

**Zur Differenzengeometrie
der Flächen konstanter negativer
Krümmung**

Von Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 8 Abbildungen) herausgegeben von Walter Wunderlich
(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1951)

I. Einleitung

Unter einem „Tschebyscheff-Netz“ versteht man in der Differentialgeometrie ein System von Flächenkoordinaten u, v mit der besonderen Eigenschaft, daß u und v die Längen der Koordinatenlinien messen (in der Gaußschen Bezeichnungsweise durch $E = G = 1$ bedingt). Zieht man also durch eine Reihe im gleichen Abstand s auf der v -Achse aufeinanderfolgender Punkte die u -Linien, und ebenso durch eine Reihe im gleichen Abstand s auf der v -Achse ein konkretes Netz aus im allgemeinen *krummlinigen Rhomben* mit der gemeinsamen Seitenlänge s , etwa von der Art eines Fischnetzes. Es liegt auf der Hand, daß sich ein solches Netz (wenigstens gebietsweise) auf eine beliebige Fläche aufliegen läßt, wobei der Verlauf der u - und v -Achse noch willkürlich vorgegeben werden kann. Diese Vorstellung der „Bekleidung“ einer Fläche durch ein Netz oder Gewebe mit fester Maschenweite bei verändlichen Schnittwinkeln hatte für P. L. Tschebyscheff die Anregung geboten¹ und war dann neuerlich von A. Voss aufgegriffen worden.²

¹ P. L. Tschebyscheff, Sur la coupe des vêtements. A. F. A. S. Paris 1878; Oeuvres II, 708. Außer diesem kurzen Fragment liegt leider keine Veröffentlichung über den Gegenstand vor, da die diesbezüglichen nachgelassenen Aufzeichnungen kein Imprimatur trugen.

² A. Voss, Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen. Math. Ann. 10 (1882), 1–26. Ferner: Über äquidistante Kurvensysteme auf krummen Flächen. Modellkatalog d. DMV, herausgegeben v. W. Dyck (1892).

Sieht man von der Vorgabe einer Trägerfläche ab und spannt ein solches Rhombennetz frei aus, so erhebt sich die Frage nach den *Gleichgewichtslagen*, die es unter dem Einfluß äußerer Randkräfte einnimmt, wobei Eigengewicht und Dehnung zunächst außer Acht gelassen werden mögen. Daß hier ein unter Umständen sehr reizvolles statisches Problem vorliegt, beweist die 1940 von J. Radon³ und fast gleichzeitig von H. Thomas⁴ gemachte Feststellung, daß die drehsymmetrische, an Fischreusen zu beobachtende Gleichgewichtsform, die ein schluchartig geschlossenes und zwischen zwei koaxialen Kreisreifen ausgespanntes Rhombennetz annimmt, im Grenzfall infinitesimaler Verdichtung eine *Drehfläche konstanter negativer Krümmung mit ihren Schmiegleinien* darstellt (vgl. Abb. 1).

Ein derartiges, von J. Radon in einem am 8. 5. 1950 in Wien gehaltenen Vortrag über Tschebyscheffnetze gezeigtes Modell verlockte den Verfasser, dasselbe mit den Methoden der Differenzengeometrie zu untersuchen, also den Grenzübergang möglichst weit hinauszuschieben. Den Schlüssel dazu bot die Beobachtung, daß die von jedem Knotenpunkt ausgehenden vier Fadenstrecken (aus Symmetriegründen) in einer Ebene liegen. Es lag nahe, gleich allgemein *geradlinige Rhombengitter mit ebenen Knoten* (ohne besondere Symmetrie) zu betrachten, und es ergab sich, daß diese stets als *differenzengeometrische Modelle von Flächen konstanter negativer Krümmung (pseudosphärischen Flächen) samt ihren Schmiegleinien* angesehen werden können. Dies stimmt mit dem bekannten differentialgeometrischen Sachverhalt überein, demzufolge die pseudosphärischen Flächen die einzigen sind, deren Schmiegleinien ein Tschebyscheffnetz bilden. Mit Benützung der *sphärischen Abbildung* des Gitters — die aus Großkreisbögen gebildete *Rhombennetze auf der Kugel* liefert — lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der pseudosphärischen Flächen höchst anschaulich und ganz elementar ableiten. Die Rhombennetze mit ebenen Knoten lassen sich bei Anbringung

geeigneter Randkräfte stets als *Gleichgewichtslagen* erhalten. Die Betrachtung der zugehörigen *Kräftepläne* stellt überdies einen interessanten Zusammenhang mit den *beweglichen Viereckspolyedern* von H. Wiener her;⁵ diese, neuerdings auch von R. Sauer u. H. Graf⁶ wiedergefundenen Polyeder sind differenzengeometrische Modelle der von A. Voss betrachteten *Flächen mit einem konjugierten Netz aus geodätischen Linien*.⁷ Auch diese Modelle lassen sich — zufolge der Reziprozität zwischen Fachwerk und Kräfteplan — als *Gleichgewichtslagen von Netzen*, und zwar aus *unverknoteten Fäden* realisieren; solche Netze wurden gelegentlich von H. Thomas untersucht.⁸

Die Rhombennetze — oder besser *Rhombengitter* — mit ebenen Knoten gestatten jedoch noch eine andere bemerkenswerte Realisierung, nämlich durch gleich lange und um den gleichen Betrag tordierte *Lamellen*. Werden diese (etwa aus Metall verfertigten) Lamellen, von denen die eine Schar rechts, die andere links gewunden auszuführen ist, in den Knotenpunkten zu je vier gelenkig verbunden, so entsteht ein bewegliches Gitter, das in jedem Zustand eine Fläche konstanter negativer Krümmung repräsentiert und mit dem sich auch jede solche Fläche in differenzengeometrischer Näherung nachbilden läßt. Jede Gittermasche bildet einen *windschiefen Gelenksrhombus*, ein (spezielles) Bennettsches „*Isogramm*“.⁹ — Lenkt man in sämtlichen Gitterknoten tordierte Lamellen einer weiteren Sorte (von beliebiger Länge und bestimmter Torsion) an, so lassen sich deren Enden durch ein zweites Gitter von der Art des ersten verbinden. In diesem Vorgang ist das überaus anschauliche differenzengeometrische Vorbild der berühmten *Bäcklund-Linien* ein conjugiertes System bilden. Sitzgsb. Ak. Wiss. München 18 (1888), 95—102.

⁵ H. Wiener, Verh. d. Ges. D. Natf. u. Ärzte, 75. Vers. Kassel 1903, 29—30. Vgl. auch Wiener-Treutlein, Sammlung mathematischer Modelle (2. Ausg., Teubner, 1912), 38ff.

⁶ R. Sauer - H. Graf, Über Flächenverbiegung in Analogie zur Verknickung offener Facettenfläche. Math. Ann. 105 (1931), 499—535.

⁷ A. Voss, Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden. Sitzgsb. Ak. Wiss. München 18 (1888), 95—102.

⁸ H. Thomas, Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. Math. Z. 44 (1939), 233—265.

⁹ G. T. Bennett, A new mechanism. Engineering 76 (1903), 777—778.

Transformation zu erblicken, die aus einer vorgelegten pseudosphärischen Fläche $\circ\circ^2$ weitere abzuleiten gestattet. Nach Abschluß seiner Untersuchungen erhielt der Verfasser Kenntnis von einer gerade erschienenen Abhandlung R. Sauers,¹⁰ die dem gleichen Fragenkreis gewidmet ist und in der die pseudosphärischen Flächen etwas allgemeiner durch (windschiefe) *Parallelogrammgitter mit ebenen Knoten* repräsentiert werden. Natürgemäß ergeben sich damit weitgehende Überschneidungen mit der vorliegenden Arbeit. Die Realisierung durch ein Gelenksystem aus tordierten Lamellen, die auch im Falle eines Parallelogrammgitters möglich ist, scheint Sauer nicht ins Auge gefaßt zu haben, doch konnte sich der Verfasser vor kurzem überzeugen, daß schon G. T. Bennett eine vollkommen klare Idee von einem solchen Gittermodell der pseudosphärischen Flächen besessen hat, wie aus dem Schlußwort einer wenig bekannten Arbeit unzweideutig hervorgeht.¹¹ Wenn es der Verfasser trotzdem unternimmt, hier eine zusammenfassende Darstellung des unrißenen Fragenkreises zu geben, so glaubt er dies — ganz abgesehen von manchen Ergänzungen — vor allem mit der Wichtigkeit des Gegenstandes selbst begründen zu dürfen: Daß es möglich ist, ein nicht ganz leicht zugängliches Gebiet, wie das der Differentialgeometrie der pseudosphärischen Flächen, durch die Anwendung differenzengeometrischer Methoden ausgesprochen elementar zu gestalten und der Anschauung weitestgehend nahe zu bringen, ist vom nicht zu unterschätzender Bedeutung. Überdies wird durch die Möglichkeit einer konstruktiv-zeichnerischen Behandlung der Gitter ein neues Betätigungsgebiet für die Darstellende Geometrie eröffnet, die gerade in Österreich seit jeher eine besondere Pflege und Ausgestaltung erfahren hat.

II. Geradlinige Rhombengitter mit ebenen Knoten

Unter einem *Vierecksnetz* werde ein zweifach ausgedehntes System diskret angeordneter Raumpunkte P_{ik} samt den Verbind-

¹⁰ R. Sauer, Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen.

