

Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken.

Von Walter Wunderlich.

Einleitung.

Unter den *Böschungslinien* des euklidischen dreidimensionalen Raumes versteht man bekanntlich jene Kurven, deren Tangenten einen festen Neigungswinkel α gegen eine bestimmte Grundebene, die man sich gern waagrecht denkt, aufweisen. Vom projektiven Standpunkt aus sind sie also dadurch gekennzeichnet, dass ihre Tangenten einen gewissen *Fernkreis* c (mit der Öffnung $\pi - 2\alpha$) treffen. Dieser Gesichtspunkt gestattet bei den *Flächen 2. Ordnung*, deren Böschungslinien wiederholt dass Interesse der Geometer auf sich gezogen haben, eine einfache und einheitliche, sowohl analytisch als auch darstellend-geometrisch auswertbare Behandlungsweise, die der Verfasser vor etwa 4 Jahren entwickelt hat.¹⁾

Diese projektive Methode lässt sich naturgemäss sofort auf die affinen und kollinearen Verallgemeinerungen dieser Kurven ausdehnen, also auf jene auf einer Fläche 2. Ordnung verlaufenden Linien, deren Tangenten einen beliebig vorgegebenen (uneigentlichen oder eigentlichen) „*Leitkegelschnitt*“ c treffen. Diese Übertragung auf „*projektive Böschungslinien*“ hat F. FABRICIUS-BJERRE in einer kürzlich erschienenen Arbeit vollzogen.²⁾

Man könnte noch einen Schritt weitergehen und eine beliebige *ebene Leitkurve* c voraussetzen. Die Bestimmung der auf einer vorgelegten regulären *Quadrik* Φ verlaufenden Kurven k , deren Tangenten t die Leitkurve c treffen, geschieht dann unter Benützung des Polarsystems von Φ in der folgenden Weise: Ist ω die Ebene von c und O ihr Pol, ferner Γ der von O ausstrahlende, zu c polare Kegel, so wird dieser von zu den Tangenten t konjugierten Flächentangenten \bar{t} berührt; das System der ∞^1 Linien k bildet daher zusammen mit den ∞^1 Flächenkegelschnitten \bar{k} , die in den Tangentialebenen von Γ liegen – es sind die Berührungs-

1) W. Wunderlich: Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 155 (1947), 309–331. Hier findet man auch ausführliche Literaturangaben über die früheren Untersuchungen, die sich hauptsächlich auf Rotationsquadriken (mit lotrechter Achse) beziehen.

2) F. Fabricius-Bjerre: Über projektive Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Danske Vid. Selsk., Mat. fys. Medd. 25 (1950), 3–21.

kegelschnitte der aus den Punkten von c an Φ legbaren Tangentenkegel — ein *konjugiertes Kurvennetz* auf Φ . Bedienen wir uns jetzt der Zentralprojektion aus O auf eine beliebige (natürlich O nicht enthaltende) Bildebene π , und beachten wir, dass die Bildgeraden t' und \bar{t} konjugierter Flächentangenten (allgemein: reziproker Polaren) t und \bar{t} konjugiert bezüglich des *scheinbaren Umrisses* u von Φ liegen, so erhalten wir in π ein bezüglich u konjugiertes Kurvennetz k', k' , wobei das System k' aus den Tangenten der Spurkurve $\Gamma' = I\pi$ besteht. Fassen wir schliesslich die (unter Umständen ausgeartete) Kurve 2. Klasse u als *Massgebilde* einer CAVLEY-KLEINSCHEN *Winkelmetrik* in der Bildebene π auf, dann können die Geraden t' und \bar{t}' als *normal* im Sinne dieser Massbestimmung angesehen werden, und das System k' besteht aus den *Evolventen* der Kurve Γ' . Es gilt mithin

Satz 1: *Die auf einer regulären Quadrik Φ verlaufenden Kurven, deren Tangenten eine vorgelegte ebene Kurve c treffen, erscheinen bei Zentralprojektion aus dem Pol der Ebene von c auf eine Bildebene π als Evolventen der Spurkurve des Polarkegels Γ von c bezüglich Φ , und zwar im Sinne iener Metrik in π , die sich auf den scheinbaren Umriss von Φ gründet.*

Im besonderen — für c als Kegelschnitt — haben wir den

Satz 2: *Die auf einer regulären Quadrik Φ verlaufenden projektiven Böschungslinien erscheinen bei Zentralprojektion aus dem Pol der Ebene des Leitkegelschnittes c als Kegelschnittsevolventen.*

Die analytische Darstellung dieser projektiven Böschungslinien erfordert im allgemeinen elliptische Integrale oder Funktionen. Unter den zahlreichen projektiv speziellen Lagemöglichkeiten ist vor allem die Annahme hervorzuheben, dass der Leitkegelschnitt c — und damit auch sein Polarkegel Γ — die Grundquadrik Φ doppelt berühren: In der Projektion treten dann euklidische oder nichteuklidische *Kreisevolventen* auf, die sich bekanntlich mittels elementarer Funktionen beschreiben lassen.

Während für Kurven auf einer Quadrik, die durch eine von einem Kegelschnitt verschiedene Leitkurve definiert sind, anscheinend keine Beispiele bekannt sind, gibt es für die *projektiven Böschungslinien* auf Quadriken einige bemerkenswerte Vertreter durchaus selbständiger Bedeutung, die in der vorliegenden Mitteilung kurz vorgeführt werden sollen. Es sind dies

1. die *sphärischen Kreistraktrizen*,
2. die *Nabelgodätischen der Quadriken*,
3. die *räumlichen Kreisevolutoiden*,
4. die *D-Kurven der Quadriken*.

