

## Zur Statik der Strickleiter.

Von

Walter Wunderlich in Wien.

1. Der vorliegende Aufsatz ist als Beitrag zur „Differenzengeometrie“ gedacht, die sich bemüht, differentialgeometrische Beziehungen durch elementargeometrische Sachverhalte an geeigneten finiten Modellen zu veranschaulichen und zu begründen. Die Förderung dieser Arbeitsweise ist vor allem einer Reihe von einschlägigen Abhandlungen zu verdanken, die in dieser Zeitschrift erschienen sind<sup>1)</sup>.

Im Sinne der genannten Bestrebungen hat der Verfasser unlängst zur Demonstration der *Schraubwendelfläche* ein Vorlesungsmodell nach dem Muster einer *Strickleiter* herstellen lassen, das aus einer Anzahl von gleich langen Holzstäben besteht, deren Enden in gleichen Abständen in zwei Schnüre eingeknüpft sind. Bei richtiger Haltung des Modells stellen sich Gleichgewichtslagen ein, bei welchen die Sprossen eine äquidistante Folge von Erzeugenden einer Wendelfläche bilden. Daneben existieren jedoch noch *unsymmetrische Gleichgewichtsformen*, und diese sollen hier näher untersucht werden. Den Schlüssel hierzu bietet die Feststellung, daß — bei Vernachlässigung des Eigengewichts — in jedem Knotenpunkt die Sprossenachse und die beiden Seilstrecken aus statischen Gründen in einer Ebene liegen müssen. — Auf die nicht uninteressanten Stabilitätsfragen, die bei dieser Gelegenheit auftreten, wird nicht eingegangen. Besonderes Augenmerk wird hingegen den *Grenzformen* zugewendet, die bei infinitesimaler Verdichtung der Sprossenfolge entstehen. — Auf die naheliegende Verallgemeinerung, die die Gleichabständigkeit der Knoten aufgibt, mag hier bloß hingewiesen sein.

2. Zur Untersuchung stehen also zwei gelenkige Streckenzüge  $A_1 A_2 \dots$  und  $B_1 B_2 \dots$  mit konstanter und gleicher Seitenlänge  $h$ , deren gleichbezifferte Ecken durch starre Strecken der gemeinsamen Länge  $A_i B_i = c$  verbunden sind; wir wollen von „*Holmpolygonen*“ und „*Sprossen*“ reden.

Jede *Gleichgewichtslage* dieser idealisierten „Strickleiter“ ist dadurch gekennzeichnet, daß je drei von einem Knotenpunkt ausgehende Strecken in einer Ebene liegen, denn nur dann können die in dem

<sup>1)</sup> Einige diesbezügliche Hinweise enthält die Arbeit von R. SAUER: *Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen*, Math. Z. 52 (1950), 611—622, die auch gewisse Berührungspunkte mit dem vorliegenden Aufsatz aufweist.

Knoten angreifenden Kräfte (Zugspannungen in den Holmseiten, Stützdruck in der Sprosse) einander aufheben. Diese Bedingung sei in jedem Knoten erfüllt; die ihm solcherart zugeordnete Ebene heiße „Knotenebene“.

Fassen wir nun ein *Maschenviereck* der Leiter ins Auge: Es handelt sich wegen der paarweise gleichen Gegenseiten um ein *windschiefes Parallelogramm*, oder — nach einem besseren Vorschlag von BENNETT<sup>2)</sup> — ein „*Isogramm*“. Ein solches Viereck ist achsensymmetrisch bezüglich des Gemeinlots der beiden Diagonalen. Demnach ist der (vorzeichen-begabte) Winkel zweier benachbarten (orientierten) Knotenebenen stets auch an der Gegenkante zu finden. Dieser „*Schränkwinkel*“ sei für die Holmseiten  $h$  mit  $\psi$ , für die Sprossen  $c$  mit  $-\gamma$  bezeichnet; unter der „*Schränkung*“ einer Seite soll hingegen der Quotient aus dem Sinus des Schränkwinkels und der Seitenlänge verstanden werden. Nach BENNETT gilt dann die leicht zu beweisende Beziehung

$$(1) \quad \frac{\sin \psi}{h} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

welche besagt, daß Nachbarseiten eines Isogramms entgegengesetzt gleiche Schränkungen besitzen<sup>3)</sup>.