¹¹ G. T. Bennett, The skew isogram mechanism. Proc. London Math. Soc. 13 (1914), 151–173.

- dungsstrecken $P_{ik}P_{i+1,k}$ und $P_{ik}P_{i,k+1}$ verstanden. Die (reell vorausgesetzten) Punkte sollen die Knoten, die genannten Strecken die *Stäbe* (1. bzw. 2. Art), und die im allgemeinen windschiefen Vierecke $P_{ik}P_{i+1,k}P_{i+1,k+1}P_{i,k+1}$ die *Maschen* des Gitters heißen. Wir stellen nun folgende Forderungen:
- A) Alle Gitterstäbe seien von gleicher Länge s („Rhombenbau“ oder *Rautengitter mit der Mascheneite s*).
 - B) Je vier von einem Knoten ausgehende Stäbe sollen in einer Ebene liegen („Gitter mit ebenen Knoten“).
 - C) Die Maschen sollen einander nicht überlappen und auch nicht zusammenklappen („Schlichtes Gitter“).

Die von den vier Stäben eines Knotens P_{ik} gemeinsam aufgespannte Ebene wird *Knotenebene* genannt, das in P_{ik} errichtete Lot *Gitternormale*. Auf Grund der Einschränkung C) lassen sich alle Knotenebenen — und damit auch alle Gitternormalen — übereinstimmend *orientieren*, indem für P_{ik} etwa der Umlaufsinn $P_{i+1,k}P_{i,k+1}P_{i-1,k}P_{i,k-1}$ als der positive erklärt wird.

Die beiden Knotenebenen, die den Enden eines Stabes zu-

geordnet sind, schließen einen gewissen Winkel ein, der zufolge

der Orientierung bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist und

ein Vorzeichen erhält, wenn man die Schraubung heranzieht,

die eine Knotenebene in die andere überführt. Der dermaßen

zwischen $-\pi$ und $+\pi$ festgelegte Wert σ wird als *Schränkwinkel* bezeichnet, der Quotient $(\sin \sigma)/s$ als die zu dem be-

treffenden Stab gehörige „Schränkung“.

Fassen wir eine *Einzelmasche* eines den gestellten Bedingungen genügenden Gitters — dessen Existenz noch zu beweisen sein wird — ins Auge: Wir können sie als einen längs einer Diagonale geknickten, ursprünglich ebenen Rhombus ansehen und erkennen damit auch die beiden vorhandenen *Symmetrieebenen*, die je eine Diagonale enthalten und die andere hälften. Aus der Doppelsymmetrie folgt sofort, daß die Schränkungen für benachbarte Stäbe entgegengesetzt, für gegenüberliegende hingegen gleich sind. Zu den Nachbarmaschen übergehend stellen wir schrittweise fest, daß im ganzen Gitter nur die beiden Schränkinkel $+\sigma$ und $-\sigma$ auftreten.

Satz 1: *Haben in einem Vierecksgitter mit ebenen Knoten alle Stäbe gleiche Länge, dann ist der Winkel benachbarter Knoten ebenem dem Betrage nach konstant. Längs Stäben derselben Art tritt die gleiche, längs Stäben der anderen Art die entgegengesetzte Schränkung auf.*

Nennen wir bei einem beliebigen Raumpolygon die Verbindungssebenen aufeinanderfolgender Seiten „Eckenebenen“ und definieren wir auch hier die „Schränkung“ als den durch die Seitenlänge geteilten Sinus des Winkels aufeinanderfolgender Eckenebenen, so können wir aussprechen den.

Satz 2: *In einem schlichten Rhombengitter mit ebenen Knoten haben die durchgehenden, aus lauter gleichartigen Stäben zusammengesetzten Streckenzeuge konstante und dem Betrage nach gleiche Schränkung. Ihre Eckenebenen sind mit den Knotenebenen des Gitters identisch.*

Zum Zwecke des noch ausständigen Existenzbeweises für die hier betrachteten Gitter geben wir ein Raumpolygon P_{0^k} ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) von der in Satz 2 genannten Art beliebig vor, also mit fester Seitenlänge s und festem Schränkungswinkel $-\sigma$; ferner einen weiteren, in der Eckenebene von P_{00} gelegenen Stab $P_{00}P_{10}$ derselben Länge s . Die beiden Stäbe $P_{00}P_{10}$ und $P_{00}P_{01}$ spannen nun eine eindeutig bestimmte windschiefe Raute mit den Schränkungswinkeln $\pm\sigma$ auf, deren vierte Ecke P_{11} in der Eckenebene von P_{01} liegt; P_{11} erhebt sich, wenn man den Punkt P_{00} so lange um die Diagonale $P_{10}P_{01}$ dreht, bis er zum zweitenmal in die Eckenebene von P_{01} gelangt.¹² Die neue Seite $P_{01}P_{11}$ bestimmt nun in derselben Weise mit dem Stab $P_{01}P_{02}$ eine gleichgeschränkte Raute, deren vierte Ecke P_{12} im die Eckenebene von P_{02} zu liegen kommt, usw. Die durch ständige Wiederholung dieser, auch in der Gegenrichtung ausführbaren Rautenkonstruktion gewonnene Folge neuer Punkte P_{1^k} bildet jetzt einen zweiten gleichseitigen Streckenzug konstanter Schränkung. Dieser führt daher nach Annahme eines weiteren, in der Eckenebene von P_{10} gelegenen Stabes $P_{10}P_{20} = s$ analog zu einem

¹² Die darstellend-geometrische Durchführung erfordert demnach nur elementare Konstruktionen.

dritten gleichartigen Streckenzug P_{2^k} , usw. Die Folge der gewählten Zusatzstäbe bildet offensichtlich ein gleichseitiges Raumpolygon P_{i0} ($i = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) mit der festen Schränkung $(\sin \sigma)/s$, das von vornherein als Ganzes vorgegeben werden könnte und dann zusammen mit dem ersten Streckenzug P_{0^k} das Rhombengitter eindeutig festlegen würde.

Satz 3: *Zwei gleichseitige Streckenzeuge mit gleicher Seitenlänge und festen, entgegengesetzten gleichen Schränkungen, die eine Ecke und die zugehörige Ebene gemein haben, bestimmen eindeutig ein Rhombengitter mit ebenen Knoten, dem sie angehören.*

Mittels eines ganz ähnlichen Vorgangs, angewendet auf ein Gitterpolygon, dessen Seiten abwechselnd verschiedenen Scharen angehören (und das daher einen zick Zackförmigen Verlauf zeigen wird), ergibt sich eine zweite Bestimmungsmöglichkeit des Rautengitters durch ein solches „alternierendes Polygon“.

Satz 4: *Ein gleichseitiger, zick Zackförmiger Streckenzug, dessen Seiten abwechselnd die Schränkungswinkel $+\sigma$ und $-\sigma$ aufweisen, bestimmt eindeutig ein Rhombengitter mit ebenen Knoten, dem er angehört.*

Als Beispiel hierzu zeigt Abb. 1 die Konstruktion des Radon-Thomasschen *Fischreusenmodells*, also des *drehsymmetrischen Rhombengitters* mit ebenen Knoten. Ausgegangen wurde von der *Kehlreihe* der Knoten, die ein in der Grundrißebene angenommenes regelmäßiges Vieleck ($n = 12$) bildet; die zugehörigen Knotenebenen sind aus Symmetriegründen normal zur Grundebene und berühren den Umkreis. Nach Vorgabe der Maschenweite s läßt sich die nächste Knotenreihe und damit ein alternierendes Gitterpolygon sofort angeben. Die wesentlichen, zum schrittweisen Aufbau des Gitters notwendigen Hilfslinien sind in der Figur enthalten.

Im Hinblick darauf, daß die Maschen eines Gitters verschiedene Formen zeigen, ist zu erwarten, daß eine windschiefe Raute *schränkungsstreue Deformationen* erlaubt. Nun, bezeichnen wir in der Raute $ABCD$ die bei den Gegencken A und C bzw. B und D auftretenden Winkel mit α bzw. β (vgl. Abb. 2), dann

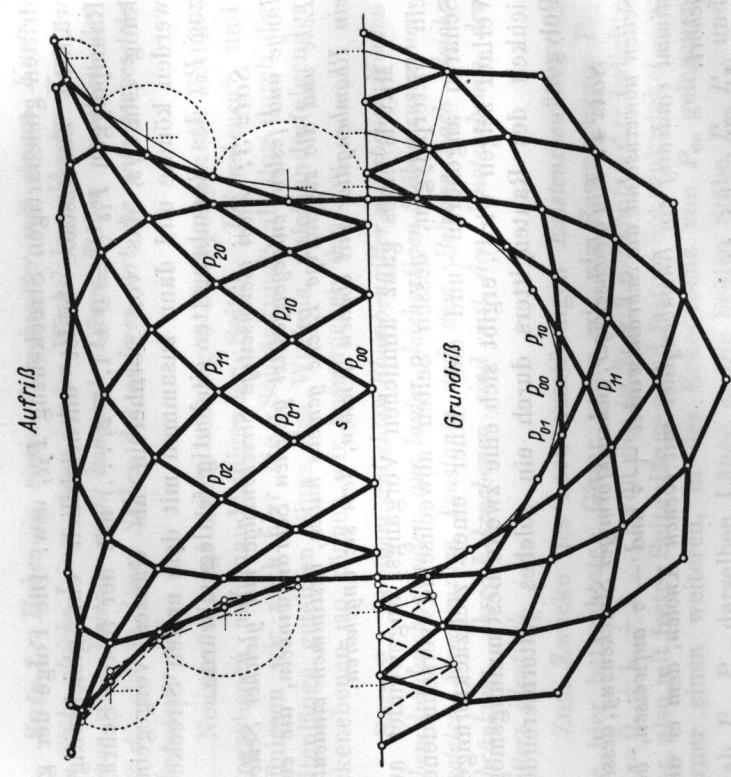


Abb. 1: Teildarstellung des drehsymmetrischen Rhombengitters mit ebenen Knoten. (Radon-Thomassches Netzmodell einer Dreifläche konstanter negativer Krümmung).