Diese, dem ersten Anschein nach recht heterogenen, auf ganz verschiedenartigen und rein metrischen Begriffsbildungen beruhenden Kurven lassen sich, wie hier gezeigt werden soll, durchwegs als *projektive Böschungslinien* auffassen und erscheinen damit einem gemeinsamen Gesichtspunkt untergeordnet. Die damit zusammenhängende Möglichkeit einer konstruktiven Behandlung mit darstellend-geometrischen Mitteln wird durch die begleitenden Textfiguren dargetan.

1. Die sphärischen Kreistraktrizen.

Wir betrachten im Rahmen der Geometrie auf der Oberfläche einer Kugel Φ mit der kartesischen Gleichung

$$(1.1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

einen starr beweglichen Grosskreisbogen ST von der Länge β , dessen Ende T etwa durch eine Schneide oder eine Rolle daran verhindert wird, Querbewegungen auszuführen. Wird der Anfangspunkt S längs einer sphärischen Kurve h geführt, dann beschreibt T eine sphärische *Schleppkurve (Traktrix)* k von h . Die ∞^1 durch h und β definierten Schleppkurven k , die sich nur durch die Ausgangsstellung von ST unterscheiden, bilden die Orthogonaltrajektorien des Systems kongruenter Kugelkreise \bar{k} , die sich mit dem sphärischen Halbmesser β um die einzelnen Lagen von S schlagen lassen, und ergänzen dieses System zu einem konjugierten Netz.

Uns interessiert hier nur die Annahme, dass die Führungskurve h ein *Kreis* ist; sein sphärischer Radius sei mit γ bezeichnet, seine Ebene ω durch $z = \cos \gamma$ dargestellt. Das System der Hilfskreise \bar{k} gestattet nun die Drehungen um die z -Achse, ebenso das System der der Kugel längs der Kreise \bar{k} umschriebenen Drehkegel, deren Spitzen U demnach auf einem ausserhalb Φ verlaufenden Kreis c

$$(1.2) \quad x_0^2 + y_0^2 = r_0^2 = \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \beta}, \quad z_0 = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$$

angeordnet sind. Die Tangenten unserer Schleppkurven k liefern die Erzeugenden der genannten Kegel, treffen mithin allesamt den Leitkreis c , womit die *sphärischen Kreistraktrizen* für $\beta \neq \pi/2$ als *projektive Böschungslinien der Grundkugel* zu erkennen sind. Der Fall $\beta = \pi/2$, der einen unendlich fernen Leitkreis bedingt und auf die hinlänglich bekannten gewöhnlichen Böschungslinien der Kugel führt (Anstiegswinkel $\alpha = \pi/2 - \gamma$), mag in Hinkunft ausser Betracht bleiben.

Auf Grund der Doppelberührung zwischen c und Φ liegt hier der einleitend erwähnte Sonderfall vor. Je nach den Realitätsverhältnissen des Schnittes der Leitkreisebene ω mit der Kugel lassen sich bei den Kreistraktrizen (im Reellen) *drei Typen* unterscheiden, die auch in gestaltlicher Hinsicht wesentlich verschiedenes Gepräge zeigen³⁾:

- $|z_0| > 1$ ($\sin^2 \beta > \sin^2 \gamma$) ... „elliptischer Typ“
- $|z_0| < 1$ ($\sin^2 \beta < \sin^2 \gamma$) ... „hyperbolischer Typ“
- $|z_0| = 1$ ($\sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$) ... „parabolischer Typ“.

Nennen wir den Pol $O(0,0, \cos \beta / \cos \gamma)$ von ω kurz den „Hauptpunkt“ der Schleppkurven k , dann fliesst aus Satz 1 der

Satz 1.1: *Die Projektion einer sphärischen Kreistraktrix aus ihrem Hauptpunkt auf eine zum Führungskreis parallele Ebene ist eine Kreisevolvente, und zwar eine gewöhnliche für den parabolischen Typ, hingegen eine elliptisch- bzw. hyperbolisch-nicht-euklidische für den elliptischen bzw. hyperbolischen Typ.*

Zwecks Zurückführung unserer projektiven Böschungslinien auf gewöhnliche bedienen wir uns etwa der involutorischen *Zentralkollineation*

$$(1.3) \quad x^* = \frac{x}{\varepsilon z - 1}, \quad y^* = \frac{y}{\varepsilon z - 1}, \quad z^* = \frac{z}{\varepsilon z - 1} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{1}{z_0} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

Sie wirft den Leitkreis c ins Unendliche und verwandelt unsere Kreistraktrizen k in gewöhnliche, unter dem Winkel $\alpha = \pi/2 - \gamma$ ansteigende Böschungslinien k^* auf der der Kugel Φ entsprechenden *Drehquadratik* Φ^*

3) W. Wunderlich: Über die Schleppkurven des Kreises. Sitzungsab. Ak. Wiss. Wien 156 (1948), 155–173.

$$(1.4) \quad x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = (\varepsilon z^* - 1)^2.$$

ε gibt nebenbei die numerische Exzentrizität dieser Fläche an. Zur Darstellung dieser Böschungslinien stützen wir uns auf den Satz von A. ENNEPER, wonach sie im Normalriss auf die xy -Ebene als *zyklische Kurven* erscheinen⁴⁾; der Scheitelkreis rührt vom Flächenäquator her, hat daher dessen Radius

$$(1.5) \quad R = 1/\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

der Spitzenkreis stammt hingegen von dem Parallelkreispaar mit der Flächenneigung α , dessen Halbmesser

$$(1.6) \quad r = 1/\sqrt{1 - \varepsilon^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma}$$

beträgt.