Da je zwei aufeinanderfolgende Isogramme unserer Leiter eine Seite  $c$  samt dem zugehörigen Schränkwinkel  $-\gamma$  gemein haben, so stimmen zufolge (1) auch sämtliche Holmschränkwinkel  $\psi$  überein. Somit gilt

**Satz 1.** *Die beiden Holme einer im Gleichgewicht befindlichen (regelmäßigen) Strickleiter bilden zwei gleichseitige Polygone fester und übereinstimmender Schränkung. Der von den zu einer Sprosse gehörigen Knotenebenen gebildete Winkel ist längs der ganzen Leiter konstant.*

**3.** Nunmehr soll der zur Leiter gehörige *Kräfteplan* nach den Regeln der graphischen Statik entwickelt werden. Bezeichne  $a_i$  die in  $A_i$  angreifende, nach  $A_{i+1}$  gerichtete und positiv gezählte Spannkraft im linken Holm, analog  $b_i$  die Kraft in der rechten Holmstrecke  $B_i B_{i+1}$ ;  $c_i$  sei schließlich die von  $A_i$  nach  $B_i$  orientierte Sprossenkraft (Fig. 1). Im Knoten  $A_i$  wirken danach die Kräfte  $-a_{i-1}$ ,  $a_i$ ,  $-c_i$ , im Gegenknoten  $B_i$  die Kräfte  $-b_{i-1}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ . Im Hinblick auf das bestehende Gleichgewicht haben beide Vektortripel die Summe Null und die sie geometrisch repräsentierenden (und gleichbezeichneten) Strecken lassen sich in Dreiecksform aneinanderreihen. Wir ordnen die beiden Dreiecke so an, daß sie die Seite  $\pm c_i$  gemeinsam haben. Die folgenden Kraftdreiecke lassen sich dann längs der Seiten  $a_i$  und  $b_i$  anschließen, so daß auf diese Weise fortfahrend ein Kräfteplan in Gestalt einer *Doppelpyramide* entsteht, in welcher jedem Leiterstab eine parallele

<sup>2)</sup> G. T. BENNETT: *The skew isogram mechanism*, Proc. London Math. Soc. 13 (1914), 151—173.

<sup>3)</sup> Man drücke den Abstand einer Ecke von der gegenüberliegenden Knotenebene auf zwei Arten aus.

Kante entspricht und jeder Leiterknoten durch eine Dreiecksfläche vertreten ist (Fig. 1): Die gemeinsame Basis wird von den aneinandergereihten Bildvektoren der Sprossenkräfte  $c_i$  gebildet, während die in je einer Spitze  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  zusammenlaufenden Mantelkanten die Holmkkräfte  $a_i$  bzw.  $b_i$  repräsentieren.

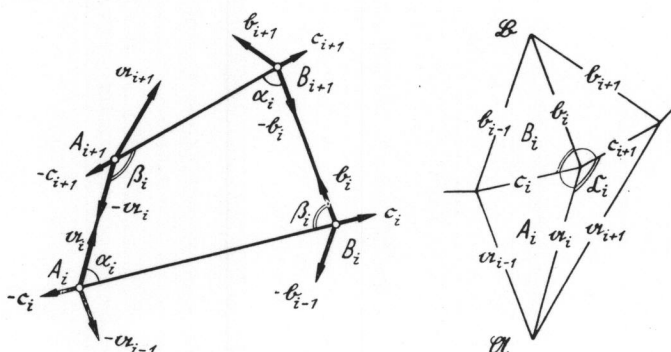


Fig. 1: Einzelmasche der Strickleiter und zugehöriger Ausschnitt des Kräfteplans.