erhalten wir durch Auflösung des gleichschenklichen Dreikants $A(BCD)$ für den Schräkwinkel σ die Bedingung

$$(1) \quad \cos \sigma = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Da die Gestalt der Rauta durch α und β vollkommen bestimmt ist, gibt es bei vorgeschrriebener Seitenlänge s noch ∞^1 Maschen mit derselben Schränkung: Eine windschiefe Rauta mit starren Seiten gestattet eine steige Deformation von einem Freiheitsgrad, bei der die Schränkung erhalten bleibt. (Vgl. hierzu Abschn. VI u. VII.) „Beitreise“ der Rauta $ABCD$ mögen jene beiden Kreise heißen, die je ein Paar von Gegenecken enthalten, daselbst die Knotenebenen berühren und in der zugehörigen Symmetrieebene

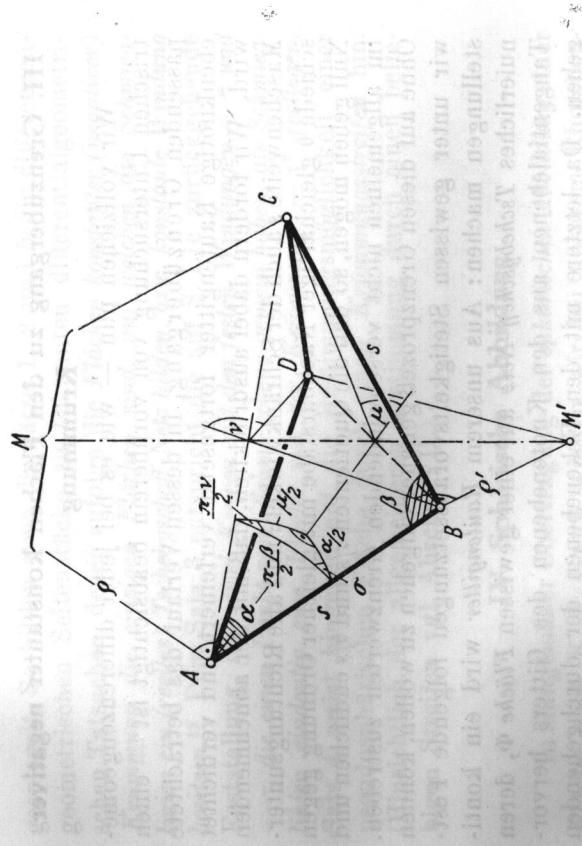


Abb. 2: Rhombische Einzelmasche.

liegen. Ihre Mittelpunkte M , M' ergeben sich im Schnitt der Gitternormalen von A und C , bzw. B und D (vgl. Abb. 2); für ihre Radien ρ und ρ' findet man mit Hilfe der längs der diagonalen BD und AC auftretenden Knickwinkel μ und ν die Werte

$$(2) \quad \rho = s \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\mu}{2} = s \operatorname{ctg} \sigma \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\rho' = s \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\nu}{2} = s \operatorname{ctg} \sigma \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

Bilden wir das Produkt, so erhalten wir mit Rücksicht auf (1) die grundlegende Beziehung

$$(3) \quad \rho \rho' = - \frac{s^2 \cos \sigma}{\sin^2 \sigma},$$

welche besagt, daß bei schränkungstreuen Deformationen einer windschiefen Rauta das Produkt der Beikreisradien konstant bleibt. Für unsere Gitter gilt daher

Satz 5: In einem Rhombengitter mit ebenen Knoten hat das Produkt der Beikreisradien für alle Maschen den gleichen, negativen Wert.

III. Grenzübergang zu den Flächen konstanter negativer Krümmung

Wir vollziehen nun — wie es bei jeder differenzengeometrischen Untersuchung von vornherein beabsichtigt ist — einen passenden Grenzübergang, in dessen Verlauf das betrachtete ebenknotige Rautengitter fortgesetzt verfeinert und verdichtet wird. Wir fordern dabei ausdrücklich, daß mit der abnehmenden Maschenweite s auch der Schräkwinkel σ und alle Richtungsunterschiede θ gleichartiger Nachbarsäbe mit gleicher Ordnung gegen Null gehen mögen, so daß die Quotienten σ/s und θ/s endlichen und im allgemeinen nicht verschwindenden Grenzwerten zustreben. Ohne auf diesen Grenzprozeß genauer eingehen zu wollen, können wir unter gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen folgende Feststellungen machen: Aus unserem *Rautengitter* wird ein kontinuierliches *Tschebyscheff-Netz* auf einer gewissen *Fläche* Φ , deren Tangentialebenen aus den Knotenebenen des Gitters hervorgehen. Da letztere mit den Eckenebenen der durchgehenden Stabzüge zusammenfallen, so sind die Schmiegebene der Netzkurven mit den Berührebenen der Trägerfläche Φ identisch; die Netzkurven stellen mithin die *Schmieghlinien* (Haupttangential- oder Asymptotenlinien) von Φ dar. Diese Kurven haben überdies — zufolge der festen Schränkung der Gitterpolygone — *konstante Windungen* $\pm \tau = \pm \lim \sigma/s$; die (im allgemeinen veränderliche) Krümmung $\kappa = \lim \theta/s$ könnte zur gestaltlichen Festlegung herangezogen werden. Aus den Diagonalzügen des Gitters gehen ferner offensichtlich die *Krümmungslinien* der Fläche Φ hervor, deren Krümmungskreise sich als Grenzlagen der Beikreise einstellen. Auf Grund der Formel (3) haben die *Hauptkrümmungsradien konstantes Produkt*, und Φ ist durch *konstante Flächenkrümmung*

$$(4) \quad K = -\lim \frac{\sin \sigma}{s^2 \cos \sigma} = -\lim \left(\frac{\sigma}{s} \right)^2 = -\tau^2$$

ausgezeichnet.

Die Rhombengitter mit ebenen Knoten sind mithin zur Veranschaulichung der *pseudosphärischen Flächen* geeignet. Deren Eigenschaften werden in klarer und durchsichtiger Weise durch gewisse elementare Beziehungen bei den Gittermodellen wieder-

gespiegelt. So bilden etwa die Sätze 1, 2 und 5 die differenzengeometrischen Seifenstücke zu bekannten differentialgeometrischen Tatsachen, denen zufolge die *Flächen konstanter (negativer) Krümmung die einzigen Flächen sind, auf welchen die Schmieghlinien ein (reelles) Tschebyscheff-Netz bilden, bzw. konstante Windung besitzen*.¹³ Dem Satz 3 entspricht die auf S. Lie zurückgehende Feststellung, daß *e zwei Kurven mit den festen Windungen $+$ und $-\tau$, die einen Punkt samt Schmiegebene gemeinsam haben, als Schmieghlinien eindeutig eine Fläche mit der Krümmung $-\tau^2$ festlegen*. Satz 4 weist hingegen auf die Bestimmungsmöglichkeit einer pseudosphärischen Fläche durch einen *Krümmungsstreifen* hin. (Hinsichtlich der allgemeineren Bestimmung durch einen beliebigen Streifen vgl. Abschn. VII.)

IV. Sphärische Abbildung

In sinngemäßer Übertragung der *sphärischen Abbildung* einer Fläche nach K. F. Gauß werden wir bei unserem Rhombengitter jedem Knotenpunkt P jenen Punkt \bar{P} der *Einheitskugel* zuordnen, dessen Tangentialebene zur Knotenebene von P parallel ist, wobei noch die *Orientierung* zu beachten ist: Der zu \bar{P} gehörige Halbmesser soll zu der nach Abschn. II gerichteten Gitternormale in P gleichsinnig parallel sein.

Beim Weiterrücken längs eines Gitterstabes dreht sich die Knotenebene um den Winkel $\pm \sigma$ und der Bildpunkt auf der Kugel beschreibt einen Großkreisbogen von der Länge $|\sigma|$: Wir gelangen demnach zu einem *sphärischen Rautengitter* mit der konstanten Maschenweite $|\sigma|$.

Satz 6: *Das sphärische Abbild eines Rautengitters mit ebenen Knoten ist ein aus Großkreisbögen aufgebautes Rautengitter der Bildkugel.*

Abb. 3 zeigt das durch sphärische Abbildung der in Abb. 1 dargestellten „Fischreuse“ gewonnene sphärische Rautennetz,

¹³ Eine ausführliche Darstellung der Theorie der pseudosphärischen Flächen bietet etwa L. Bianchi in seinen „Vorlesungen über Differentialgeometrie“ (Übers. v. M. Lukat, Leipzig 1899). — Vgl. auch Enz. math. Wiss. III D 5, Abschn. VII.

