

Schäufel. Darum nenne man ja auch die Archäologie gerne die „Wissenschaft vom Spaten“. Auch Schiebekarren, Feldbahnen und Lastkraftwagen gehören bei größeren Unternehmungen zu den technischen Hilfsmitteln. Wenn es sich hingegen um kleinere oder sehr empfindliche Objekte handelt, dann muß ganz behutsam gearbeitet werden: mit Spachtel und Messer, mit Sieb und Löffel, mit Besen, Bürste oder Pinsel, je nachdem, ob etwa ein Mosaik oder ein Grab freigelegt oder ein Skelett fein säuberlich aus dem Erdbreich herauspräpariert werden soll. Dazu gehören viel Geduld und Sorgfalt, aber auch Erfahrung und Verantwortungsgefühl. Denn man kann ja den Boden nur ein einzigesmal befragen: wird die Ausgrabung unsachgemäß vorgenommen, dann sind die Bodendenkmäler nutzlos und für immer zerstört.

Eine nicht minder verantwortungsvolle Aufgabe ist dem Archäologen nach Beendigung der Grabung gestellt. Er muß

ja erst die Ergebnisse seiner Arbeit auswerten und darüber einen ordentlichen Bericht publizieren. Das ist oft nur mit Hilfe zahlreicher Nachbarwissenschaften möglich: Der Zoologe und der Botaniker untersuchen z. B. die tierischen und pflanzlichen Überreste, der Geologe bestimmt Art und Herkunft des Baumaterials, der Anthropologe gibt über Alter, Geschlecht und Rasse von Skelettfunden Auskunft, das Mikroskop belehrt uns über die Zusammensetzung aufgedauter Speisereste, Gewandre, der verwendeten Metalle und so fort. Denn heute wird auch das kleinste und unscheinbarste Fundstück beachtet, da nur dank der umfassenden und spezialisierten modernen Untersuchungsmethoden unser Ziel erreicht werden kann: ein möglichst vollständiges Bild vom Leben der Vergangenheit zu erhalten, mit der wir, die Nachfahren, durch die Kette der Geschlechter unlösbar verbunden sind.

W. Wunderlich

## Über den unterrichtlichen Wert nichtdekadischer Zahlensysteme

In unserem Zahlensystem spielt die Zehn eine ausgezeichnete Rolle. Sie ist die Grundlage der daselbst herrschenden Ordnung, die in einer sogenannten „Stufung“ besteht: Zehn Einheiten werden zu einer neuen, größeren Zähleinheit zusammengefaßt, eben der Zehn; fortschreitend wiederum zehn solche Zehner zu einer höheren Einheit, der Hundert, dann zehn Hunderter zu einem Tausender usw. Dieses Prinzip ist uralt und findet seinen sprachlichen Ausdruck in der Tatsache, daß zur Bezeichnung dieser höheren Einheiten jeweils ganz neue Wortstämme auftreten, während die übrigen Zahlwörter als Zusammensetzungen dieser Zähleinheiten mit den Namen für die Zahlen von 1 bis 9 erscheinen.

Auch in der Schrift, die ja ein Abbild der Sprache ist, kommt dieses Staffelpungsprinzip natürlich zur Geltung. Sehr rein ausgeprägt noch in den Hieroglyphen der Ägypter, bei den Römern schon einigermaßen gestört und bei den Griechen mit der Zeit kaum mehr erkennbar, da es zugunsten eines anderen, ganz unzuverlässigen Systems geopfert wurde.<sup>1</sup> — Die heute allgemein gebräuchliche, vom mathematischen Standpunkt aus einzig vernünftige Zahlenschreibweise, die den Stellenwert ausnützt und demgemäß — bei unbeschränkter Anwendbarkeit — mit zehn Zahlzeichen auskommt, ist verhältnismäßig jung. Ihre Erfindung wird bekanntlich den Indern zugeschrieben, von denen sie im 9. Jahrhundert durch die Araber übernommen wurde; sie gelangte dann erst im 13. Jahrhundert nach Europa und brauchte hier noch 300 Jahre, um sich durchzusetzen. Der geniale Kunstgriff des unbekannten Erfinders bestand darin, jeder angeschriebenen Ziffer eine doppelte Aufgabe zuzuweisen, nämlich neben ihrem von der Gestalt abhängigen Zahlwert auch noch durch ihre Position die Art der gezählten Einheiten anzuzeigen. Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Einführung eines „Fehlzeichens“ für nicht vorhandene Einheiten, um die Rolle der angeschriebenen Ziffern eindeutig zu kennzeichnen. Vielfach wird gerade die Erfindung der Null als die eigentliche Großtat angesehen.