Wir bezeichnen im  $i$ -ten Isogramm die bei  $A_i$  und  $B_{i+1}$  auftretenden Innenwinkel mit  $\alpha_i$ , jene bei  $B_i$  und  $A_{i+1}$  mit  $\beta_i$ . Sie gehorchen der Beziehung <sup>4)</sup>

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} = \cos \frac{\gamma + \psi}{2} : \cos \frac{\gamma - \psi}{2} = \text{const}$$

und ihre Summe ist  $\leq 2\pi$ . Dieselben Winkel stoßen in der dem Isogramm zugeordneten Ecke  $\mathfrak{C}_i$  des Kräfteplanes zusammen: Alle an der Basis der Doppelpyramide auftretenden Vierkante sind mithin *achsensymmetrisch*. Die längs der Kanten gemessenen Außenwinkel stimmen überdies mit den Schränk winkeln des Isogramms überein.

**Satz 2.** *Der zu einer im Gleichgewicht befindlichen Strickleiter gehörige Kräfteplan ist eine konvexe Doppelpyramide, deren Mäntel längs sämtlicher Kanten den gleichen Keilwinkel  $\pi - \psi$  aufweisen und auch längs des Basispolygons unter einem konstanten Winkel  $\pi - \gamma$  zusammenstoßen.*

4. Die Symmetrieachse des von  $\mathfrak{C}_i$  ausstrahlenden Vierkants halbiert den Winkel der Kanten  $a_i$  und  $b_i$ , fällt also mit der Normale des durch  $\mathfrak{C}_i$  gehenden Drehellipsoids  $\Gamma_i$  zusammen, das die Pyramiden spitzen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zu Brennpunkten hat. Die Normale ist nun auf Grund der Fokaleigenschaften gemeinsame Hauptachse der  $\infty^1$  Berührungskegel, die aus  $\mathfrak{C}_i$  an sämtliche durch die Brennpunkte  $\mathfrak{A}$  und

<sup>4)</sup> Man berechne die Normalprojektion der Diagonale  $A_i B_{i+1}$  auf die Symmetrale des Winkels  $B_i A_i A_{i+1} = \alpha_i$  auf zwei Arten.

$\mathfrak{B}$  bestimmten Flächen 2. Grades gehen. Die beiden, ebenfalls zu der Flächennormale symmetrischen Kanten  $c_i$  und  $c_{i+1}$  gehen durch Spiegelung an  $\Gamma_i$  auseinander hervor und sind gegenüberliegende Erzeugende auf einem der genannten Kegel: Sie berühren mithin beide ein gewisses Ellipsoid  $\mathcal{A}_i$  und ein gewisses Hyperboloid  $\bar{\mathcal{A}}_i$  der durch die Brennpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  definierten konfokalen Schar. Zur nächsten Ecke  $\mathfrak{C}_{i+1}$  weiterschreitend, erkennen wir unmittelbar, daß  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  und  $\bar{\mathcal{A}}_{i+1} = \bar{\mathcal{A}}_i$ : Der Grundkantenzug  $c_1, c_2, \dots$  der Doppelpyramide ist mithin einem bestimmten Drehellipsoid  $\mathcal{A}$  und einem konfokalen Drehhyperboloid  $\bar{\mathcal{A}}$  mit den Brennpunkten  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  umschrieben.