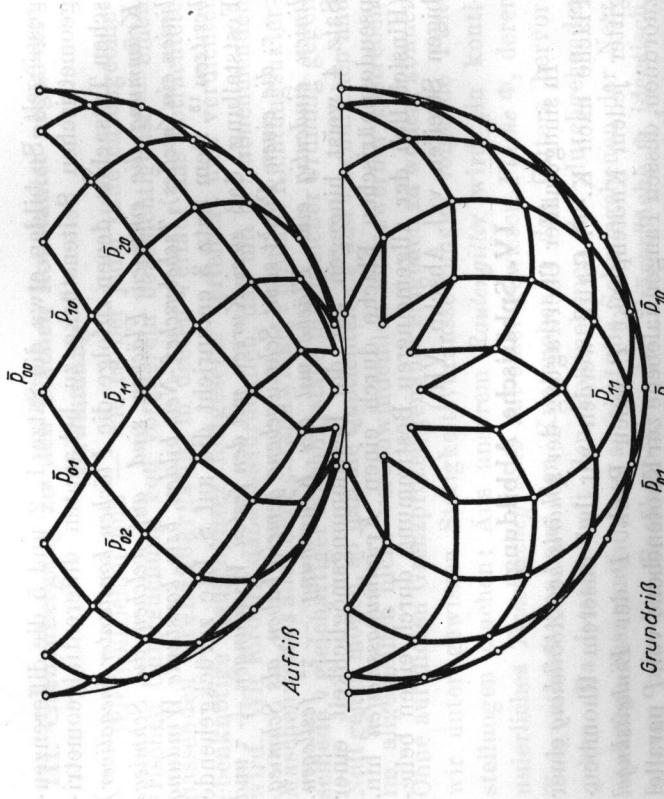


Abb. 3: Teildarstellung eines drehsymmetrischen Rautengitters auf der Kugel.
(Sphärisches Bild des Radon-Thomasschen Netzmodells in Abb. 1.)

das natürlich gleichfalls drehsymmetrisch ist. Der konstruktiv-zeichnerische Vorgang ist durchaus elementar.

Leicht einzusehen ist auch die zu Satz 6 gehörige Umkehrung: *Zu jedem Rautengitter der Kugel gehört ein gestaltlich vollkommen bestimmtes geradliniges und ebenhaftiges Rhombengitter.* Jeder Großkreisbogen zeigt ja durch seine Achse die Richtung des zugeordneten Gitterstabes an. Das sphärische Gitter mag man sich durch zwei durchgehende, verschiedenen Scharen an gehörende Bogenzüge (mit einem gemeinsamen Knoten) oder aber durch einen alternierenden Bogenzug festgelegt denken; die Vervollständigung zu einem Rautennetz ist klar. Den ausgewählten Bogenzügen entsprechen gewisse gleichseitige Raumpolygone konstanter Schränkung, die nach Satz 3 oder 4 eindeutig ein geradliniges Rautennetz mit ebenen Knoten be-

stimmen; dessen sphärisches Bild muß sich dann mit dem vorliegenden Rautennetz der Kugel decken.

Der in Abschnitt III angedeutete Grenzübergang führt schließlich zu dem bekannten Sachverhalt, daß bei *sphärischer Abbildung einer Fläche konstanter Krümmung dem Tschebyscheff-Netz der Schmieglinien wieder ein Tschebyscheff-Netz* entspricht, und daß umgekehrt jedes reelle Tschebyscheff-Netz auf der Kugel — festgelegt etwa durch zwei verschiedenartige Netzkurven — eine gewisse pseudosphärische Fläche der Gestalt nach eindeutig bestimmt.¹³ — Die Grenzform der „Fischreuse“ und ihr sphärisches Abbild würden übrigens, nebenbei bemerkt, zur mathematischen Beschreibung bereits elliptische Integrale erfordern, was die methodische Bedeutung der elementaren differenzengeometrischen Behandlung ins rechte Licht rückt.

Auch mit Hilfe der sphärischen Abbildung läßt sich die *Krümmungskonstanz* der Grenzflächen leicht einsehen: Dem Teil-dreieck ABD einer Gitterraute $ABC'D$ entspricht auf der Kugel ein ebenfalls gleichschenkliges Bilddreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{D}$, dessen Scheitelwinkel supplementär zum Scheitelwinkel α des Gitter-dreiecks ist. Die Flächeninhalte betragen mit Rücksicht auf den entgegengesetzten Umlaufsinn

$$(5) \quad f = \frac{1}{2} s^2 \sin \alpha \quad \text{und} \quad \bar{f} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \sin (\pi - \alpha) + o(\sigma^2),$$

so daß

$$\lim \bar{f}/f = -\lim (\sigma/s)^2 = -\tau^2.$$

Daß der Quotient \bar{f}/f wirklich gegen die Gaußsche Krümmung K der Grenzfläche konvergiert, bedürfte wegen der Verquickung der beiden Grenzprozesse $f \rightarrow 0$ und $\bar{f} \rightarrow 0$ noch einer genaueren Überlegung.

Hier soll noch der differenzengeometrische Kern eines Satzes von J. N. Hazzidakis dargelegt werden, demzufolge der *Inhalt eines von vier Schmieglinien einer Fläche mit der Krümmung -1 begrenzten Vierecks gleich dem Überschuß der Winkelsumme über 2π ist*.¹⁴ Wir betrachten zunächst für ein Rhomben-

¹³ J. N. Hazzidakis, Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstanter Krümmungsmäß. Crelles J. 88 (1880), 68–73.

gitter mit ebenen Knoten P_{ik} das Gebiet $0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n$ und dessen sphärisches Bild. Die paarweise gleichen Winkel α_{ik}, β_{ik} einer Einzelmasche $P_{ik} P_{i-1,k} P_{i-1,k-1} P_{ik}$ treten auf der Kugel als Außenwinkel der Bildraute auf und bestimmen deren (negativen) Inhalt

$$\bar{f}_{ik} = 2\alpha_{ik} + 2\beta_{ik} - 2\pi.$$

Bei der Summierung über das angegebene Gebiet tritt, abgesehen von dem Subtrahenden $2mn\pi$ die Summe sämtlicher Gitterwinkel auf; da je vier in einem der $(m-1)(n-1)$ inneren Knoten zusammenstoßende Winkel den Beitrag 2π liefern, erhalten wir für die Gesamtfläche des sphärischen Bildes vorläufig den Ausdruck

$$(6) \quad \bar{F} = \sum \bar{f}_{ik} = \sum \text{Randwinkel} - 2(m+n-1)\pi.$$

Wir bezeichnen nun als „Streifen 1. Art“ g_k die Folge benachbarter Gittermaschen mit den Knoten P_{ik} und $P_{i,k-1}$ ($0 \leq i \leq m$), mit \bar{g}_k das zugehörige sphärische Bild. Erstrecken wir die obige Summation nicht über das ganze Gebiet, sondern nur über das Streifenpaar $g_k + g_{k+1}$, so ist die Summe der Gitterwinkel auch gleich der doppelten Summe der in der mittleren Knotenreihe P_{ik} auftretenden Winkel, wobei alle inneren Knoten wieder den Beitrag 2π liefern. Wir erhalten also für das sphärische Bild

(7) $\bar{g}_k + \bar{g}_{k+1} = 2(\beta_{1,k} + \alpha_{1,k+1} + \alpha_{m,k} + \beta_{m,k+1}) - 4\pi$, und einen analogen Ausdruck für Paare benachbarter „Streifen 2. Art“ h_i . Der Inhalt des sphärischen Bildes eines solchen Streifenpaars hängt also im wesentlichen nur von den in der Mitte der Schmalseiten auftretenden Winkeln ab, und wir sind damit umgekehrt in der Lage, die in der Formel (6) stehende Randwinkelsumme durch die \bar{g}_k und \bar{h}_i auszudrücken:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & (\alpha_{11} + \beta_{11} + \alpha_{1n} + \alpha_{mn}) + \frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} + \dots + \frac{\bar{g}_{n-1} + \bar{g}_n}{2} + \\ & + 2\pi(m-1) + \frac{\bar{h}_1 + \bar{h}_2}{2} + \dots + \frac{\bar{h}_{m-1} + \bar{h}_m}{2} + 2\pi(n-1) - \\ & - 2\pi(m+n-1). \end{aligned}$$

Da jedoch die Summe aller \bar{g}_k , ebenso wie die Summe aller \bar{h}_i , den Wert \bar{F} hat, so erhalten wir damit die Beziehung

$$(8) \quad -\bar{F} = \sum \text{Eckenwinkel} - 2\pi - \frac{1}{2}(\bar{g}_1 + \bar{g}_n + \bar{h}_1 + \bar{h}_m).$$

Der von den Randstreifen herrührende letzte Term konvergiert nun bei fortschreitender Verfeinerung des Gitters gegen Null, und $-\bar{F}$ stimmt schließlich wegen der Krümmung -1 mit dem Inhalt des Schmiegliniensparallelogramms überein, womit der Satz von Hazzidakis gewonnen ist.¹⁵

Zum Schluß soll auf zwei *modellmäßige Darstellungen sphärischer Rautengitter* hingewiesen werden. Naheliegend ist es, ein aus Fäden geknüpftes Netz konstanter Maschenweite über eine glatte Kugel, etwa einen Ball, zu spannen; die Fadenstücke legen sich dann längs Großkreisen an, und je nach den ansetzenden Randkräften lassen sich alle möglichen Gestalten (wenigstens gebietsweise) erreichen. Die drehsymmetrischen Formen gemäß Abb. 3 treten beispielsweise bei Ballonetzen praktisch auf. Eine andere Möglichkeit — durch die bekannten japanischen Papierblumen angeregt — besteht darin, eine Anzahl Kongruenter Kreisringsektoren aus Karton, in gleichen Abständen σ radial voneinander und zick Zackförmig verknickt, längs der Knicke derart zusammenzuheften, daß lauter Kugelrhomben entstehen. Das Modell ist weitgehend beweglich und zeigt in jedem Zustand (von den platten Grenzlagen abgesehen) auf der Außen- und Innenseite je ein sphärisches Rautengitter.¹⁶

V. Gleichgewichtsmodelle und Kräftepläne

Auch die ebenknotigen Rhombengitter selbst lassen sich auf bemerkenswerte Weise durch geknüpfte *Fadennetze* dar-

¹⁵ Dieser Satz bot bekanntlich D. Hilbert die Handhabe zu dem Nachweis, daß es keine singularitätenfreien Flächen konstanter negativer Krümmung geben können (Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl. 1903, Anhang V). Im vorliegenden Rahmen müßte man zu zeigen trachten, daß es kein durchwegs schlichtes geradliniges Rautengitter mit ebenen Knoten gibt.