Wie jedes vernünftige System hat natürlich auch die Einführung der modernen Zahlenschreibweise gewaltige Fort-

schritte mit sich gebracht. Nicht nur die Mathematik als Wissenschaft hat entscheidende Auftriebe erhalten — nämlich auf dem Gebiet des numerischen Rechnens (Dezimalbrüche, Logarithmen, Rechenmaschinen usw.) — sondern vor allem ist es die allgemeine Verbreitung der Rechenfertigkeit überhaupt, die erst durch das Positionssystem ermöglicht wurde. Ein Gelehrter des Altertums hätte es wahrscheinlich nicht für denkbar gehalten, daß dereinst Multiplikationen und Divisionen von Kindern spielend erledigt werden würden.

Daß gerade die Zahl Zehn die führende Rolle in unserem Zahlensystem übernommen hat, hat einen rein anatomischen Grund, weil der Mensch eben zehn Finger hat und diese als Hilfsmittel zum Zählen gut zu gebrauchen sind. An und für sich könnte die Zehn aber durch jede andere Grundzahl ersetzt werden (wenn man von Teilbarkeitsfragen absieht). In der Tat verwendeten beispielsweise die Mayas das Zwanzigersystem und bei den Babyloniern spielte ein Sechzigersystem eine gewisse Rolle, das heute noch in unserer Zeit- und Winkelunterteilung nachwirkt. Auch die höhere Mathematik bedient sich gelegentlich nichtdekadischer Zahlensysteme.

Ist  $g > 1$  eine ganze Zahl, so stehen in dem über dieser Grundzahl errichteten „ $g$ -adischen System“ die  $g$  Zahlzeichen  $0, 1, \dots, g-1$  zur Verfügung und eine mittels solcher Ziffern angeschriebene Zahl hat den Wert

$$z_n \dots z_1 z_0 = z_0 + z_1 g + z_2 g^2 + \dots + z_n g^n \quad (z_i = 0, 1, \dots, g-1)$$

In den alten österreichischen Lehrplänen für den Mathematik-Unterricht an Mittelschulen war die Erörterung nichtdekadischer Zahlensysteme vorgesehen. Inzwischen ist dieses Kapitel, wie so manches andere, aus Zeitmangel über Bord geworfen worden, und das ist bedauerlich, denn die Beschäftigung mit fremden Zahlensystemen war durchaus geeignet, die Einsicht in das eigene Zehnersystem zu vertiefen und die Festigung des reinen Zahlbegriffs zu fördern. Erfahrungsgemäß hat der Schüler beim Beginn des Buchstabenrechnens mit gewissen grundsätzlichen Schwierigkeiten zu kämpfen, die darauf beruhen, daß er sich von der bereits eingefleischten Ziffernschreibweise der Zahlen zu nächst losreißen muß. Die Erkenntnis der Unabhängigkeit des Zahlwertes von der Ziffernschreibung würde durch

<sup>1</sup> Auszug aus einem am 25. 9. 1950 anlässlich der „Tagung für mathematischen Unterricht“ in Graz gehaltenen Vortrag.

<sup>2</sup> Vgl. etwa K. Menninger: Zahlwort und Ziffer (Hirt, Breslau, 1934), oder E. Löffler: Ziffern und Ziffernsysteme, I u. II (Teubner, Math. Phys. Bibl. I u. 34).



kurze Beschäftigung mit fremden Zahlensystemen sicherlich erleichtert.