Es läßt sich nun weiter zeigen, daß auch sämtliche Ellipsoide  $\Gamma_i$  zusammenfallen. Zufolge (2) ist nämlich

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2},$$

und der Korrespondenzsatz liefert über

$$\sin \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} : \sin \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} = \sin \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} : \sin \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2}$$

nach passender Erweiterung

$$(4) \quad \frac{\sin \alpha_1 - \sin \beta_2}{\sin(\alpha_1 + \beta_2)} = \frac{\sin \alpha_2 - \sin \beta_1}{\sin(\alpha_2 + \beta_1)}.$$

Auf Grund des Sinussatzes in den Teildreiecken  $B_2$  und  $A_2$  haben wir dann mit  $|a_i| = a_i$ ,  $|b_i| = b_i$  und  $|c_i| = c_i$

$$\frac{b_2 - b_1}{c_2} = \frac{a_1 - a_2}{c_2} \quad \text{oder} \quad a_2 + b_2 = a_1 + b_1,$$

also allgemein

$$(5) \quad a_i + b_i = \text{const.}$$

Der Grundkantenzug  $c_1, c_2, \dots$  der Doppelpyramide ist mithin einem bestimmten Drehellipsoid  $\Gamma$  mit den Brennpunkten  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  eingeschrieben. Zusammenfassend gilt demnach

Satz 3. Das Basispolygon der Doppelpyramide, die den Kräfteplan einer im Gleichgewicht befindlichen regelmäßigen Strickleiter darstellt, läßt sich als Weg eines Lichtstrahls auffassen, der an einem verlängerten Drehellipsoid, dessen Brennpunkte mit den Pyramidenspitzen zusammenfallen, wiederholt reflektiert wird.

Oder in der Sprache der Statik:

Satz 4. Bei einer im Gleichgewicht befindlichen regelmäßigen Strickleiter ist sowohl die Vektorsumme als auch die Betragssumme gegenüberliegender Holmspannungen längs der ganzen Leiter konstant.



Da sich die Gleichungen (2) bis (5) auch in der umgekehrten Reihenfolge entwickeln lassen, so gilt als Umkehrung der Sätze 2 und 3 der auch an sich bemerkenswerte

**Satz 5.** *Wird das Weggolygon eines wiederholt an einem eiförmigen Drehellipsoid reflektierten Lichtstrahls aus den beiden Brennpunkten projiziert, so entstehen zwei Pyramiden mit durchwegs gleichen Keilwinkeln, die auch längs des Lichtpolygons unter einem konstanten Winkel zusammentreffen.*

Daß eine solche Doppelpyramide stets als Kräfteplan einer regelmäßigen Strickleiter angesehen werden kann, liegt auf der Hand. Verläuft das Grundpolygon übrigens ganz in der Äquatorebene ( $\alpha_i = \beta_i = \text{const}$ ,  $a_i = b_i = \text{const}$ ), dann bildet die zugehörige Leiterform das einleitend erwähnte *Wendelflächenmodell*.

5. Denken wir uns die in Satz 2 und 3 genannte Doppelpyramide unter Erhaltung ihrer Kantenlängen *verknickt* — was ja bei jeder offenen Doppelpyramide sicher möglich ist — so kommen die Basis-ecken  $\mathbb{C}_i$  wegen (5) wiederum auf ein eiförmiges Drehellipsoid  $\Gamma'$  gleicher Hauptachsenlänge zu liegen, dessen Brennpunkte  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{B}'$  durch die Neulagen der Pyramidenspitzen gegeben sind. Da die Seitenwinkel  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  der Basisvierkante unveränderlich sind, so bleiben die Vierkante ständig achsensymmetrisch. Die Symmetrieachsen hälften die Winkel der Brennstrahlpaare, sind also Normalen der Fläche  $\Gamma'$ , und der Grundkantenzug ist der Weg eines wiederholt an  $\Gamma'$  gespiegelten Lichtstrahls. Zuzufolge Satz 5 ist daher auch die neue Gestalt der Doppelpyramide der Kräfteplan einer regelmäßigen Strickleiter, allerdings nicht mehr der ursprünglichen.