¹⁶ Die erwähnten Papierblumen weisen einen überraschenden Formenreichtum auf. Das liegt daran, daß sie aus ganz dünnem Material gefertigt sind, das auch Verwindungen zuläßt. Wären sie aus vollkommen steifem Material hergestellt, so würden sie bestenfalls sphärische Deformationen gestatten.

stellen, und zwar durch gewisse freitragende Gleichgewichtslagen. Man kann sich hiervon überzeugen, indem man zu einem vorgelegten Gitter nach den Methoden der graphischen Statik einen *Kräfteplan* entwickelt.

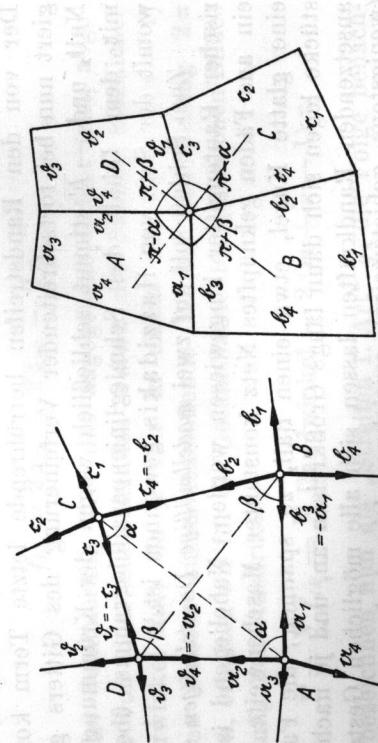


Abb. 4: Ausschnitt aus einem ebenknotigen Rhombengitter und dem zugehörigen Kräfteplan.

Die vier in einem Knoten angreifenden Spannkkräfte wirken in Richtung der Stäbe und halten einander dann das Gleichgewicht, wenn die sie repräsentierenden Vektoren sich zu einem geschlossenen Viereck aneinanderreihen lassen. Entsprechend der Tatsache, daß je zwei Nachbarknoten zwei im Verbindungsstab liegende gegengleiche Teilkkräfte aufweisen (beispielsweise $a_1 = -b_3$ in Abb. 4), haben die zugehörigen Kräftevierecke im Plan eine Seite gemein. Werden die Beträge der Spannkkräfte längs zweier durchgehenden Stabzüge verschiedener Art (oder für einen alternierenden Stabzug) beliebig vorgegeben, so läßt sich der Kräfteplan durch bloßes Parallelziehen ganz elementar und eindeutig entwickeln. Aus seiner Existenz kann dann umgekehrt geschlossen werden, daß das Stabsystem nach Anbringung der vom Plan angezeigten *Randkräfte* im Gleichgewicht ist. Das Gleichgewicht ist sicher *stabil*, wenn nur *Zugspannungen* auftreten, was man bei *schlichten* Gittern durch geeignete Wahl der Randkräfte stets erreichen kann. Es gilt demnach

Satz 7: Ein schlichtes geradliniges Rautengitter mit ebenen Knoten kann stets als Gleichgewichtslage eines frei ausgespannten Netzes aus unelastischen und verknöpften Fäden verwirklicht werden; in der Wahl der Randkräfte besteht dabei noch einige Freiheit.

So läßt sich etwa das drehsymmetrische Gitter aus Abb. 1 sehr einfach verwirklichen, indem man — wie es Radon³ und Thomas⁴ getan haben — ein schluchtförmig geschlossenes gleichmaschiges Fadennetz zwischen zwei Kreisreifen ausspannt.¹⁷ Es wäre übrigens zu betonen, daß Rautennetze auch noch anderer freier Gleichgewichtslagen fähig sind, bei welchen sie keine ebenen Knoten aufweisen; sie repräsentieren dann aber natürlich auch keine pseudosphärischen Flächen.

Die hier als Kräftepläne aufgetretenen *Viereckspolyeder* dürfen ein selbständiges Interesse für sich beanspruchen. Wie aus Abb. 4 ersichtlich ist, stoßen in jeder Ecke vier von den Knoten einer Gittermasche herrührende (ebene) Kräftevierecke zusammen, und zwar mit Winkeln, die zu den Maschenwinkeln α, β supplementär sind oder mit diesem übereinstimmen, je nachdem die Stabkräfte gleiches Vorzeichen haben (Stabilität bei lauter Zugspannungen), oder verschiedene Vorzeichen auftreten (labiles Gleichgewicht¹⁸). Jedenfalls werden die Ecken von *achsensymmetrischen Vierkanten* mit gleichen Gegenseitenpaaren ($\pi - \alpha$ und $\pi - \beta$ bzw. α und β) gebildet, deren Gegenwinkel natürlich auch paarweise gleich sind ($\pi - \sigma$ und $\pi + \sigma$ bzw. $\pi \pm \sigma$). Die Symmetrieebene ist die gemeinsame Halbierende der von den beiden Gegenkantelpaaren aufgespannten Winkel. Die noch zusätzlich vorhandenen Symmetrien sind hier ohne Belang. Es wäre nur noch zu erwähnen, daß die Schnittgeraden gegenüberliegender Seitenflächen parallel zu den Maschen diagonalen laufen und daher wie diese einen rechten Winkel einschließen.

¹⁷ H. Thomas zeigt a. a. O. schöne Photographien solcher Netzmodelle. In gleicher Weise könnte man mittels geeigneter ungleichmäßiger Netze Schmieglinienmodelle beliebiger negativ gekrümmter Drehflächen herstellen.

¹⁸ Dieser Fall würde bei R. Sauer¹⁹ vorliegen, der jedoch auf Gleichgewichtsfragen nicht eingeholt.

Im Verlauf des Grenzüberganges gemäß Abschn. III strebt das vorliegende Viereckspolyeder mit zunehmender Verfeinerung gegen eine gewisse *krumme Fläche* $\bar{\Phi}$, auf der — wegen der Ebenheit der ursprünglichen Vierecke — die von den Kantenzügen herrührenden Flächenkurven ein *konjugiertes Netz* bilden. Ein aus benachbarten Vierecken gebildeter Streifen konvergiert nämlich gegen eine $\bar{\Phi}$ längs einer Netzlinie umschriebene *Torse*, deren Erzeugenden aus den Querkanten hervorgehen, also die Netzkurven der anderen Schar berühren. Weil die Eckenebenen der durchlaufenden Kantenzüge die Vierkantachsen enthalten, so enthalten in der Grenze die Schmiegebenen der Netzkurven die Flächennormalen: Die Netzkurven sind also *geodätische Linien* von $\bar{\Phi}$. Flächen mit einem Netz aus konjugierten Geodätischen werden nach A. Voss benannt, der sie, wenn auch nicht als Erster, eingehend studiert hat.¹⁹

Satz 8: *Wird ein geradliniges Rhombengitter mit ebenen Knoten als Gleichgewichtssystem aufgefaßt, dann stellt jeder dazu passende Kräfteplan ein Polyeder aus ebenen Vierecken dar, das achsensymmetrische Ecken und durchwegs gleiche Kantenwinkel besitzt. Ein solches Viereckspolyeder kann als differenzengeometrisches Modell einer (speziellen) Voss'schen Fläche angesehen werden.*

Die Besonderheit der hier auftretenden Voss'schen Fläche beruht auf der erwähnten Orthogonalität der Rautendiagonalen und kann folgendermaßen gekennzeichnet werden: *Das konjugierte System aus Geodätischen besitzt ein zu einem Orthogonalen System konjugiertes Diagonalsystem.*

Der Kräfteplan, der zur Radon-Thomasschen *Fischreuse* gehört, besitzt unter der naheliegenden (jedoch nicht zwangsläufig notwendigen) Voraussetzung einer dreh- und spiegelsymmetrischen Spannungsverteilung eine leicht einzusehende Schraubstruktur (Abb. 5). Die den Knoten eines Meridians zugeordneten Kräftevierecke besitzen dann eine gemeinsame, die Schraubachse unter rechtem Winkel treffende Diagonalgerade, womit unmittelbar zu erkennen ist, daß als Grenzform eine *Wendelfläche* auftritt. Diese ist das geläufigste Beispiel einer Voss'schen Fläche.