Beim *elliptischen Typ* sind beide Radien reell und überdies $R > r$. Die genannte zyklische Kurve ist eine *Epizykloide* und die zugehörige Böschungslinie k^* des Ellipsoids Φ^* wird — nach geeigneter Festsetzung der x -Richtung — mittels eines Winkelparameters τ dargestellt durch

$$(1.7) \quad \begin{aligned} x^* &= r \cos \tau \cos R \tau + R \sin \tau \sin R \tau \\ y^* &= r \cos \tau \sin R \tau - R \sin \tau \cos R \tau \\ z^* &= R^2 (\pm r \operatorname{tg} \gamma \cos \tau - \varepsilon). \end{aligned}$$

Die leicht ausführbare Rücktransformation mittels (1.3) führt dann auf die Parameterdarstellung der Kreistraktrix k . — Man erkennt ohne weiteres, dass für ein rationales Verhältnis $r:R$ rational-algebraische Exemplare auftreten; setzt man in einem solchen Fall r und R als positiv-ganze und teilerfremde Zahlen voraus, dann ist $2(r+R)$ die Ordnung der Schleppkurve, die sich nach $R-r$ Umläufen schliesst und aus $2r$ kongruenten Bögen besteht, welche in Spitzen zusammenstossen. Die einfachste Annahme ist in Fig. 1 dargestellt: Es handelt sich um eine zu $r:R = 1:2$ gehörige zweispitzige Sextik.

Beim *hyperbolischen Typ* ist nur r reell, R hingegen rein imaginär, und die als Projektion auftretende zyklische Linie ist eine *Parazykloide*. Die Gleichungen der Böschungslinie k^* des zweischaligen Drehhyperboloides Φ^* nehmen nach Einführung

4) A. Enneper: Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Math. Ann. 19 (1882).

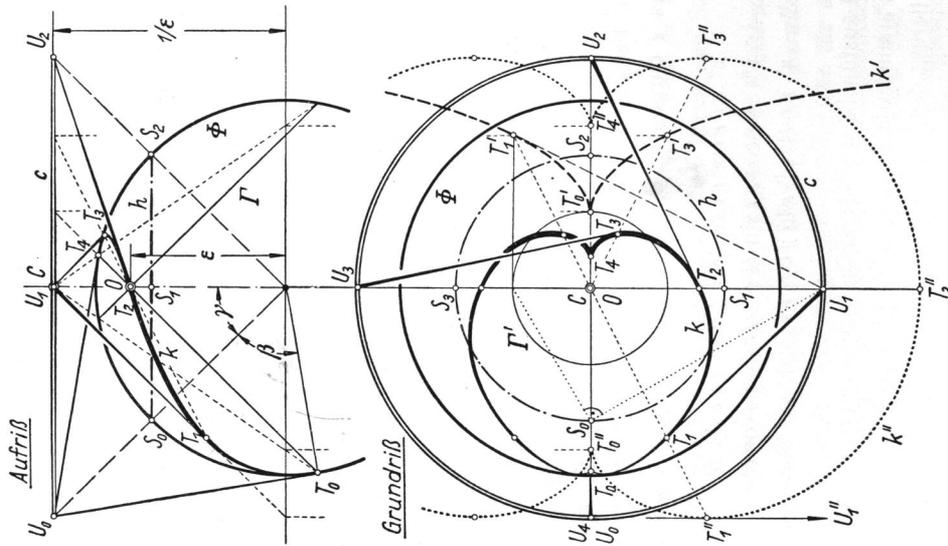


Fig. 1: Sphärische Kreistratrix elliptischen Typs ($\gamma = 45^\circ$, $\varepsilon = \cos \beta \cos \gamma = \sqrt{2}/2$), Projektion k' aus dem Hauptpunkt O auf die Leitkreisebene ... elliptische Kreisevolvente. Projektion k'' aus dem Leitkreiszentrum C auf die Äquatorebene ... Epizykloide.

der reellen Grössen $R' = R/\varepsilon = 1/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ und $\tau' = \tau i$ folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} x^* &= r \operatorname{ch} r \tau' \cos R' \tau' + R' \operatorname{sh} r \tau' \sin R' \tau' \\ y^* &= r \operatorname{ch} r \tau' \sin R' \tau' - R' \operatorname{sh} r \tau' \cos R' \tau' \\ z^* &= R'^2 (\varepsilon \mp \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ch} r \tau'). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Rücktransformation mittels (1.3) liefert dann die Darstellung der Schleppkurve k , die stets transitent ist und sich dem in der

Leitkreisebene ω ($z = z_0$) befindlichen Kugelkreis asymptotisch nähert.

Für den *parabolischen Typ* schliesslich wird $R = \infty$ und $r = \operatorname{ctg} \gamma$, und die Projektionslinie ist eine gewöhnliche *Kreisevolvente*. Aus deren bekannter Parameterdarstellung finden wir die Gleichungen der Böschungslinie k^* des Drehparaboloides Φ^* mit

$$\begin{aligned} x^* &= r (\cos \tau + \tau \sin \tau) \\ y^* &= r (\sin \tau - \tau \cos \tau) \\ z^* &= \frac{1}{2} (1 - r^2 - r^2 \tau^2). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Die zugehörige Kreistratrix ist gleichfalls transitent; sie besitzt den (auf der Kugel gelegenen) Hauptpunkt $O(0, 0, 1)$ als asymptotischen Punkt.

Mit Rücksicht auf die Tatsache, dass die verwendete Kollineation (1.3) die ebenen Felder $z = \operatorname{const}$ nur ähnlich transformiert, folgt aus dem ENNEPERSCHEN Satz über die Böschungslinien k^* der auf die Schleppkurven k übertragene

Satz 1.2: Die Projektion einer sphärischen Kreistratrix aus dem zum Hauptpunkt inversen Punkt auf eine zum Führungskreis parallele Ebene ist eine Radlinie, und zwar eine Epizykloide für den elliptischen Typ, eine Parazykloide für den hyperbolischen und eine Kreisevolvente für den parabolischen Typ.