Voraussetzung ist dabei allerdings, daß der Schüler die Überzeugung gewinnt, daß die anderen Zahlensysteme dem dekadischen durchaus *ebenbürtig* sind, und hier hat es seinen Haken: Man hat sich nämlich im Grunde genommen auf die Verwandlung von Zahlenbildern aus einem System ins andere beschränkt. Es wurden wohl auch Aufgaben gestellt, welche etwa die Addition oder Multiplikation von sagen wir im Fünfersystem angeschriebenen Zahlen verlangten, aber die Ausführung wurde wohl stets auf dem Umwege über das Zehnersystem vollzogen. Damit wird der Zweck der Übung jedoch nicht erreicht, denn der Schüler wird hierbei keinesfalls den Eindruck der Gleichwertigkeit des fremden Systems erhalten. Andererseits kann man ihm aber auch gar nicht zumuten, die Rechnung direkt im fremden System durchzuführen, denn dazu ist er einfach nicht imstande: Er beherrscht ja weder dessen *Einmaleins*, noch — was vielleicht noch nötiger wäre — das „*Einsundeins*“. Die Kenntnis dieser „Gedächtnistabellen“ ist ja auch im Zehnersystem Grundvoraussetzung für das Rechnen, und ihre sichere und geläufige Beherrschung läßt sich nicht von heute auf morgen erlernen, sondern es bedarf mancher Jahre dazu. Sich neben den Gedächtnistabellen des Zehnersystems jetzt zusätzlich noch jene eines neuen Systems einzuprägen, wäre doppelt schwierig, weil das Gedächtnis mit den alten schon belastet ist; der fragwürdige Nutzen stünde überdies wirklich in keinem Verhältnis zur aufzuwendenden Mühe. Immerhin wird die Bedeutung des Kopfrechnens durch solche Erwägungen schlagartig erleuchtet.

Wenn es gestattet ist, in diesem Zusammenhange ein Gleichnis zu gebrauchen, so mögen die verschiedenen Zahlensysteme mit den verschiedenen (Kultur-)Sprachen verglichen werden: Diese gestatten jeden Begriff durch Worte wiederzugeben, jene jede Zahl durch Ziffern festzuhalten. Besitzt jemand aber bloß das *Wörterbuch* einer Fremdsprache, ohne gleichzeitig deren *Grammatik* zu beherrschen, so wird sie ihm in keiner Weise seine Muttersprache ersetzen können, ja überhaupt kaum etwas nützen. Ebenso wenig Gewinn bringt das *Übersetzen* von Zahlenbildern in ein fremdes System, wenn in demselben nicht *gerechnet* wird!

Nun gibt es aber ein Zahlensystem, dessen „Grammatik“ sofort erlernt werden kann, so daß das Rechnen in demselben keinerlei Schwierigkeiten bereitet, ja geradezu als unterhaltsam zu bezeichnen ist: Gemeint ist das System mit der kleinsten denkbaren Grundzahl  $g = 2$ , das *Zweiersystem*. Dieses benötigt zur Darstellung der Zahlen nur die Ziffern 0 und 1; die Zahl Zwei wird schon durch 10 ausgedrückt, drei durch 11, vier durch 100, fünf durch 101 usw.; auf die einfachen Verwandlungsvorschriften soll hier nicht näher eingegangen werden. — Wird nun das Rechnen mit der Null als trivial nicht eigens erwähnt, so besteht das *Einmaleins* jetzt wirklich bloß aus dem altvertrauten „ $1 \times 1 = 1$ “. Neu erscheint hingegen die Grundregel des *Einsundeins*, „ $1 + 1 = 10$ “, die im Wortlaut

„*Eins und eins ist zehn*“

einzuprägen ist. Die nächste Formel „ $10 + 1 = 11$ “ sieht wieder bekannt aus, und weitere Regeln können bei entsprechender Auswahl der Beispiele leicht entbehrt werden.