¹⁹ Vor A. Voss (a. a. O.) wurden diese Flächen bereits von K. Peterson (Über Kurven und Flächen. Moskau und Leipzig 1868) betrachtet.

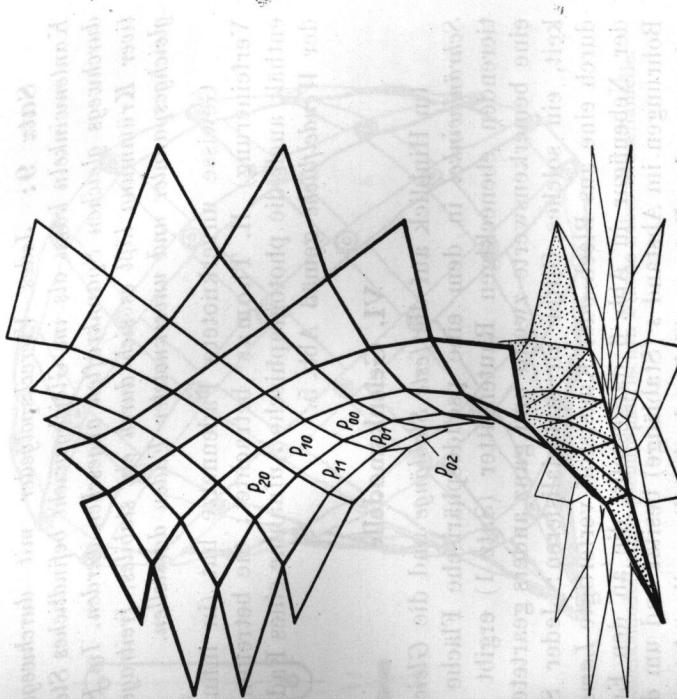


Abb. 5: Kräfteplan zur Radon-Thomasschen Fischreuse nach Abb. 1. (Differenzengeometrisches Modell einer Wendelfläche mit einem konjugierten Netz aus geodätischen Linien.)

Die Beziehung zwischen dem Ausgangsgitter und dem zugehörigen Kraftpolyeder ist ausschließlich durch die *parallele Lage entsprechender Strecken* gekennzeichnet, mithin durchaus gegenseitig und *umkehrbar*; man spricht ja geradezu von „*reziproken Kräfteplänen*“. Demzufolge kann auch das Kantensystem des Polyeders als Gleichgewichtssystem angesehen und — im stabilen Fall! — modellmäßig durch ein *freiragendes Fadennetz* dargestellt werden. Die Fäden weisen durchwegs *konstante und gleiche Spannungen* auf, weil ja der zugehörige Kräfteplan jetzt aus lauter Rauten besteht, und sie brauchen offenbar *nicht verknötet* zu werden.

Da zu jedem der in Satz 8 gezeichneten Viereckspolyeder ein parallelkantiges Rautengitter mit ebenen Knoten gehört, so gilt

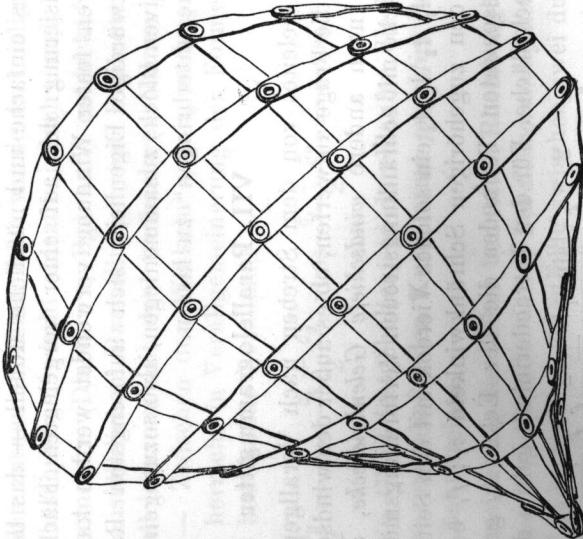


Abb. 6: Gelenkmodell einer pseudosphärischen Fläche nebst Einzellamelle.

Im Hinblick auf die *feste Stablänge* und die *Gleichheit aller Schrängwinkel* in dem eine pseudosphärische Fläche repräsentierenden ebeneckigen Rautengitter (Satz 1) ergibt sich noch eine bemerkenswerte zweite und ganz anders gearbeitete Möglichkeit, ein solches Gitter zu materialisieren: Jeder Stab wird durch eine aus Blech oder Kunststoff verfertigte *Lamelle* gemäß der Nebenfigur in Abb. 6 dargestellt, die an den Enden zwei Bohrungen im Abstand s (Stablänge) besitzt und um die Längsachse um den Betrag σ (Schrängwinkel) tordiert ist. Die Stäbe erster Art sind etwa rechtsgewunden, die Stäbe zweiter Art linksgewunden auszuführen. Werden diese Lamellen dann zu je vier in einem Knoten gelenkig verbunden, am besten mittels Nieten, so entsteht ein *weitgehend beweglicher Mechanismus*, der in jedem Zustand ein ebeneckiges Rhombengitter darstellt und damit eine Fläche der konstanten Krümmung $-(\sigma/s)^2$ samt ihren Schmieglinien repräsentiert.

Das in Abb. 6 wiedergegebene *Gelenkmodell*, das $6 \cdot 6 = 36$ Maschen aufweist und aus je 49 um $+20^\circ$ bzw. -20° toradierten Stahllamellen von 1 mm Stärke und mit 5 cm Bohrungsabstand besteht, also Flächen mit einer konstanten Krümmung von rund $-(1/14 \text{ cm})^2$ annähert, erwies sich als außerordentlich instruktiv und brauchbar zur Demonstration des Aussehens und vieler Eigenschaften der pseudosphärischen Flächen.²⁰ Die Figur

²⁰ Für die Anfertigung des Modells ist der Verfasser Herrn Ing. K. Wanka zu besonderem Dank verpflichtet.

Satz 9: Jedes Viereckspolyeder mit durchwegs gleichen Kantenvinkeln kann als im Gleichgewicht befindliches Stabwerk mit durchwegs gleichen Spannkräften angesehen werden. Im Falle negativer Krümmung läßt es sich durch ein stabiles, freitragendes Netz gleichgespannter und unverknöterter Fäden darstellen.

Gewisse unverknöte Fadennetze hat (in infinitesimaler Verfeinerung) H. Thomas⁸ betrachtet; die betreffende Arbeit enthält auch die photographische Aufnahme eines Fadenmodells der Wendelfläche gemäß Abb. 5.

VII. Gelenkmodelle

Im Hinblick auf die *feste Stablänge* und die *Gleichheit aller Schrängwinkel* in dem eine pseudosphärische Fläche repräsentierenden ebeneckigen Rautengitter (Satz 1) ergibt sich noch eine bemerkenswerte zweite und ganz anders gearbeitete Möglichkeit, ein solches Gitter zu materialisieren: Jeder Stab wird durch eine aus Blech oder Kunststoff verfertigte *Lamelle* gemäß der Nebenfigur in Abb. 6 dargestellt, die an den Enden zwei

Bohrungen im Abstand s (Stablänge) besitzt und um die Längsachse um den Betrag σ (Schrängwinkel) tordiert ist. Die Stäbe erster Art sind etwa rechtsgewunden, die Stäbe zweiter Art linksgewunden auszuführen. Werden diese Lamellen dann zu je vier in einem Knoten gelenkig verbunden, am besten mittels Nieten, so entsteht ein *weitgehend beweglicher Mechanismus*, der in jedem Zustand ein ebeneckiges Rhombengitter darstellt und damit eine Fläche der konstanten Krümmung $-(\sigma/s)^2$ samt ihren Schmieglinien repräsentiert.

Hübsch wäre auch die gelenkige Ausführung der „Fischreuse“ gemäß Abb. 1, die einen Mechanismus von zwei Freiheitsgraden ergeben würde, der zur ausschließlichen Wiedergabe pseudosphärischer *Drehflächen* fähig wäre.

Bei dieser Gelegenheit sei noch ausdrücklich auf das (in dem beschriebenen Gelenkmodell mehrfach enthaltene) differenzengeometrische Modell der *Raumkurven konstanter Torsion* hingewiesen, das aus der gelenkigen Aneinanderziehung einer größeren Anzahl gleichartiger verwundener Lamellen besteht.

Dieses einfache und nützliche Modell — das beispielsweise zur Realisierung der auf einer vorgelegten Fläche verlaufenen Kurven fester Windung verwendet werden kann — zeigt die merkwürdige Eigenheit, sich auf engsten Raum (zu einem massiven Block) zusammenlegen, also sozusagen „in der Westentasche unterbringen“ zu lassen.