Auf Grund der Kreis- und Winkeltreue der stereographischen Projektion gilt ferner der

Satz 1.3: Die sphärischen Kreistraxen gehen bei stereographischer Abbildung aus einem Mittelpunkt des Führungskreises in ebene Kreistraxen über und sind daher zu diesen invers. Die Orthogonaltrajektorien k des Kreissystems \bar{k} gehen nämlich bei dieser Projektion in die Orthogonaltrajektorien einer ebenen Drehschar von Kreisen über.

Hinsichtlich weiterer Zusammenhänge und einschlägiger Literaturhinweise gibt die in Fussnote 3 genannte Arbeit Auskunft.

2. Die Nabelgeodätischen der Quadriken.

Jede der geodätischen Linien einer regulären Quadrik Φ

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1, \text{ bzw. } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z \tag{2.1}$$

ist nach M. CHASLES bekanntlich durch die Eigenschaft gekennzeichnet, dass ihre sämtlichen Tangenten eine der zu Φ konfokalen Flächen Ψ

$$(2.2) \quad \frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} = 1, \text{ bzw. } \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 2z-\lambda$$

berühren. Hierbei fällt jenen Geodätischen eine ausgezeichnete Rolle zu, die zu $\lambda = A, B$ oder C , bzw. $\lambda = a$ oder b gehören, denn für diese Parameterwerte artet Ψ zu einem *Fokalkegelschnitt* aus. Diese Kegelschnitte liegen bekanntlich in den Hauptebenen der Quadrik Φ ; sie enthalten die Spitzen und berühren die Achsen aller *Drehkegel*, die sich der Fläche umschreiben lassen. Auch hieraus lässt sich leicht folgern, dass jede Flächenkurve k , deren Tangenten einen solchen Fokalkegelschnitt c treffen, eine geodätische Linie ist, denn ihre Schmiegeebenen sind Normalebenen der Drehkegel und daher auch der Quadrik. Da solche Kurven gewisse von den *Nabelpunkten* enthalten, die c aus Φ herauschneidet, mögen sie kurz „*Nabelgeodätische*“ genannt werden. Es ist bekannt und geht aus ihrer Auffassung als *projektiven Böschungslinien* unmittelbar hervor, dass alle ∞^1 von einem reellen Nabelpunkt eines Ellipsoids ausgehenden Geodätischen sich im diametral gegenüberliegenden wieder vereinigen und demnach gleich lang sind.

Auf die analytische Darstellung dieser Nabelgeodätischen, die bei Mittelpunktsflächen i. a. auf elliptische Integrale hinausläuft, für Paraboloiden jedoch elementar ausführbar ist, soll hier vertichtet werden, weil sie – wenn auch nicht von unserem Gesichtspunkt aus – bereits wiederholt anderwärts abgeleitet wurde. Hingegen mag auf die konstruktive Behandlung etwas näher eingegangen werden. Zunächst gilt gemäss Satz 2:

Satz 2.1: *Die zu einem bestimmten Fokalkegelschnitt c gehörigen Nabelgeodätischen einer regulären Quadrik Φ erscheinen im Normalriss auf die c enthaltende Hauptebene als nichteuclidische Evoluten eines Kegelschnittes q' , und zwar im Sinne jener Metrik, die sich auf dem Umriss u von Φ gründet; q' ist bezüglich u polarreziprok zu c und stellt den Normalriss der absoluten Isophote q von Φ dar.*

Zur Erläuterung des Schlusssatzes ist zunächst zu beachten, dass sich der abzuwickelnde Kegelschnitt q' zufolge Satz 1 als

Spur des (projizierenden) Polarzylinders Γ von c ergibt. Nun ist c eine Doppelkurve der Φ umschriebenen Minimaltorse Θ , daher Γ eine Doppeltorse der Berührungskurve q von Θ . Die Quartik q , eine spezielle Krümmungskurve von Φ , gehört sämtlichen Isophotensystemen von Φ an, womit ihre Bezeichnung gerechtfertigt erscheint.

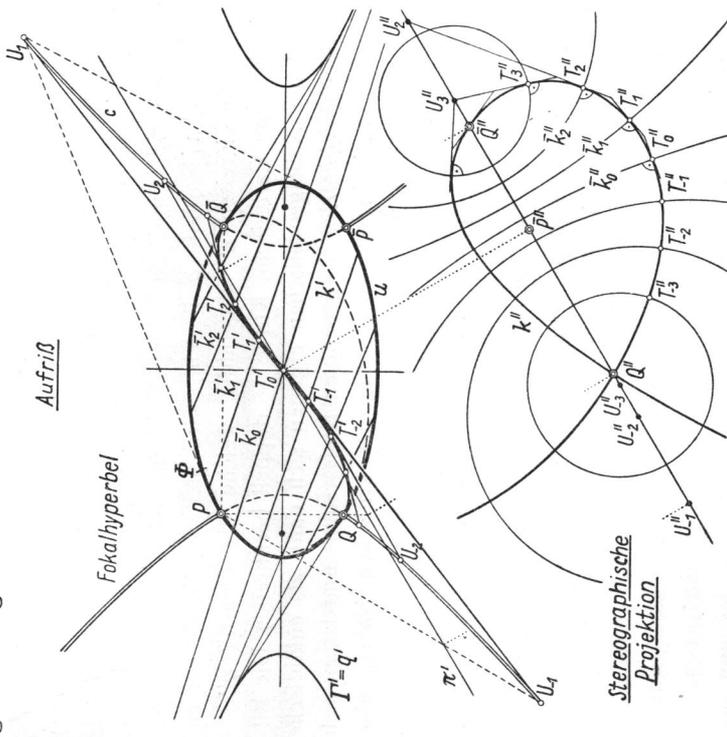


Fig. 2. Nabelgeodätische eines dreiachsigen Ellipsoids (Achsenverhältnis 4:3:2). Aufriss k' ... hyperbolische Evolute des Kegelschnitts q' . Stereographische Projektion k'' ... euklidische Orthogonaltrajektorie des Kreissystems k'' .

