

sechs verschiedene Linearformen mit konstanten Koeffizienten. Betrachtet wird die durch das Gleichungstripel

$$x_i^* = a_i/b_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

erklärte Punkttransformation $\mathfrak{X} = X \rightarrow X^*$ zweier ebenen Systeme \mathfrak{C} und \mathfrak{C}^* , beschrieben durch die homogenen Punktkoordinaten x_i , bzw. x_i^* . — Die durch Nullsetzen der Linearformen (1) in \mathfrak{C} ausgezeichneten Geraden mögen gleichfalls mit a_i und b_i bezeichnet werden; unter i, k, l stets irgend eine zyklische Anordnung der Indizes 1, 2, 3 verstanden, bedeute A_i den Schnittpunkt der Geraden a_k und a_l , B_i den Schnitt von b_k und b_l , C_i den Schnitt von a_i und b_i .

Wie nach Wegschaffen der Nenner in (2) zu erkennen ist, handelt es sich bei \mathfrak{X} um eine kubische Verwandtschaft. Den Geraden g von \mathfrak{C} entsprechen in \mathfrak{C}^* rationale Kurven 3. Ordnung g^* . Die Geraden h^* von \mathfrak{C}^* sind hingegen im allgemeinen die Bilder von elliptischen Kubiken h aus \mathfrak{C} ; letztere sind einem linearen Netz entnommen, das von den drei zerfallenen Kubiken $a_i, b_k, b_l = 0$ aufgespannt wird, welche den Koordinatenachsen $x_i^* = 0$ zugeordnet sind. Da die Punkte B_i und C_i allen drei Netzkomponenten angehören, sind sie auch sämtlichen Kubiken h gemeinsam; das Netz der h besitzt mithin die sechs Grundpunkte B_1, B_2, B_3 und C_1, C_2, C_3 , welche die Hauptpunkte der Ebene \mathfrak{C} abgeben. Die Verwandtschaft \mathfrak{X} ist dreideutig, da im allgemeinen jedem Punkt X vermöge (2) ein einziger Bildpunkt X^* zugeordnet wird, hingegen jeder Punkt X^* , etwa als Schnitt zweier Geraden h^* aufgefaßt, die drei freien Schnittpunkte der entsprechenden Kubiken h als Urbilder X besitzt.

Einer Geraden h_i^* durch die — einen Hauptpunkt abgebende — Ecke A_i^* des Koordinatendreiecks in \mathfrak{C}^* , dargestellt durch

$$x_k^*/x_l^* = \lambda_i, \quad (3)$$

entspricht in \mathfrak{C} eine zerfallende Kubik, bestehend aus der festen Geraden b_i und dem veränderlichen Kegelschnitt h_i

$$a_k b_l/a_l b_k = \lambda_i. \quad (4)$$

Dieser gehört dem von den Geradenpaaren a_k, b_l und a_l, b_k aufgespannten Büschel an, enthält also die festen Punkte A_i, B_i, C_k und C_l . — Das aus den drei Strahlbüscheln A_i^* aufgebaute geradlinige Dreiecksnetz wird mithin durch \mathfrak{X}^{-1} in ein Dreiecksnetz aus Kegelschnitten verwandelt. Drei zusammengehörige — d. h. durch einen Punkt gehende — Gerade h_1^*, h_2^*, h_3^* sind gekennzeichnet durch

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad (5)$$

Über ein spezielles Dreiecksnetz aus Kegelschnitten.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 7. Dezember 1950.)

Das allgemeinste Dreiecksnetz aus Geraden wird nach dem bekannten Satz von H. Graf und R. Sauer von den Tangenten einer beliebigen Kurve dritter Klasse erzeugt¹. Diese darf auch zerfallen, so daß sich insbesondere auch die Strahlen dreier beliebiger Büschel zu einem Dreiecksnetz anordnen lassen.

Im Gegensatz zu diesem restlos geklärten Sachverhalt ist die Frage nach den Dreiecksnetzen, die sich aus Kegelschnitten (insbesondere Kreisen) aufbauen, keineswegs in voller Allgemeinheit gelöst. Den zahlreichen bekannt gewordenen Beispielen², die zum Großteil mittels quadratischer Transformationen aus geradlinigen Dreiecksnetzen abgeleitet wurden, wird in der vorliegenden Note ein weiteres Beispiel hinzugefügt, das auf der Verwendung einer kubischen Transformation beruht.