VII. Parallelogrammgitter

Geleitet von dem Streben nach Verallgemeinerung kann man die Frage aufwerfen, ob es außer den windschiefen Rhomben auch noch andere *windschiefe Gelenkvierecke*, also starreitige Vierecke mit schrängungstreuen Verformungsmöglichkeiten gibt. Sei $A_1 A_2 A_3 A_4$ ein solches Viereck mit den Seiten $s_i = A_i A_{i+1}$ und den zugehörigen Schräkwinkeln σ_i ; f_i bezeichne in dem aufgespannten Tetraeder die der Ecke A_i gegenüberliegende Dreiecksfläche. Für den Tetraederinhalt gelten dann die Formeln

$$(9) \quad V = \frac{2}{3} f_3 f_4 \frac{|\sin \sigma_1|}{s_1} = \frac{2}{3} f_4 f_1 \frac{|\sin \sigma_2|}{s_2} = \dots$$

Bei einer Schrängungstreuen Deformation bleiben mithin die Flächenverhältnisse $f_1 : f_3$ und $f_2 : f_4$ fest. Die zur gemeinsamen Grundlinie $A_2 A_4$ von f_1 und f_3 gehörigen Höhen können demnach nur *gleichzeitig verschwinden*, was Beziehungen von der Art

$$s_4 \pm s_1 = s_2 \pm s_3 \text{ und } s_1 \pm s_2 = s_3 \pm s_4$$

nach sich zieht. Genaue Untersuchung aller möglichen *Vorzeichenkombinationen* läßt als notwendige Bedingung die *Gleichheit der Gegenseiten* $s_1 = s_3$, $s_2 = s_4$ erkennen; daß diese Bedingung auch hinreicht, folgt aus der mit ihr verbundenen Flächengleichheit $f_1 = f_3$, $f_2 = f_4$. Die Schräkwinkel $\sigma_1 = \sigma_3$ und $\sigma_2 = \sigma_4$ unterliegen zufolge (9) der Bedingung

$$(10) \quad |\sin \sigma_1| : |\sin \sigma_2| = s_1 : s_2.$$

Neben dem Rhombus ist also nur noch das *windschiefe Parallelogramm* schrängungstreu beweglich.²¹ Dieses merkwürdige Raumgetriebe (das sich am einfachsten wieder aus ver-

wundenen Lamellen zusammensetzen läßt) wurde erstmalig von G. T. Bennett beschrieben,⁹ bald darauf jedoch auch von französischen Geometern (Darboux, Bricard) entdeckt.²² In einer späteren, ausführlichen Darstellung¹¹ hat Bennett das windschiefe Parallelogramm mit dem treffenderen Namen „*Isogramm*“ belegt. — Zwischen den Winkeln $\sigma_1 = \sigma_3$ und $\sigma_2 = \sigma_4$ eines Isogramms herrscht in Verallgemeinerung der Formel (1) die unschwer zu beweisende Beziehung

$$(11) \quad \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{2} = \cos \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} : \cos \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \text{const.}$$

Wird demnach ein Glied festgehalten, so durchlaufen die Endpunkte der beiden anschließenden Kurbelarme *projektive Punktreihen* auf ihren Bahnkreisen.

In Verallgemeinerung des bisher benutzten Rhombengitters können wir demnach ein (windschiefes) *Parallelogrammgitter mit ebenen Knoten* $\{P_{ik}\}$ betrachten. Sämtliche zwischen zwei durchlaufenden Nachbarzügen eingespannten Stäbe haben gleiche Länge

$$(12) \quad \begin{aligned} s'_i &= P_{i-1, k} P_{ik} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ s''_k &= P_{i, k-1} P_{ik} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

und sind gleich geschränkt. Damit einander die Maschen nicht überlappen, seien die Schräkwinkel von vornherein spitz und für die Stäbe erster Art positiv (σ_i) und für die Stäbe zweiter Art negativ ($-\sigma'_k$) vorausgesetzt; überdies haben sie der Bedingung (10) zu genügen:

$$(13) \quad \frac{\sin \sigma'_i}{s'_i} = \frac{\sin \sigma''_k}{s''_k} = \tau = \text{const}; \quad 0 < \sigma'_i < \pi/2, \quad 0 < \sigma''_k < \pi/2.$$

Die Theorie des allgemeinen Isogrammgitters läßt sich ganz analog zu der des Rautengitters entwickeln, besitzt aber naturgemäß nicht mehr ganz denselben Grad der Anschaulichkeit. In Erweiterung der Sätze 3 und 4 ist ein solches Gitter durch

²¹ G. Darboux, Sur un problème relatif à la théorie des courbes gauches. Mém. ac. sci. 50 (1908), 1–31.

²² Vom Gesichtspunkt der „symmetrischen Schrotungen“ aus wurde der Mechanismus von J. Krames betrachtet: Zur Geometrie des Bennettischen Mechanismus. Sitzgsber. Ak. d. Wiss. Wien 146 (1937), 159–173.

zwei Stabzüge verschiedener Art oder einen alternierenden Stabzug eindeutig festgelegt.

Von vornherein besteht auch wieder die Absicht, durch einen Grenzprozeß, der die Seiten und Schrämkinkel unter Einhaltung der Bennett-Relation (13) ständig verkleinert, zu einem *Tschebyscheff-Netz* auf einer *krummen Fläche* Φ überzugehen. Wegen der Ebenheit der Gitterknoten handelt es sich natürlich um das Netz der *Schmieglinien* von Φ , und diese haben offensichtlich *feste Torsionen* τ und $-\tau$. Man gelangt also auch von diesem allgemeineren Ausgangspunkt neuerlich nur zu den *pseudosphärischen Flächen*. Die Konstanz der Flächenkrümmung läßt sich wieder mittels der *sphärischen Abbildung* plausibel machen, die dem Gitter ein parallelogrammatisches Netz aus Großkreisbögen der Längen σ'_i und σ''_k auf der Einheitskugel zuordnet (vgl. Abschn. IV); einem Teildreieck f eines Isogramms mit dem Winkel α entspricht dabei ein sphärisches Dreieck \tilde{f} mit dem Winkel $\pi - z$, und es gilt im Verallgemeinerung von (5)

$$(14) \quad K = \lim \frac{\tilde{f}}{f} = - \lim \frac{\sigma'_i \sigma''_k \sin(\pi - \alpha)}{\sigma'_i \sigma''_k \sin z} = -\tau^2.$$

Auch das Isogrammnetz läßt sich als *Gleichgewichtslage eines verknüpften Fadennetzes* ansehen (vgl. Abschn. V). Der zugehörige *Kräfteplan* ist wiederum ein *Viereckspolyeder mit achsensymmetrischen Ecken* und repräsentiert eine *Voss'sche Fläche*, diesmal jedoch ganz allgemeiner Art; offenbar läßt sich ja jedes beliebige Viereckspolyeder mit achsensymmetrischen Ecken durch parallele Kanten auf ein ebenknotiges Vierecksnetz beziehen, dessen Maschen dann gleichfalls achsensymmetrisch sein müssen, also durchwegs Isogramme sind. Ein solches Viereckspolyeder kann im Falle negativer Krümmung wieder durch ein stabiles System *unverknüpfter Fäden* dargestellt werden (vgl. Satz 9); diesmal weist jedoch nur jeder Einzelfaden konstante Spannung auf, während die Spannung von Faden zu Faden wechselt kann.

Die Ausführung eines *gelenkigen Modells* aus geschränkten Lamellen liegt auf der Hand und ein diesbezüglicher Hinweis findet sich schon bei G. T. Bennett;¹¹ es bietet jedoch dem einfacheren Rautensystem gegenüber so gut wie keine Vorzüge.

Zusammenfassend halten wir fest:

Satz 10: In einem Parallelogrammnetz mit ebenen Knoten hat der Quotient aus Stablänge und Sinus des Schrämkinkels einen konstanten Betrag. Ein schlichtes Gitter dieser Art kann als differenzengeometrisches Modell einer pseudosphärischen Fläche und ihrer Schmieglinien dienen. Es läßt sich aus verwundenen Lamellen gekonnt ausführen oder als Gleichgewichtslage eines geknüpften Fadennetzes darstellen; jeder dazu passende Kräfteplan bildet ein ebenflächiges Viereckspolyeder mit achsensymmetrischen Ecken, das als Modell einer Voss'schen Fläche mit ihrem Netz aus konjugierien Geodätischen angesehen werden kann.

Nach allem könnte es scheinen, daß die Betrachtung des allgemeinen Parallelogrammnetzes gegenüber dem übersichtlicheren Rhombengitter für die Theorie der pseudosphärischen Flächen überhaupt ohne Belang wäre. In der Tat wird in den meisten Fällen mit dem Rautenmodell das Auslangen gefunden werden. Als Anwendung des Isogrammodells möge hier jedoch die Bestimmung einer Fläche vorgeschriebener fester Krümmung $-\tau^2$ durch einen beliebig vorgelegten Streifen besprochen werden.