Fig. 2 illustriert im oberen Teil die darstellend-geometrische Auswertung von Satz 2.1 für ein dreiachsiges *Ellipsoid*; reelle Nabelgeodätische werden hier nur von der *Fokalhyperbel* geliefert. Ihre Aufrisse lassen sich nach dem von der graphischen Integration her geläufigen Vorgang leicht schrittweise eintragen.

Gewisse Schwierigkeiten ergeben sich in der Umgebung der Nabelpunkte, weil die zugehörigen Flächenelemente projizierend erscheinen; so wird etwa die Fortsetzung eines Kurvenzweiges

über einen Nabelpunkt hinaus unsicher, weil sie sich nur auf die Krümmungstetigkeit in der benützten Projektion stützen kann. Diese Schwierigkeiten lassen sich umgehen, wenn man eine zweite Projektion heranzieht. Hier empfiehlt sich vom zeichnerischen Gesichtspunkt aus am besten die *stereographische Projektion* aus einem (fremden) Nabelpunkt P auf eine zugehörige zyklische Ebene π : Hierbei bilden sich alle ebenen Schnitte der Quadrik auf *Kreise* ab und konjugierte Richtungen erscheinen *normal*.²⁾ Das zu unseren Geodätischen k konjugierte System von Kegelschnitten \bar{k} , das von den Tangentialebenen des Zylinders Γ aus geschnitten wird und aus doppelt berührenden Kegelschnitten der absoluten Isophote q besteht, wird stereographisch auf ein System von Kreisen \bar{k}' abgebildet, welche die Quartik q'' – ein nullteilige Cartesische Kurve – doppelt berühren.³⁾ Die Bilder k'' der Nabelgeodätischen ergeben sich dann als euklidische *Orthogonaltrajektorien* des genannten Kreissystems und lassen sich als solche auch in der Umgebung der kritischen Nabelpunkte gut zeichnen (Fig. 2 unten).

3. Die räumlichen Kreisevolutoiden.

Unter den „ α -Evolutoiden“ einer gegebenen Kurve c versteht man jene ∞^1 Raumkurven k , deren Tangenten die Kurve c unter dem festen Winkel α treffen. Die ∞^2 α -Treffgeraden t von c lassen sich zu ∞^1 *Drehkegeln* Δ zusammenfassen, die von den Punkten der Kurve c ausstrahlen und deren Tangenten zu Achsen haben. Das Brenngebilde dieser Treffgeradenkongruenz besteht einerseits aus der Kurve c , andererseits aus der von den Kegeln Δ eingehüllten (und längs Hyperbeln berühnten) „*Evolutoidenfläche*“ Φ . Die neben den genannten Drehkegeln in der Kongruenz enthaltenen Torsen stützen sich mit ihren Gratlinien auf die Brennfläche Φ und sind mit den Tangentialebenen der Evolutoiden k identisch: Diese Kurven verlaufen mithin auf der Evolutoidenfläche Φ und sind *geodätische Linien* derselben, denn ihre Schmiegebenen berühren die Kurve c , sind also Normalen der Drehkegel Δ und daher auch normal zu Φ .

Ist nun – was wohl die einfachste Annahme darstellt – c speziell ein *Kreis*

5) Bei *Paraboloiden* wird man die (gleichfalls stereographische) *Parallelprojektion* in Achsenrichtung benutzen; q'' ist dann ein nullteiliger *Kegelschnitt*.

$$(3.1) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0,$$

dann verträgt das System der Drehkegel Δ die Drehungen um die z -Achse und die Evolutoidenfläche Φ ist ein *einschaliges Drehhyperboloid* mit dem *Fokalkreis* c , dargestellt durch

$$(3.2) \quad \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{z^2}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

Es gilt mithin bei Beschränkung auf Reelles:

Satz 3.1: *Die Evolutoiden eines Kreises sind identisch mit den Nabelgeodätischen der zu dem Kreis konfokalen einschaligen Drehhyperboloide. Sie sind kollinear zu jenen Böschungslinien eines einschaligen Drehhyperboloides mit lotrechter Achse, die flacher ansteigen als die Erzeugenden.*

Üben wir speziell die (involutorische) *Zentralkollineation*

$$(3.3) \quad x^* = \frac{x}{z}, \quad y^* = \frac{y}{z}, \quad z^* = \frac{1}{z}$$

aus, so werden die auf dem Hyperboloid Φ (3.2) verlaufenden α -Evolutoiden k in 45° -Böschungslinien k^* auf dem Hyperboloid Φ^*

$$(3.4) \quad (x^{*2} + y^{*2}) \operatorname{tg}^2 \alpha - z^{*2} \sin^2 \alpha = 1$$

verwandelt. Wir stützen uns nun wiederum auf den Satz von A. ENNEPER⁴⁾: Danach erscheinen diese Böschungslinien im Normalriss auf die xy -Ebene als zyklische Kurven, deren Scheitelkreis den Kehrradius $R = \operatorname{ctg} \alpha$ hat, während der (von den Punkten mit der Flächenneigung $\pi/4$ herrührende) Spitzenkreis den imaginären Halbmesser $r = R^{2j}$ besitzt; es handelt sich somit um *Hyperzykloiden*. Gehen wir mit den angegebenen Werten von R und r in die beiden ersten Gleichungen (1.7) ein, nachdem wir τ durch $\frac{\tau}{R} - \frac{\pi}{2r}$ ersetzt und eine geeignete Drehung des Koordinatensystems vorgenommen haben, so gelangen wir zu der folgenden Parameterdarstellung der Böschungslinie k^* :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x^* &= R(\operatorname{ch} R \tau \cos \tau - R \operatorname{sh} R \tau \sin \tau) \\ y^* &= R(\operatorname{ch} R \tau \sin \tau + R \operatorname{sh} R \tau \cos \tau) \\ z^* &= \pm (1 + R^2) \operatorname{sh} R \tau \quad \text{mit } R = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Durch Nachprüfung der Identität $dx^{*2} + dy^{*2} = dz^{*2}$ kann man sich leicht von dem konstanten Anstiegswert 1 überzeugen.

