KLEINE MITTEILUNGEN

Kinematische Erzeugung eines Dreiecksnetzes aus Trochoiden.

S a t z: Man teile den Umfang eines Kreises vom Halbmesser 2 in eine gerade Anzahl gleicher Teile und projiziere die Teilpunkte senkrecht auf einen von zwei Teilpunkten begrenzten Durchmesser. Rollt nun dieser Kreis in einem zweiten vom Halbmesser 3, dann beschreiben die Projektionen Hypotrochoiden, die einer S t e i n e r schen Hypozykloide eingeschrieben sind und in deren Innern ein D r e i e c k s n e t z bilden (s. Abb.).

Zum Beweise dieses Satzes führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y ein, dessen Lage

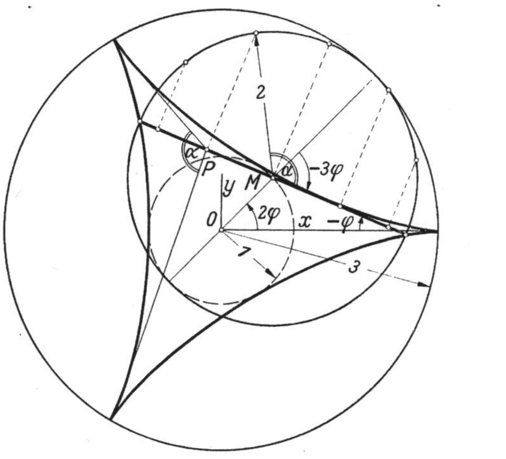

Abb. 1.

aus Abb. 1 ersichtlich ist. Wurde der Kreisumfang in $2n$ Teile geteilt, so haben die Projektionen P auf den Durchmesser die Entfernungen $2\cos\frac{i\pi}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ von der Mitte M. Daß die auftretenden T r o c h o i d e n

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos 2\varphi + 2\cos\alpha\cos\varphi \\ y &= \sin 2\varphi - 2\cos\alpha\sin\varphi \\ \alpha &= \frac{i\pi}{n}\,(i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ 0 &\leqq \varphi < 2\pi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

sämtlich der zum Wert $\alpha = 0$ gehörigen S t e i n e r schen Z y k l o i d e

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos 2\varphi + 2\cos\varphi \\ y &= \sin 2\varphi - 2\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

eingeschrieben sind, folgt einfach aus der bekannten Tatsache, daß letztere gleichzeitig Hüllkurve des Durchmessers ist.

Die Trochoide (1) ist eine i s o p t i s c h e K u r v e der Zykloide (2), und zwar erscheint aus ihren Punkten die Zykloide stets unter dem Winkel α. Um dies einzusehen, schreiben wir die Zykloidentangente in der Form

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi = \sin 3\varphi \quad \ldots \quad (3),$$

die wir aus (1) durch Elimination von α erhalten; bei veränderlichem α und festem φ ist nämlich (1) eine Parameterdarstellung des Rollkreisdurchmessers und somit jener Zykloidentangente, die gegen die x-Achse unter dem Winkel $-\varphi$ geneigt ist. Ersetzen wir nun in (3) φ einmal durch $\psi + \frac{\alpha}{2}$, dann durch $\psi - \frac{\alpha}{2}$, so haben wir zwei Tangenten, die miteinander den Winkel α einschließen. Aus diesen beiden in x und y linearen Gleichungen errechnet man leicht die Koordinaten des Schnittpunktes mit

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos 4\psi + 2\cos\alpha\cos 2\psi \\ y &= -\sin 4\psi + 2\cos\alpha\sin 2\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4),$$

welche bei veränderlichem ψ den Ort aller Punkte darstellen, aus denen die Zykloide unter dem festen Winkel α gesehen wird. Dieser Ort ist tatsächlich identisch mit der Trochoide (1), wie man erkennt,

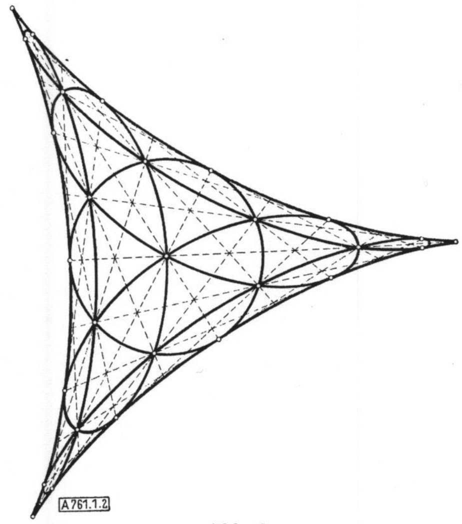

Abb. 2.

wenn man φ an Stelle von -2ψ schreibt. Man sieht weiters aus (1) oder (4), daß zu den Gesichtswinkeln α und $\pi - \alpha$ dieselbe Kurve gehört.