Die Außenwinkel  $\psi$ ,  $\gamma$  der Vierkante ändern sich gemäß der zu (2) äquivalenten Formel

$$(6) \quad \text{tg } \frac{\psi}{2} \cdot \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} : \cos \frac{\alpha_i - \beta_i}{2} = \text{const.}$$

Die Neuwerte  $\psi'$ ,  $\gamma'$  lassen sich daher nach dem Vorgang von R. SAUER<sup>1)</sup> etwa mit Hilfe eines „Knickparameters“  $\lambda$  darstellen durch

$$(7) \quad \text{tg } \frac{\psi'}{2} = \lambda \cdot \text{tg } \frac{\psi}{2}, \quad \text{tg } \frac{\gamma'}{2} = \lambda^{-1} \cdot \text{tg } \frac{\gamma}{2}.$$

Mit den Schränk winkeln  $\psi'$  und  $\gamma'$  ist dann aber auf Grund der BENNETT-Relation (1) auch das Abmessungsverhältnis der Leiter bekannt. Abgesehen von einem willkürlichen Maßstabsfaktor betragen die neuen Sprossenabstände und -längen dann

$$(8) \quad h' = \frac{h}{(1 + \lambda^2) + (1 - \lambda^2) \cos \psi}, \quad c' = \frac{c}{(1 + \lambda^2) - (1 - \lambda^2) \cos \gamma}.$$

**6.** Von besonderer Bedeutung ist die zu  $\lambda = 0$  gehörige *platte Grenzform*: Hier erscheint die Doppelpyramide wegen  $\psi' = 0$  und

$\gamma' = \pi$  vollständig in die Ebene ausgebreitet und das verebnete Basispolygon ist der Weg eines wiederholt an einer *Ellipse* reflektierten Lichtstrahls (Fig. 2). Diese einfach zu konstruierende Sonderform stellt das (doppelt überdeckte) *Netz* der Doppelpyramide dar und kann zur Herstellung eines verknickbaren Kartonmodells derselben dienen<sup>5)</sup>.

Satz 6. Bei der Verebnung der Doppelpyramide aus Satz 2 und 3 geht das Basispolygon in ein ebenes Vieleck über, das einer *Ellipse* eingeschrieben und einer *konfokalen Ellipse* umgeschrieben ist. Die Verbindungen der Ecken mit dem einen oder anderen Brennpunkt entsprechen dabei den Mantellinien.

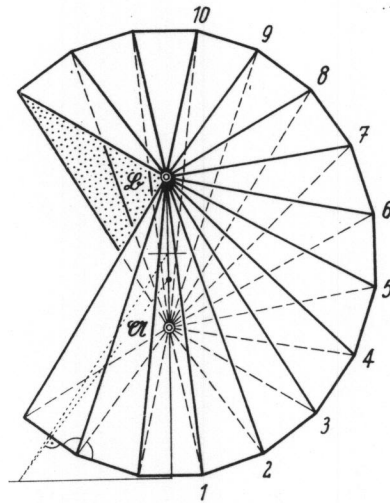


Fig. 2: Platte Grenzform als Netz der Doppelpyramide.

Es existiert übrigens noch eine zweite platten Knickform der Doppelpyramide, nämlich für  $\lambda = \infty$  ( $\psi'' = \pi$ ,  $\gamma'' = 0$ ). Auch hier tritt ein einer Ellipse eingeschriebenes Reflexionspolygon auf, das jedoch einer konfokalen Hyperbel umschrieben ist und die Hauptachse im Zickzackwege fortwährend überschreitet. Diese Grenzlage ließe sich mit dem Kartonmodell nur nach Trennung der beiden Mäntel verwirklichen, indem man dann jeden Teil für sich „einwickelt“.

Zu den beiden platten Grenzformen der Kräftepyramide gehören natürlich auch *ebene Gleichgewichtslagen* der Strickleiter. Die Leitermaschen bilden dabei überschlagene Vierecke („Antiparallelogramme“), und zwar überkreuzen einander für  $\lambda = 0$  die Sprossen ( $h' < s'$ ), für  $\lambda = \infty$  hingegen die Holme ( $h'' > s''$ ).