Die Rücktransformation mittels der Kollineation (3.3) führt von (3.5) auf die Gleichungen der Evolutoide k . Bedenken wir, dass bei diesem Übergang die Felder in den Ebenen $z = \text{const}$ nur ähnlich verändert werden, und beachten wir die aus (3.5) ersichtliche asymptotische Annäherung der Hyperzykloide an ein logarithmisches Spiralenpaar $\rho \exp(\pm R\tau) = \text{const}$, so erkennen wir den in Fig. 3 illustrierten

Satz 3.2: Die räumlichen α -Evolutoiden des Kreises erscheinen bei Zentralprojektion aus dem Kreismittelpunkt auf eine zur Kreisebene parallele Bildebene als Hyperzykloiden mit dem asymptotischen Schnittwinkel α .

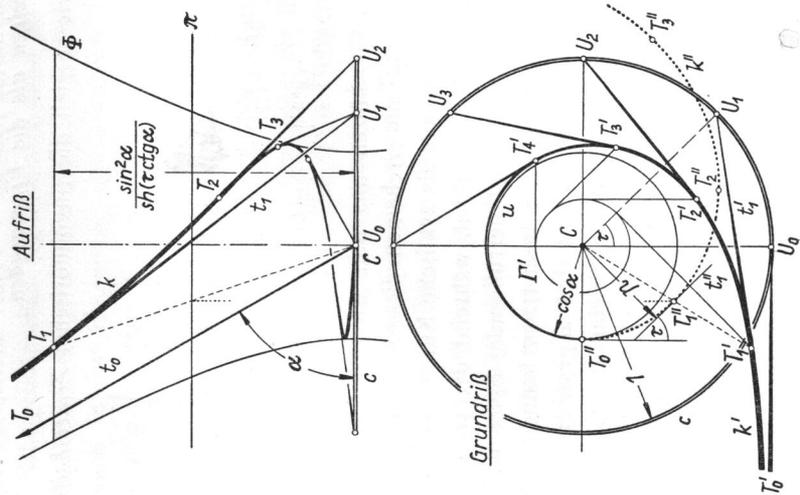


Fig. 3. 60° -Evolutoide des Kreises c (dargestellt wurde nur die obere Hälfte). Grundriss k' ... indefinite Evolute des Kreises Γ' . Zentralriss k'' aus der Kreismitte C auf die Parallelebene π ... Hyperzykloide [$p = \cos \alpha \cdot ch(\tau \operatorname{ctg} \alpha)$].

Die Schichtenlinien $z^* = \text{const}$ der Böschungstorse mit der Gratlinie k^* sind Parallelkurven, unter denen sich (für $z^* = 0$) eine Parazykloide befindet. Unter den hierzu ähnlichen Schichtenlinien der Tangentenfläche von k findet sich hingegen (für $z = 0$) der Kreis c , dessen Eigenschaft, die Flächenerzeugenden unter dem festen Winkel α zu schneiden, naturgemäss auch für die anderen Schichtenlinien gilt. Wir haben damit den

Satz 3.3: Die Tangentenflächen der räumlichen α -Evolutoiden eines Kreises werden von den zur Kreisebene parallelen Schichtenebenen nach Parallelkurven von Parazykloiden geschnitten. Diese Schichtenlinien durchsetzen die Tangentenscharen durchwegs unter dem festen Winkel α .

4. Die D-Kurven der Quadriken.

„D-Kurven“ einer Fläche heissen die erstmalig von G. DARBOUX betrachteten, auf der Fläche verlaufenden Kurven, deren Schmiegkugeln die Fläche berühren.⁶⁾ Obwohl diese Kurven – die offensichtlich in den Rahmen der Inversionsgeometrie fallen – von Ableitungen 3. Ordnung abhängen, bilden sie nur eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, wie die folgende Überlegung zeigt.

Sei k eine D-Kurve der vorgegebenen Fläche Φ , und Σ ihre Schmiegkugel in einem allgemeinen Punkt T . Σ schneidet Φ nach einer Kurve h , die mit k vier in T vereinigte Punkte gemein hat und daselbst einen Doppelpunkt aufweist; k wird mithin den einen Zweig von h einfach und den anderen Zweig in drei zusammengerückten Punkten schneiden, also mit diesem die Tangente t und die Schmiegeebene τ gemeinsam haben. Umgekehrt werden auch alle das Element (T, t, τ) bzw. das analoge Element des anderen Zweiges von h enthaltenden Flächenkurven – und nur diese! – die Kurve h in (mindestens) $3 + 1 = 4$ in T zusammenfallenden Punkten treffen und demnach Σ als Schmiegkugel besitzen. Nun gibt es auf Φ zu jedem Linienelement (T, t) genau eine Berührungskugel Σ , deren Schnittlinie $\Sigma\Phi = h$ das Element (T, t) enthält – nämlich die zugehörige Meusnierkugel –, und durch h wird dann dem Linienelement auch die Schmiegeebene τ eindeutig zugeordnet. Die Ermittlung der D-Kurven von Φ beruht auf der Aneinanderreihung von Elementen (T, t, τ) aus

6) G. Darboux: Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. C. R. 73 (1871), 732–736. – *Enz. math. Wiss.* III D 3, Nr. 39.

einem dreifach ausgedehnten Vorrat, läuft also auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung hinaus, die von DARBOUX aufgestellt wurde. Eine Fläche besitzt demnach ∞^2 D-Linien und durch jeden allgemeinen Punkt gehen ∞^1 davon.