1.

Seien

$$a_i \equiv \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j; \quad b_i \equiv \sum_{j=1}^3 b_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

¹ Vgl. W. Blaschke-G. Bol: Geometrie der Gewebe (Berlin 1938), 24; Originalbeweis: H. Graf-R. Sauer, Sitzungsber. bayer. Ak. Wiss. 1924; vereinfachte Darstellung von W. Blaschke: Tôhoku Math. J. 37 (1933).

² Erwähnt seien etwa: R. Sauer-O. Baur, Jahresber. d. DMV. 43 (1934); W. Schmid, Mh. Math. Phys. 40 (1933), 45 (1936), 47 (1938), Cas. mat. fys. 66 (1937); K. Strubecker, Mh. Math. Phys. 39 (1932); O. Volk, Sitzungsber. bayer. Ak. Wiss. 1929; W. Wunderlich, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, 147 (1938).

Weitere nichttriviale Kegelschnitts-Dreiecksnetze ließen sich beispielsweise auch mittels Projektion einer Dupinschen Zyklide (insbesondere der Torusfläche) gewinnen, da auf einer solchen je drei der vier Kreissysteme Dreiecksnetze erzeugen.

ebenso die drei zusammengehörigen Kegelschnitte h_1, h_2, h_3 des Dreiecksnetzes in \mathbb{C} .

Damit hat sich ergeben der

Satz I: Sind $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ zwei Dreiecke in der Ebene und C_1, C_2, C_3 die Schnittpunkte entsprechender Seiten, so erzeugen die den drei Büscheln $A_1B_1C_3C_1, A_2B_2C_3C_2$ und $A_3B_3C_1C_2$ entstammenden Kegelschnitte ein Dreiecksnetz. Je drei zusammengehörige Kegelschnitte haben drei Punkte gemein.

2.

Ein aus diskret angeordneten Exemplaren gebildetes Dreiecksnetz ergibt sich bei Benützung der Parameterwerte

$$\lambda_i = m_i q^n \text{ mit } m_1 m_2 m_3 = 1, q \neq 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Sind die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ reell, so muß für ein reelles Dreiecksnetz auch q reell vorausgesetzt werden; das Netz enthält dann (von der trivialen Ausnahme $q = -1$ abgesehen) unendlich viele Kegelschnitte.

Reelle Dreiecksnetze existieren jedoch auch zu konjugiert-imaginären Grunddreiecken. Die Punkte C_j fallen hierbei auf jeden Fall reell aus, und die Parameterwerte λ müssen gemäß (4) lediglich mit Einheitsbetrag angenommen werden:

$$\lambda_j = \exp 2i\varphi_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Zusammengehörige Netzlinien sind nun durch

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (8)$$

gekennzeichnet, und man erhält ein diskretes Dreiecksnetz, wenn man $\varphi_j = \mu_j + n\delta$ mit $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \equiv 0 \pmod{\pi}, \delta \neq 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (9) wählt. Es besteht aus endlich vielen Kegelschnitten, die die Ebene einfach überdecken, wenn $N = \pi/2\delta$ ganz ist; im allgemeinen ist dann die Anzahl der Kegelschnitte $3N$, die Anzahl der eigentlichen Knoten $3N^2$.

In Abb. 1 ist ein derartiges Kegelschnitts-Dreiecksnetz dargestellt, das sich überdies durch dreizählige Drehsymmetrie auszeichnet. Mit Benützung inhomogener Normalkoordinaten x, y und ausgehend von dem Grundpunktepaar $A_1(0, i), B_1(0, -i)$, aus welchem die übrigen durch Drehungen um $\pm 120^\circ$ hervorgehen, ergeben sich die Grundseiten

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv 2y + i = 0, & a_{2,3} &\equiv \pm x\sqrt{3} + y - i = 0; \\ b_1 &\equiv 2y - i = 0, & b_{2,3} &\equiv \pm x\sqrt{3} + y + i = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

die Punkte C_j fallen in drei um je 120° versetzten Richtungen ins Unendliche.