Hervorgehoben sei schließlich noch, daß sich nunmehr auch ein Ausgangspunkt für eine bequeme *darstellend-geometrische Behandlung* des vorliegenden Fragenkreises bietet, denn aus der platten Grenzform läßt sich eine nicht ausgeartete Gestalt der Doppelpyramide unschwer rekonstruieren, und mit deren Hilfe ist dann auch die zugehörige Gleichgewichtsform der Strickleiter schrittweise zu entwickeln.

<sup>5)</sup> Zur genauen Festlegung der meist schleifenden Schnitte des Lichtstrahls mit der Ellipse bediene man sich des konjugierten Durchmessers, der die betreffende Sehne halbiert. Er läßt sich mittels einer Scheiteltangente und des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes schnell angeben, wenn man weiß, daß jedes aus zwei konjugierten Durchmessern und einer Scheiteltangente gebildete Dreieck seinen Höhenschnittpunkt im Scheitelkrümmungszentrum hat (vgl. Fig. 2).

Auf diese Weise entstand Fig. 3, die eine Abbildung in Grund- und Aufriß darstellt.

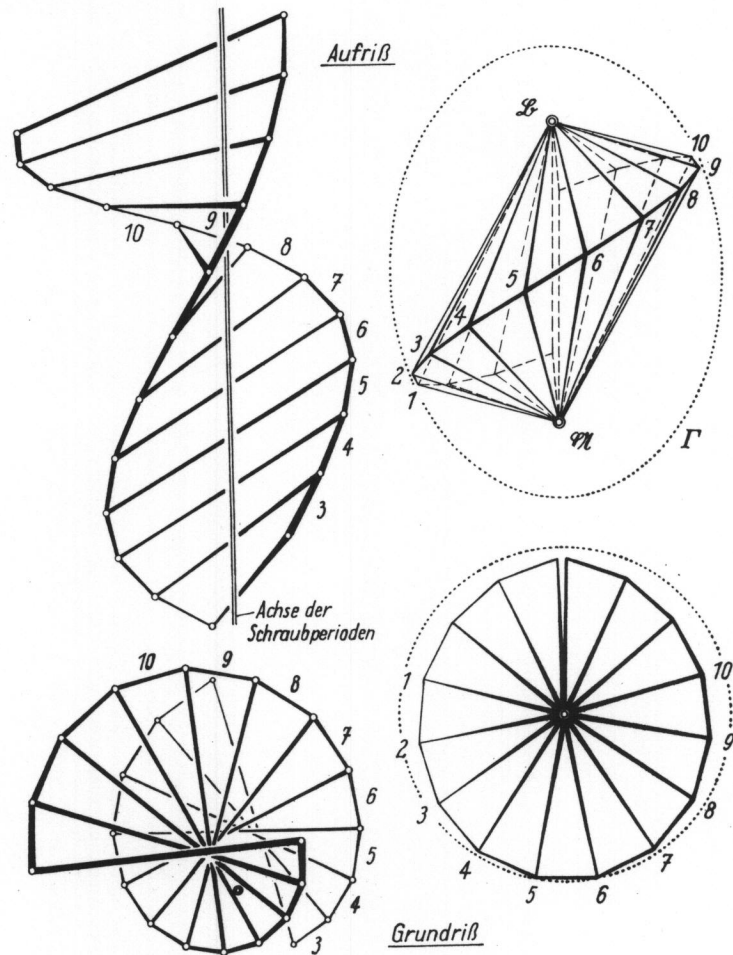


Fig. 3: Gleichgewichtslage einer (gewichtslosen) Strickleiter samt zugehöriger Kräftepyramide.