Wie einfach sich nun das Rechnen im Zweiersystem vollzieht, wenn man sich des angegebenen sprachlichen Tricks bedient, dyadisch angeschriebene Zahlen unbekümmert um ihre Bedeutung dekadisch zu lesen, mag etwa an der folgenden *Multiplikationsaufgabe* beurteilt werden:

$$\begin{array}{r} 10011 \cdot 1101 \\ 10011 \\ 10011 \\ \hline 11110111 \end{array}$$

Kopfmultiplikationen fallen weg, da der erste Faktor nur wiederholt angeschrieben zu werden braucht, und *laut* gerechnet wird erst beim Addieren (die fett gedruckten Ziffern sind von rechts nach links anzuschreiben): **1, 1, 1, 1** und 1 ist 10 (0 an, bleibt 1), 1 und 1 ist 10, und 1 gibt 11 (1 an, bleibt 1), **1, 1, 1**. — Ausgeführt wurde die Multiplikation  $19 \cdot 13 = 247$ , wie die Verwandlung ins Zehnersystem ergibt, die gleichzeitig als Probe dienen kann.

Als zweites Beispiel sei noch die *Division*  $99 : 9 = 11$  vorgeführt. Sie lautet im Zweiersystem

$$\begin{array}{r} 1100011 : 1001 = 1011 \\ 1101 \\ 1001 \\ \hline 0 \end{array}$$

Die erste Ziffer des Quotienten ist immer 1; multipliziert braucht wieder nicht zu werden, es wird nur subtrahiert: 1 und 1 ist 10 (bleibt 1), 1 und 1 ist 10, dann folgen nur noch Nullen; nächste Stelle 0 herab, gibt im Quotienten 0; 1 herab, gibt 1, 1 und 0 ist 1, 0, 0 und 1 ist 1; 1 herab, gibt 1, kein Rest.

Wie diese Beispiele zeigen, ist das Rechnen im Zweiersystem sicher eher leichter als im dekadischen. (Man mache sich einmal das Vergnügen, eine Quadratwurzel zu ziehen!). Die Ersparnis an Gedächtnisarbeit geht allerdings auf Kosten von Zeit und Platz, denn eine Zahl hat im Zweiersystem rund dreimal so viel Ziffern wie im Zehnersystem<sup>3</sup>. Einfache Rechnungen, die wir im Kopfe zu lösen gewohnt sind, erfordern im Zweiersystem bereits eine schriftliche Ausführung. Es hat also auch unser bewährtes Zehnersystem seine Vorteile, aber das Zweiersystem hat seine Konkurrenzfähigkeit unzweifelhaft unter Beweis gestellt. Es sei bei dieser Gelegenheit erwähnt, daß es heute die Grundlage für manche der modernen „elektronischen Rechenmaschinen“ abgibt, von deren Wunderleistungen in letzter Zeit so oft zu lesen ist.

Über einige interessante Anwendungen nicht dekadischer Zahlensysteme in der Mathematik mag vielleicht bei anderer Gelegenheit berichtet werden.

Wenn die vorstehenden Ausführungen, in denen versucht wurde, für ein heute vernachlässigtes Kapitel der Schulmathematik eine Lanze zu brechen, auch keinen anderen Erfolg haben sollten, als vielleicht dem einen oder anderen Lehrer mit dem „Hexeneinmaleins“ — dessen sich der Verfasser seinerzeit bei solchen Gelegenheiten gerne bediente — über eine unangenehme Supplierstunde hinwegzuhelfen, so sind sie nicht vergebens geschrieben worden.

<sup>3</sup> Das Stellenverhältnis nähert sich bei wachsendem Zahlwert asymptotisch dem Wert  $\lg 10 : \lg 2 = 3,322$ .

**Wir bitten unsere Leser, bei der Einsendung von Lösungen darauf zu achten, daß die laufende Nummer der Aufgabe mit angegeben wird.**

**Die eingesendeten Lösungen werden, beginnend mit dem 7. Heft, zur Veröffentlichung gelangen.**