Wegen der Drehsymmetrie genügt es, das erste Kegelschnittsbüschel (4) zu betrachten, wobei gemäß (7) $\lambda = e^{2i\varphi}$ zu setzen ist. Nach kurzer Rechnung erhält man über den verschwindenden Imaginärteil von

$$(x\sqrt{3} + y - i)(-x\sqrt{3} + y + i)(\cos\varphi - i\sin\varphi) \quad (11)$$

die Kegelschnittsgleichung

$$(x\sqrt{3}\sin\varphi + \cos\varphi)^2 - (y\sin\varphi)^2 = 1. \quad (12)$$

Es liegen durchwegs Hyperbeln mit 120° Asymptotenwinkel vor; Mittelpunktsabzisse und Halbachsen betragen der Reihe nach $-1/\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi, 1/\sqrt{3}\sin\varphi, 1/\sin\varphi$. Die Konstruktion gestaltet sich recht einfach, wenn man beachtet, daß auch die Scheitelkreise der Hyperbeln einem Büschel — mit den Grundpunkten $(0, \pm 1/\sqrt{3})$ — angehören.

Den Parameterwerten der Figur liegen die Ausgangsgrößen $\mu_j = 0$ und $\delta = 18^\circ$ zugrunde ($N = 6$).

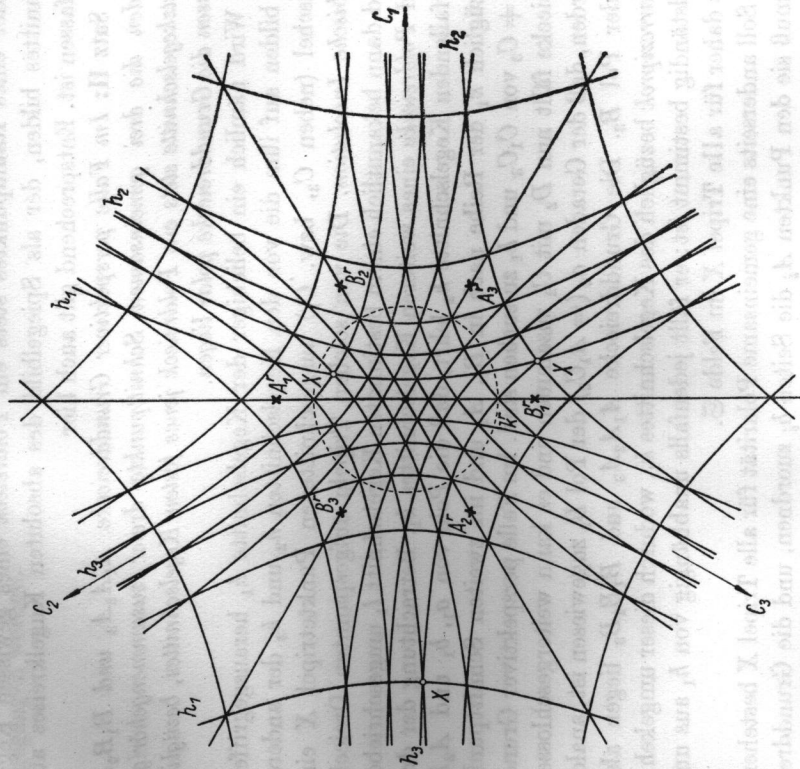


Abb. 1. Dreiecksnetz aus ähnlichen Hyperbeln. Die Ecken A, B der zugeordneteren konjugiert-imaginären Grunddreiecke sind durch ihre reellen Vertreter A', B' wiedergegeben. — Je drei verbundene Knotenpunkte X bilden ein Poldreieck bezüglich des nullteiligen Kreises k , dessen reeller Vertreter gestrichelt eingetragen ist.

da sich verbundene Punkte X nur auf k vereinigen können. Der Doppelkurve entspricht im Feld \mathfrak{S}^* eine Grenzkurve 6. Ordnung mit Doppelpunkten in A_1, A_2, A_3 ; sie wird von den Geraden g entsprechenden ∞^2 Kubiken g^* — die übrigens den der Achse $C_1C_2C_3$ entsprechenden Hauptpunkt C^* gemein haben — doppelt berührt.⁴