Aus den entwickelten Vorstellungen ist unmittelbar zu erkennen, dass der *Krümmungskreis* $\Sigma\tau$ von k mit h und daher auch mit Φ vier zusammengerückte Punkte gemein hat, woraus eine zweite Kennzeichnung der Kurven fließt: Es sind jene Flächenkurven, deren Krümmungskreise die Fläche *hyperoskulieren*.

Sei nun Φ speziell eine *Fläche 2. Ordnung*, Kegel und Zylinder vorläufig noch inbegriffen, die Kugel jedoch verständlicherweise ausgeschlossen. Die zugehörigen D-Kurven wurden bereits von G. DARBOUX a. a. O.⁶⁾ prinzipiell bestimmt, eine Auswertung der Integrale führte jedoch erst A. PELL (u. zw. mittels komplexer elliptischer Funktionen) durch.⁷⁾ Ein bequemerer Zugang und gleichzeitig eine tiefere Einsicht in das Wesen dieser Kurven ergibt sich nun durch Verfolgung der vorhin angestellten rein geometrischen Überlegungen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Die Hilfskurven h , die aus der Quadrik Φ durch die Berührungskugeln Σ ausgeschnitten werden, sind im allgemeinen *rationalen Quartiken* mit gemeinsamen Fernpunkten I_1, I_2, I_3, I_4 , nämlich den absoluten Punkten von Φ . Jede Quartik h wird aus ihrem Doppelpunkt T durch einen *Kegel 2. Ordnung* Δ projiziert, der einerseits die beiden Doppelpunktstangenten t als Erzeugende enthält und längs derselben von den zugehörigen Schmiegeebenen τ berührt wird, andererseits durch die vier Fixpunkte I_n geht. Die Fernkegelschnitte der ∞^3 Kegel Δ erfüllen daher lediglich das *Büschel* mit den Grundpunkten I_n . Die von den Tangenten einer D-Kurve k gebildete *Torse* wird nun längs ihrer Erzeugenden t von den zugeordneten Schmiegeebenen τ und daher auch von den zugehörigen Kegeln Δ berührt: Ihre Fernkurve wird demnach in jedem ihrer Punkte von einem Kegelschnitt des Büschels $I_1 I_2 I_3 I_4$ berührt und muss daher notwendig — da keine Hüllkurve existiert und die Grundpunkte allein auscheiden — mit einem dieser Kegelschnitte zusammenfallen! Die *D-Kurven einer Quadrik* sind also *affine Böschungslinien* und gekennzeichnet durch den

7) A. Pell: "D"-lines on quadrics. Transact. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 315—322.

Satz 4.1: Die D-Kurven einer Fläche 2. Ordnung Φ sind identisch mit jenen affinen Böschungslinien auf Φ , deren Leitkegelschnitte dem Büschel angehören, das von der Fernkurve der Fläche und dem absoluten Kugelkreis aufgespannt wird.

Dieser Sachverhalt ist bei Mittelpunktsflächen 2. Ordnung gleichbedeutend mit einem Satz von PELL, wonach die zu den Tangenten einer D-Linie parallelen Flächendurchmesser gleiche Länge haben.⁷⁾ PELL scheint jedoch nicht beachtet zu haben, dass gleich lange Durchmesser einer Quadrik auf einem Kegel 2. Ordnung liegen. Dieser Tangentenrichtkegel ist übrigens seiner Entstehung nach *konzyklisch* zur Grundfläche und kann in ein Paar zyklischer Ebenen zerfallen, wozu dann die parallelen Kreisschnitte der Fläche als ausgeartete D-Kurven gehören.

Ist die Grundfläche Φ eine *reguläre Quadrik* — was von nun ab ausdrücklich vorausgesetzt sei —, dann kann unsere projektive Theorie der Böschungslinien Anwendung finden und sowohl zeichnerisch wie rechnerisch ausgewertet werden. Im Hinblick auf eine diesem Gegenstand gewidmete, demnächst erscheinende Abhandlung des Verfassers soll dies hier nicht in voller Ausführlichkeit geschehen. Fig. 4 zeigt in der Wiedergabe einer auf einem orthogonalen *hyperbolischen Paraboloid* verlaufenden D-Kurve wohl zur Genüge die Ausnützung der in der Einleitung entwickelten Prinzipien. Bei Vorhandensein reeller Nabelpunkte liesse sich auch die stereographische Projektion ähnlich wie in Fig. 2 mit Vorteil heranziehen.

Jedes der Systeme von ∞^1 D-Kurven k , das durch einen der in Satz 4.1 genannten Leitkegelschnitte c bestimmt ist, besitzt übrigens eine *Krümmungslinie* der Quadrik als Einhüllende. Diese Hüllkurve q ist nämlich die Berührungslinie der c und Φ gemeinsam umschriebenen Torse 4. Klasse Θ und liegt auf dem Polarkegel Γ von c ; die D-Kurven setzen auf q mit Spitzen auf, und da die Spizentangenten t stets mit einer Hauptkrümmungsrichtung von Φ zusammenfallen — die Kugel Σ ist in diesem Fall eine Krümmungskugel der Fläche — so gilt das Gleiche auch für die hierzu konjugierten Tangenten \bar{t} von q .