Aus jedem Punkt im Innern der Zykloide kann man drei dieselbe berührende Halbstrahlen ziehen; die Winkel, die sie miteinander einschließen, seien α, β, γ $(\alpha + \beta + \gamma = 2\pi)$. Der Punkt liegt offenbar auf den drei zu den Gesichtswinkeln α, β, γ gehörigen isoptischen Kurven und auf keinen anderen (von diesen Kurven können zwei oder alle drei zusammenfallen, dann ist der Punkt ein Doppelpunkt bzw. dreifacher Punkt). Um nun zu zeigen, daß die Gesamtheit aller isoptischen Kurven ein Dreiecksnetz bildet. haben wir nur noch die bekannte „Sechseckkonfiguration" nachzuweisen. Ein Sechseck aus Systemkurven um den betrachteten Punkt läßt sich aber sofort angeben: es wird gebildet aus den Kurven mit den Gesichtswinkeln $\alpha \pm \varepsilon$, $\beta \pm \varepsilon$, $\gamma \pm \varepsilon$ (ε genügend klein).

Werden nun α, β und damit auch γ dem System $\frac{i\pi}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ entnommen, so ergibt sich das aus den Trochoiden (1) zusammen mit der Zykloide (2) gebildete Dreiecksnetz[1]). Abb. 2 stellt ein solches

[1]) Es liegt auf der Hand, daß innerhalb eines geeignet eingeschränkten Gebietes, aus dessen Punkten sich an d r e i b e l i e b i g e K u r v e n (von denen zwei oder alle drei zusammenfallen können) drei Tangenten ziehen lassen, in ähnlicher Weise ein Dreiecksnetz aufgebaut werden kann, das aus isoptischen Kurven der drei Kurvenpaare besteht.

Benützt man als Grundkurven etwa d r e i K r e i s e, so erhält man ein Netz aus P a s c a l s c h n e c k e n. Arten die drei Kreise in P u n k t e aus, so besteht das Netz aus den K r e i s e n dreier K r e i s b ü s c h e l, deren Grundpunkte ein Dreieck bilden. Artet nur ein Kreis zu einem P u n k t aus, während die beiden anderen z u s a m m e n f a l l e n, so ergibt sich ein Netz aus konzentrischen Kreisen und einem System ähnlicher Pascalschnecken mit gemeinsamem Doppelpunkt; durch Inversion um diesen entsteht ein Netz aus K r e i s e n eines Büschels und untereinander ä h n l i c h e n K e g e l s c h n i t t e n.

Netz für $n=6$ dar; hier weist die isoptische Kurve für $i=2,4$ einen dreifachen Punkt auf, während jene für $i=3$ zu einem doppelt überdeckten Kreis ausgeartet ist.

Nebenbei bemerkt, handelt es sich bei uns um das Diagonalkurvennetz des von H. Graf und R. Sauer („Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden", Sitzgsb. d. bayr. Akad. d. W. 1924) angegebenen Netzes, das aus Tangenten der Steinerschen Zykloide gebildet wird. Es sind daher umgekehrt die Diagonalkurven des Trochoidennetzes Tangenten der Hüllzykloide. Wie man aus Abb. 2 sieht, wo dieselben gestrichelt vermerkt wurden, gestatten sie eine einfache Kontrolle der Zeichnung.

Die Fläche der Zykloide wird durch die Netzkurven (1) in n^2 Maschen zerlegt; die Anzahl der Knoten ist $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, wobei die 3 Spitzen und die $3(n-1)$ Berührpunkte mitgezählt sind. Das Diagonalnetz besteht aus $3n$ Tangenten.

Wien. Walter Wunderlich. 761