Jedes geradlinige Dreiecksnetz der Ebene \mathfrak{S} , das aus Strahlbüscheln mit Hauptpunkten als Scheiteln gebildet wird — es stehen hierfür die Punkte B_i und C_i zur Verfügung — wird durch die Transformation \mathfrak{X} gleichfalls in ein Dreiecksnetz aus Kegelschnitten in \mathfrak{S}^* verwandelt. Auf solche Dreiecksnetze, die die Grenzsextik als Einhüllende besitzen und eine kompliziertere Bauart aufweisen, soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden.

3.

Das in Abb. 1 dargestellte Dreiecksnetz ist nicht bloß in metrischer, sondern auch in projektiver Hinsicht ausgezeichnet: Die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ sind perspektiv, die Hauptpunkte C_1, C_2, C_3 liegen also auf einer Geraden.

Eine Transformation \mathfrak{X} dieses Typs tritt bei der Spiegelung am elliptischen Paraboloid auf und stellt unter Voraussetzung achsenparalleler Blickrichtung den Zusammenhang zwischen einem ebenen Feld \mathfrak{S}^* und seinem primären Spiegelbild \mathfrak{S} her. In einer diesbezüglichen Untersuchung³ ergab sich die Feststellung, daß die drei primären Spiegelbilder eines Raumpunktes stets ein Poldreieck eines gewissen Kegelschnittes bilden, der als Spiegelbild des absoluten Kugelkreises aufzufassen ist. Entsprechend gilt auch hier

Satz II: Im Falle perspektiver Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ bilden die drei gemeinsamen Schnittpunkte dreier zusammengehöriger Netzkegelschnitte stets ein Poldreieck jenes festen Kegelschnittes, bezüglich dessen die Grunddreiecke polar liegen.

Wird nämlich ein beliebiger der Kegelschnitte h_1 herausgegriffen, so bilden auf ihm die von den Kegelschnitten h_2 und h_3 der anderen Büschel (neben C_3 , bzw. C_2) ausgeschnittenen Punktetripel X eine kubische Involution. Die von solchen Tripeln aufgespannten Dreiecke sind dann bekanntlich einem bestimmten Kegelschnitt l_1 umgeschrieben und Poldreiecke eines weiteren Kegelschnittes k_1 . Betrachtung der drei zerfallenden Kegelschnitte h_2 lehrt, daß die Pole von a_1, b_1 und A_2B_2 bezüglich k_1 der Reihe nach in B_1, A_1 und im zweiten Schnittpunkt $D_2 \neq C_3$ von C_1C_3 und h_1 zu suchen sind. Im Falle perspektiver Grunddreiecke fällt nun D_2 mit C_2 zusammen und es kann weitergeschlossen werden, daß der Geraden $a_2 (= A_1C_2)$ der Pol B_2 zugewiesen ist, analog a_3 der Pol B_3 . Die Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ liegen also polarreziprok bezüglich des Kegelschnittes k_1 , wodurch dieser umgekehrt vollständig bestimmt ist; er fällt jedenfalls unabhängig von h_1 aus und gilt daher für alle Tripel X im Felde \mathfrak{S} .

Soll andererseits eine gemeinsame Polarität für alle Tripel X bestehen, so muß sie den Punkten A_i die Seiten b_i zuordnen, und die Grunddreiecke müssen als polare Dreiecke notwendig perspektiv liegen.

Der Fundamentalkegelschnitt k spielt bei einer solchen besonderen Verwandtschaft \mathfrak{X} offenbar die Rolle der Doppelkurve des Systems \mathfrak{S} ,

⁴ Im allgemeinen Falle (nichtperspektiver Grunddreiecke) wird die Doppelkurve von einer die Hauptpunkte C_i enthaltenden Kubik gebildet, der wieder eine Grenzkurve 6. Ordnung mit den Knoten A_i entspricht. Letztere wird von den Geradenbildern g^* dreifach berührt, hingegen fehlt der nur im Sonderfalle vorhandene gemeinsame Hauptpunkt C^* .