Zum Schluss wollen wir noch den Ort der Schmiegekugelnzentren einer D-Kurve k , also deren *Planevolute* k^* betrachten. Diese Kurve ist die Gratlinie der von den Normalebene der Kurve k eingehüllten „Polarorse“; ihre Tangenten t^* sind die

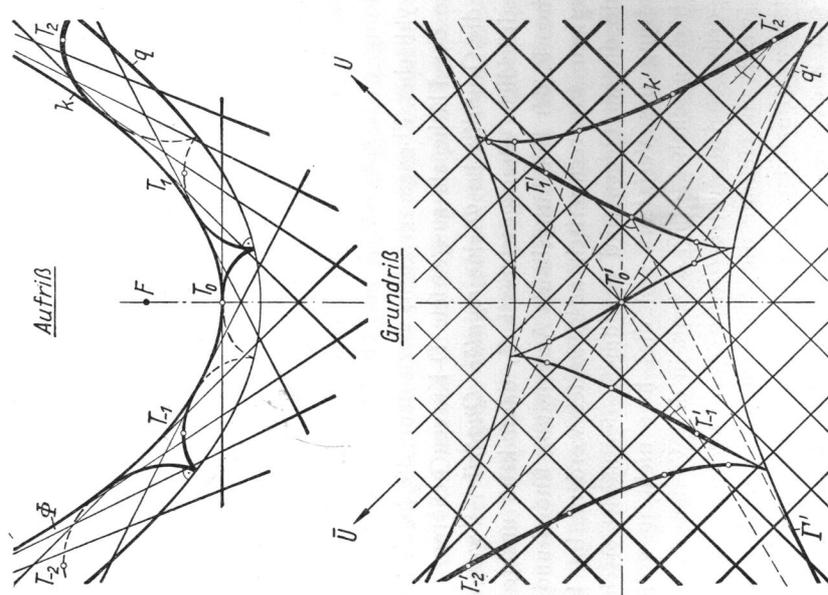


Fig. 4. D-Kurve eines orthogonalen hyperbolischen Paraboloides. Grundriß k' ... pseudoklidische Evolvente der Hyperbel q' (... Krümmungslinie) im Sinne der auf die (reellen) Umrissepunkte U, \bar{U} gegründeten Metrik.

Krümmungsachsen von k , und wegen $t^* \perp \tau$ Treffgeraden jenes Fernkegelschnittes c^* , der bezüglich des absoluten Kugelkreises polarreziprok zum Leitkegelschnitt c ist: k^* ist mithin gleichfalls eine *affine Böschungslinie*, und wir wollen nachweisen, dass auch diese auf einer *Quadrik* verläuft.

Zu diesem Zwecke fassen wir — uns auf Grundquadriken Φ mit einem eigentlichen Mittelpunkt O beschränkend — einen allgemeinen Punkt T von k und das durch die zugehörige Schmiegkugel Σ mit Φ aufgespannte *Flächenbüschel* ins Auge. Es schneidet die Fernebene nach dem Kegelschnittsbüschel $I_1 I_2 I_3 I_4$, welches den Leitkegelschnitt c und ferner drei zerfallende Exemplare ent-

hält; deren Doppelpunkte X, Y, Z geben die Hauptachsenrichtungen von Φ an. Das genannte Flächenbüschel enthält dementsprechend den Kegel $\Delta = Tc$ und drei Paraboide mit den Fernscheiteln X, Y, Z . Sei E das erste dieser Paraboide und ξ das *Doppelverhältnis*, das es mit den Büschelflächen Φ, Δ und Σ definiert; das gleiche Doppelverhältnis ξ wird auch durch die zugehörigen Fernkegelschnitte bestimmt, ist also unabhängig von der Wahl des Punktes T . Es lässt sich erklären als Doppelverhältnis der vier Polarebenen eines beliebigen Raumpunktes P , die bekanntlich ebenfalls einem Büschel angehören; nehmen wir insbesondere $P = X$, dann sind die Polarebenen der Reihe nach: die Fernebene, die Achsenebene OYZ , die dazu parallele Ebene durch T und die Parallelebene durch das Schmiegkugelenzentrum T^* . Die drei eigentlichen Ebenen bestimmen mithin ein *konstantes Teilverhältnis*, und da Entsprechendes auch für die beiden anderen Hauptstellungen gilt, so hängen die Punktepaare TT^* und damit auch die Kurven k und k^* durch eine gewisse *Affinität* zusammen, die das Hauptachseniripiel festlässt. — Durch geeignete Grenzübergänge lässt sich ein ähnlicher Sachverhalt auch für parabolische und singuläre Quadriken Φ folgern, sodass allgemein besteht der

Satz 4.2: *Die zu einem regulären Leitkegelschnitt gehörigen D-Kurven k einer Quadrik Φ und ihre Planevoluten k^* sind durch eine gemeinsame Affinität aufeinander bezogen. Die Kurven k^* sind daher ebenfalls affine Böschungslinien einer gleichartigen Quadrik Φ^* .*

Die Evoluten k^* sind jedoch im allgemeinen keine D-Kurven ihrer Trägerfläche Φ^* . Dies gilt nämlich nur im Falle von *Drehflächen* Φ , weil dann auf Grund der Rotationssymmetrie die D-Kurven und ihre Planevoluten *gewöhnliche Böschungslinien* (vom ENNEPERSCHEN Typ) sind.

Satz 4.3: *Die D-Kurven einer Drehquadrik sind bei lotrechter Achse identisch mit ihren Böschungslinien. Ihre Planevoluten sind ebensolche Böschungslinien.*

Dieses spezielle Ergebnis findet sich aus ganz anderen Betrachtungen heraus bereits in einer Arbeit von W. BLASCHKE.⁸⁾

8) W. Blaschke: Bemerkungen über allgemeine Schraubentlinien. Mh. Math. Phys. 19 (1908), 188 — 204.

Abschliessend sei noch erwähnt, dass sich zeigen lässt, dass es ausser den D-Kurven der Quadriken keine anderen Raumkurven gibt, deren Punkte mit den zugehörigen Schmiegekugelmitteln durch eine Affinität gekoppelt sind.⁹⁾

9) W. Wunderlich: Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken. Mh. Math. 55 (1951).