7. Abschließend vollziehen wir nunmehr — wie am Ende jeder differenzengeometrischen Untersuchung — den von vornherein beabsichtigten Grenzprozeß  $h \rightarrow 0$ , der bei festgehaltenem Schränkungs-  
wert (1) gleichzeitig  $\psi \rightarrow 0$  bedingt. Wir gelangen damit zu einer „kontinuierlichen Strickleiter“ mit *gekrümmten Holmen*, bei welcher die Sprossen die Erzeugendenschar einer gewissen *Strahlfläche (Regelfläche)*  $\Sigma$  erfüllen. Da die Knotenebenen zu den *Schmiegeebenen* der Holmkurven werden, so stellen letztere zwei im festen Abstände  $c$  ver-

laufende *Schmieglinien* (*Haupttangentenkurven*) der Fläche  $\Sigma$  dar; je zwei zusammengehörige Schmiegeebenen schließen den festen Winkel  $-\gamma$  ein. Die beiden Holmkurven sind überdies durch *konstante Torsion* gleichen Wertes

$$(9) \quad \tau = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi}{h} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

ausgezeichnet. Sie bilden nach allem ein ganz spezielles jener Kurvenpaare fester Windung, wie sie bei der *BÄCKLUND-Transformation* der pseudosphärischen Flächen als Paare entsprechender Schmieglinien auftreten.

Da das Gemeinlot zweier Nachbarsprossen gegen die *Zentraltangente* der Strahlfläche  $\Sigma$  konvergiert, der *Zentralpunkt* aus Symmetriegründen in die Sprossenmitte zu liegen kommt und die Tangentialebenen in den Sprossenenden den Winkel  $-\gamma$  einschließen, so besitzt die Sprossenfläche den *konstanten Drall*

$$(10) \quad p = -\frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Die Doppelpyramide des Kräfteplans wird zu einem von den Brennpunkten eines verlängerten *Drehellipsoides*  $\Gamma$  ausstrahlenden *Doppelkegel*, dessen Basiskurve eine *geodätische Linie*  $g$  von  $\Gamma$  ist. Letzteres ist eine Folge der Achsensymmetrie der ursprünglichen Vierkante: Die Verbindungsebene aufeinanderfolgender Grundkanten wird zur Schmiegeebene von  $g$  und enthält schon vorher die mit der Symmetrieachse identische Flächennormale<sup>6)</sup>.

Zusammenfassend gilt also

**Satz 7.** *Die Sprossen einer kontinuierlichen, im Gleichgewicht befindlichen Strickleiter fester Breite bilden eine Strahlfläche konstanten Dralls, deren Striktionslinie die Sprossenmitteln verbindet. Die Sprossen sind parallel zu den Tangenten einer gewissen geodätischen Linie auf einem eiförmigen Drehellipsoid. Die Holme der Leiter bilden ein BÄCKLUND-Paar zweier Kurven konstanter gleicher Torsion und sind Schmieglinien der Sprossenfläche. Ihre Tangentenrichtkegel werden von den Brennstrahlen des Ellipsoids erzeugt, die die Geodätische  $g$  treffen.*

Auf Grund des bekannten periodischen Verlaufs der geodätischen Linie  $g$  läßt sich auch eine gewisse *Periodizität der Strickleiter* vorhersagen. Die beiden Holmkurven werden im allgemeinen durch gewisse Schraubungen in sich bzw. ineinander transformiert. Im besonderen Fall der zu  $\lambda = 0$  gehörigen ebenen Gleichgewichtsformen sind es Schiebungen.

<sup>6)</sup> Einleuchtend wäre auch die Berufung auf das FERMATSche Prinzip, wonach das Licht im einheitlichen Medium den kürzesten Weg nimmt: Der das Basis-polygon nach Satz 3 darstellende Weg des reflektierten Lichtstrahls verläuft ursprünglich zwischen zwei konfokalen Ellipsoiden  $\Gamma$  und  $\Delta$  und wird mit  $\Delta \rightarrow \Gamma$  zum kürzesten Weg auf  $\Gamma$ .

