiegkugel Σ* mit

$$\lambda\,(x^2 + y^2 + z^2) + 2\,(\alpha - \lambda)\, x x_0 + 2\,(\beta - \lambda)\, y y_0 + 2\,(\gamma - \lambda)\, z z_0 + \\ + \lambda\,(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 2. \tag{4}$$

Hieraus lesen wir nun unmittelbar die Koordinaten des zu T gehörigen *Schmiegkugelzentrums T^** ab:

$$x_0^* = (1 - \frac{\alpha}{\lambda})\, x_0,\quad y_0^* = (1 - \frac{\beta}{\lambda})\, y_0,\quad z_0^* = (1 - \frac{\gamma}{\lambda})\, z_0. \tag{5}$$

Der Übergang von T zu T^* wird demnach durch eine gewisse Affinität bewerkstelligt, welche die Hauptebenen der Quadrik festläßt. Ein geeigneter Grenzübergang dehnt die Gültigkeit dieser Beziehung auch auf die Flächen ohne Mittelpunkt aus, so daß wir allgemein aussprechen können den

Satz 2: Bei jeder allgemeinen D-Linie einer Quadrik hängen die Punkte mit den zugehörigen Schmiegkugelmitten durch eine Raumaffinität zusammen, welche die Hauptsymmetrieebenen der Fläche festläßt.

Die von den Schmiegkugelmitten erfüllte *Polare* (*Planevolute*) k^* einer solchen D-Linie k ist danach gleichfalls *affine Böschungslinie einer Quadrik Φ^**, jedoch im allgemeinen selbst keine D-Linie mehr, wie man sich leicht überzeugt. Wohl trifft dies hingegen bei den *Drehquadriken* zu, wie auf Grund der Bemerkung im Anschluß an Satz 1 klar ist.

4.

Der Hauptzweck der vorliegenden Note ist es nun, zu zeigen, daß der gefundene affine Zusammenhang kennzeichnend ist, d. h. daß es *außer den D-Linien der Quadriken keine anderen Raumkurven gibt, deren Punkte und Schmiegkugelzentren durch eine Affinität gekoppelt sind.*

Sei also k eine Raumkurve mit der genannten Eigenschaft, k^* ihre Polare und $\mathfrak{A}$ die laut Voraussetzung bestehende Affinität, welche den Punkten T, Tangenten t und Schmiegebenen τ von k die entsprechenden Elemente T^*, t^* und τ^* von k^* zuordnet. Die von den Streifenelementen (t, τ) und (t^*, τ^*) in der Fernebene erzeugten *uneigentlichen Linienelemente* (T_u, t_u) und (T_u^*, t_u^*) hängen einerseits ebenfalls durch die *Affinität* $\mathfrak{A}$ zusammen, anderseits — wegen $t \perp \tau^*$ und $t^* \perp \tau$ — aber auch durch die *absolute Polarität* $\mathfrak{B}$. Hieraus fließt die Beziehung

$$t_u = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A} \,.\, T_u,$$

d. h. T_u und t_u entsprechen einander in der *Korrelation* $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}$. Die bestehende Inzidenz zwischen T_u und t_u ist dann aber bekanntlich nur unter der Bedingung möglich, daß T_u dem „*Punktkernkegelschnitt*" c von $\mathfrak{C}$ angehört. Da c als Fernkurve der Tangentenfläche von k auch von den Geraden t_u eingehüllt erscheint, kommt c gleichzeitig die Rolle des „*Geradenkernkegelschnittes*" zu und $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{-1}$ ist eine *Polarität.*

Es steht nun bereits fest, daß die Kurven k und k^* *affine Böschungslinien* sein müssen. Ihre Leitkegelschnitte c und c^* entsprechen einander in der absoluten Polarität $\mathfrak{B}$ und sind daher punktweise durch eine nicht ausgeartete lineare Verwandtschaft aufeinander bezogen, deren Doppeldreieck gemeinsames Poldreieck von c, c^* und dem absoluten Kegelschnitt ist. Beschränken wir uns hierbei ausdrücklich auf die reellen Möglichkeiten, so können wir sagen, daß die *Raumaffinität* $\mathfrak{A}$ (wenigstens) *drei paarweise orthogonale Richtungen festlassen muß*, also keineswegs ganz beliebig vorgebbar ist.

Benützen wir ein in diese ausgezeichneten Richtungen weisendes Achsenkreuz x, y, z, dann kann die Affinität $\mathfrak{A}$ angesetzt werden mit

$$x^* = ax + A,\; y^* = by + B,\; z^* = cz + C,\; (abc \neq 0); \qquad (6)$$

hierbei dürfte die additive Konstante jeweils weggelassen werden, wenn der zugehörige Koeffizient von 1 verschieden ist. Durch die Annahme von $\mathfrak{A}$ sind auch die beiden polaren Fernkegelschnitte c und c^* als Fundamentalkurven der Polaritäten $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, bzw. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in der Fernebene mitbestimmt. Sie werden beschrieben durch

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^{*2}}{a} + \frac{y^{*2}}{b} + \frac{z^{*2}}{c} = 0. \qquad (7)$$

Gehen wir nunmehr von einem Punkt $T\,(x_0, y_0, z_0)$ allgemeiner Lage aus, so ist über das Schmiegkugelzentrum $T^* = \mathfrak{A}\,T$ auch seine Tangente t bekannt, und zwar auf Grund der Bedingung, normal auf TT^* zu stehen und den Leitkegelschnitt c zu treffen. Jedem Raumpunkt sind auf diese Weise zwei Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, deren Integration auf *Raumkurven mit affiner Planevolute* führt. Zu jeder Integralkurve k gehört nämlich eine affine Kurve $k^* = \mathfrak{A}\,k$, deren Schmiegebene τ^* sicher zu t normal ist und wegen $t \perp TT^*$ den Punkt T

von k enthält, also Normalebene von k ist; k^* ist somit tatsächlich die Planevolute von k.

Die von den beiden Fortschreitungsrichtungen t aufgespannte Ebene $\vartheta \perp TT^*$ hat die Stellung

$$[(a-1)\,x_0 + A]\,x + [(b-1)\,y_0 + B]\,y + [(c-1)\,z_0 + C]\,z = \text{const}, \qquad (8)$$

kann demnach als Tangentialebene einer *Quadrik* Φ

$$(a-1)\,x^2 + (b-1)\,y^2 + (c-1)\,z^2 + 2\,A\,x + 2\,B\,y + 2\,C\,z = \text{const} \qquad (9)$$

angesehen werden. Das bedeutet aber: Die ∞^2 Integralkurven unseres Problems sind identisch mit den durch den Leitkegelschnitt c auf den ∞^1 homothetischen Flächen Φ definierten affinen Böschungslinien. Diese stellen aber wiederum *D-Linien der Quadriken* Φ dar, weil c die absoluten Punkte dieser Flächen enthält.

Damit ist nun tatsächlich die behauptete Umkehrung des Satzes 2 erwiesen:

Satz 3: Besteht bei einer reellen Raumkurve ein affiner Zusammenhang zwischen ihren Punkten und Schmiegkugelmitten, dann ist sie D-Kurve einer Quadrik.

Printed in Austria.