8. Die beiden Mäntel des vorhin besprochenen Doppelkegels stoßen nach Satz 5 längs ihrer Grundlinie  $g$  unter dem konstanten Winkel  $\pi - \gamma$  zusammen, der an jeder Stelle durch die Schmiegeebene gehälftet wird:  $g$  ist mithin *pseudogeodätische Linie* auf jedem der Teilkegel, also eine „*bikonische Pseudogeodätische*“<sup>7)</sup>. Neu ist wohl auch der aus Satz 6 fließende

Satz 8. *Wird eine auf einer Drehfläche 2. Grades gezogene geodätische Linie aus einem Brennpunkt projiziert und der Projektionskegel verebnet, so geht sie in einen Kegelschnitt gleicher Hauptachsenlänge über, der die Kegelspitze zum Brennpunkt hat.*

Dieser Sachverhalt kann auch in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Satz 9. *Rollt eine Drehfläche 2. Grades längs einer geodätischen Linie geradlinig auf einer Ebene fort, so beschreibt jeder Flächenbrennpunkt eine ebene Bahn, und zwar eine DELAUNAYSche Kurve in einer die Rollspur enthaltenden Ebene*<sup>8)</sup>.

9. Um zu den geodätischen Linien des *zweischaligen Hyperboloides* zu gelangen, hätte man Holmspannungen verschiedenen Vorzeichens zuzulassen, was natürlich nur zu *labilen* Gleichgewichtslagen führen würde. Übrigens taucht auch unter der bisherigen Voraussetzung bloßer Zugspannungen in beiden Holmen ein *Stabilitätsproblem* auf, wie ein Experiment mit dem Wendelflächenmodell ganz auffällig zeigt: Bei fortschreitender Verwindung, die die Höhe zwangsläufig verkleinert, erfolgt plötzlich ein Umschlagen in eine nahezu ebene Gleichgewichtsform, die keine Wendelfläche mehr repräsentiert.

Um zu den geodätischen Linien des *Drehparaboloides* zu gelangen, wären unendlich große Spannungen in einem der Holme zuzulassen, der unter ihrer Einwirkung eine vollkommen *geradlinige Gestalt* annehmen würde. Die zweite Holmkurve bleibt gekrümmt und ist als BÄCKLUND-Transformierte einer Geraden identisch mit der Schmiegeformenform einer jener speziellen Schraub- oder Drehflächen konstanter negativer Krümmung, die durch Verschraubung oder Drehung einer

<sup>7)</sup> „*Pseudogeodätische Linien*“ nannte der Verfasser jene Flächenkurven, deren Schmiegeebenen gegen die Trägerfläche unter einem festen, jedoch nicht rechten Winkel geneigt sind. Von den *bikonischen Pseudogeodätischen* handelt die Arbeit: „Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind“, Mh. Math. 54 (1950), 55–70. Daß sich unter diesen merkwürdigen Kurven auch die echten Geodätischen der Drehflächen 2. Grades finden, wurde schon früher gezeigt: „Über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades“, Soc. Sci. Fennica, Comm. phys. math. 15 (1950).

<sup>8)</sup> Nach DELAUNAY werden bekanntlich die von den Brennpunkten eines auf einer Geraden rollenden Kegelschnittes beschriebenen Bahnkurven benannt. Im Falle der Parabel ergibt sich die Kettenlinie.



gemeinen Traktrix um die Asymptote entstehen. Diese Holmkurven lassen sich mittels hyperbolischer Funktionen noch elementar darstellen, während zur Beschreibung der allgemeinen Gleichgewichtslage der Strickleiter elliptische Integrale oder Funktionen notwendig wären, die bereits in die geodätischen Linien der zugehörigen Drehflächen 2. Grades (mit Mittelpunkt) eingehen.

(Eingegangen am 11. Juli 1951.)