Zunächst konstruieren wir uns ein differenzengeometrisches Modell des gegebenen Streifens, indem wir eine (genügend dichte) Folge von Punkten P_i der Streifenkurve samt den zugehörigen Steifenebenen ε_i herausgreifen, die wir uns durch die Schnittgeraden e_i und e_{i+1} mit den Nachbarebenen ε_{i-1} und ε_{i+1} begrenzt denken; normalerweise werden zwei aufeinanderfolgende Punkte P_{i-1} und P_i zu verschiedenen Seiten der Erzeugenden e_i liegen und von dieser näherungsweise gleiche Entfernung haben. Um genau gleiche Entfernungen zu haben, ändern wir das Modell dadurch leicht ab, daß wir jeden Punkt P_i samt dem nachfolgenden Teil in der Richtung des Lotes auf e_i verschieben, bis sein Abstand gleich $P_{i-1} e_i$ ist. Da es sich hierbei um Verschiebungen zweiter Ordnung handelt, nimmt ihr Gesamteinfluß mit zunehmender Verfeinerung unbeschränkt ab. Die Neulagen der Elemente (P_i, ε_i) können wir nun als *Diagonalsreihe von Knotenelementen* $(P_{ii}, \varepsilon_{ii})$ eines ebeneckigen Parallelogrammnetzes mit vorgeschriebener Schränkungskon-

stante $s/\sin \sigma = t$ ($= 1/\tau$) ansehen, weil sich zu je zwei aufeinanderfolgenden Elementen ein passendes Isogramm finden läßt. Fassen wir etwa die Punkte P_{00}, P_{11} mit den zugehörigen Ebenen $\varepsilon_{00}, \varepsilon_{11}$ und deren Schnittgerade e_{11} ins Auge; bezeichnet v_{11} den Neigungswinkel der Diagonale $d_{11} = P_{00}P_{11}$ gegen ε_{11} (und ε_{00}), so schneidet der *Drehzylinder* mit der Achse d_{11} und dem Halbmesser $t \sin v_{11}$ auf e_{11} die fehlenden Isogrammecken P_{01} und P_{10} aus, wie man leicht bestätigt; P_{01} sei dabei jener Punkt, dessen Verbindungsstab mit P_{00} positive Schrängung aufweist. In dieser Weise fortfahren, gelangt man zu einem alternierenden Stabzug, der eindeutig ein Parallelogrammgitter mit ebenen Knoten und mit der Schrängung $\tau = 1/t$ bestimmt. Einer Prüfung bedarf bloß noch die Frage, ob der benutzte Drehzylinder stets reelle Zusatzknoten liefert; da diese Knoten P_{01} und P_{10} — um bei dem betrachteten Isogramm zu bleiben — auf einer in ε_{00} um P_{00} verlaufenden Ellipse mit den Halbachsen t und $t \sin v_{11}$ liegen, wobei t der Normalprojektion von d_{11} angehört, so ist leicht einzusehen, daß bei genügend dichter Punktfolge stets reelle Schnittpunkte zu erhalten sind, wenn der Winkel der Diagonalen d_{11} und e_{11} eine gewisse Schranke nicht unterschreitet, d. h. wenn in dem vorgelegten Streifen nicht gerade ein *Schmieglement* auftritt. Handelt es sich also nicht überhaupt um einen *Schmiegstreifen*, so existiert sicher eine ihn enthaltende Fläche vorgeschriebenen Krümmungsmaßes. Im Falle eines Schmiegestreifens müßte derselbe die konstante Torsion τ oder $-\tau$ aufweisen; dann dürfte aber bekanntlich noch ein zweiter Schmiegstreifen entgegengesetzter Windung beliebig hinzugefügt werden.

Über die Rolle, die ein von R. Sauer¹⁰ benutztes Parallelogrammgitter mittlerer Allgemeinheit spielt, das nur *zwei Stablängen* $s'_i = s'$ und $s''_k = s''$ und dementsprechend nur zwei Schrämkinkel $\sigma'_i = \sigma'$ und $-\sigma''_k = -\sigma''$ enthält, wird im nächsten Abschnitt berichtet. Hier sei nur noch auf einen Satz über *Kurven konstanter Torsion* hingewiesen, der sich durch die Betrachtung zweier benachbarter Stabzüge eines solchen Gitters ergibt. Das betreffende leiterähnliche Gebilde mag man sich wieder aus geschränkten Lamellen hergestellt und beweglich

denken. Die beiden „Holme“ sind gleichseitige Polygone konstanter und gleicher Schrängung, von welchen eines beliebig vorgegeben werden kann; das zweite ist dann noch zweifach unbestimmt, nach Annahme einer „Sprosse“ (der Länge, Richtung und dem Schrämkungsvorzeichen nach) jedoch eindeutig festgelegt und elementar zu konstruieren. Werden Länge und Schrängung der Sprossen festgehalten, ihre Folge jedoch fortschreitend verdichtet, so konvergieren die Holmpolygone gegen zwei Kurven fester und gleicher Windung. Demnach läßt sich zu jeder *Kurve konstanter Torsion* auf ∞^2 Arten eine *Begleitkurve gleicher Torsion* finden, derart daß *entsprechende Punkte eine feste Entfernung s haben und entsprechende Bögen gleich lang sind*; *entsprechende Schmiegelementen enthalten die Verbindungsgerade der zu gehörigen Punkte und bilden einen festen Winkel $\sigma = \arcsin s \tau^{23}$* . Die Verbindungsgeraden erzeugen eine *Strahlfläche konstanten Dralls* $p = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}$, deren Strikionslinie die Sprossenstrecken halftet; die beiden Holmkurven sind *Schmieglinien* der Fläche. Solchen „*Bäcklund-Paaren*“ von Kurven fester Windung werden wir in Abschnitt IX begegnen. Hier sei nur noch ein einfaches einschlägiges Modell erwähnt: Knüpft man die Enden einer Anzahl gleicher Stäbe in gleichen Abständen in zwei Schnüre ein, so entsteht eine Art „*Strickleiter*“, die bei Vernachlässigung des Eigengewichts in jeder gespannten Gleichtagslage einen Isogrammstreifen der vorhin betrachteten Art bildet. Das durch infinitesimale Verfeinerung daraus entstehende Bäcklund-Paar ist allerdings ziemlich speziell.²⁴

VIII. Flächenstarre Verknickungen der Kräftepläne und winkeltreue Gittertransformationen

Viereckspolyeder mit achsensymmetrischen Ecken, wie sie als Kräftepläne in Abschn. V und VII aufgetreten sind, haben eine merkwürdige Eigenschaft, die 1903 von H. Wiener entdeckt.⁵

²³ Analytisch erfordert die Ermittlung einer solchen Begleitkurve die Integration einer Riccati'schen Differentialgleichung.

²⁴ Die beiden Kurven konstanter Torsion sind kongruent und periodisch. Ihre Tangenten sind parallel zu den Erzeugenden jener beiden Kegel, die eine Sitzungsberichte der math.-naturw. Kl. Abb. IIa. 160 Bd. 1.—5. Heft.

und später neuerlich von R. Sauer und H. Graf aufgezeigt wurde⁶: *Sie sind unter Erhaltung der Seitenflächen längs der Kanten kontinuierlich und zwangsläufig verknickbar.* Zwischen den Seitenwinkeln α, β und den Kantenwinkeln φ, ψ eines achsen-symmetrischen Vierkants besteht nämlich die Beziehung

$$(15) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

so daß während einer Verknickung mit der Achsensymmetrie auch das Tangentenprodukt der halben Kantenwinkel erhalten bleibt muß.²⁵ Werden daher für alle Vierkante des Polyeders mit Hilfe eines gemeinsamen Parameters λ neue Kantenwinkel φ', ψ' vermöge

$$(16) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\psi'}{2} = \lambda \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

angesetzt, so bleibt Gleichung (15) erfüllt; das neue Polyeder läßt sich aus den alten Vierecken zusammensetzen und stellt demnach eine Knickform des Ausgangsgebildes dar. Stetiges Anwachsen des *Knickparameters* λ von 1 auf den Endwert beschreibt den zugehörigen *koninuierlichen Knickvorgang*. Für $\lambda = 0$ oder ∞ ergeben sich zwei vollständig platte Grenzformen, die praktisch jedoch im allgemeinen nicht realisierbar sind.

Gehen wir jetzt insbesondere von dem einem ebenknotigen *Rhomengitter* zugeordneten Kräftepolyeder aus, dessen Kantewinkel nach Abschn. V die Werte $\varphi = \pi - \sigma, \psi = \pi + \sigma$ haben, so erhebt sich sofort die Frage, ob sich jeder Knickform wieder ein parallelbezogenes Gitter zuordnen läßt. Dies ist nämlich für ein beliebiges Viereckspolyeder im allgemeinen nicht möglich, wie die Betrachtung einer Kappe aus neun aneinanderstoßenden Vierecken lehrt. Im Falle durchwegs achsensymmetrischer Ecken allerdings doch: Jeder solchen Ecke entspricht ein windschiefes Parallelogramm, das bis auf Parallelverschiebungen und Maßstab-

²⁵ Formel (15) ergibt sich durch Anwendung einer der sogenannten Napierischen Formeln der sphärischen Trigonometrie auf eines der Dreikante, in welche das Vierkant durch eine Diagonalebene zerlegt wird.

änderungen bestimmt ist; unter gegenseitiger Abstimmung der Seiten lassen sich die Isogramme lückenlos aneinanderreihen und bilden dann — wegen der Ebeneit der Polyederflächen — ein *Parallelogrammgitter mit ebenen Knoten*. Da die ursprünglichen Maschenwinkel α, β unverändert geblieben sind, so liegt eine *winkelreine Gittertransformation* vor. Die *Schränkungswinkel* ändern sich hierbei, und zwar ergeben sich ihre neuen Werte $\sigma', -\sigma'$ zufolge (16) aus

$$(17) \quad \operatorname{tg} \frac{\sigma'}{2} = \lambda \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\sigma''}{2} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}.$$

Wegen der Verschiedenheit der Beträge handelt es sich jetzt um kein Rautengitter mehr, sondern um eines der Sauerschen Parallelogrammgitter, die aus Stäben von zweierlei Längen s', s'' aufgebaut sind.¹⁰ Diese Verallgemeinerung des Rautengitters drängt sich hier zwangsmäßig auf.

Die Freiheit des Maßstabsfaktors ausnutzend, können die Stablängen noch so normiert werden, daß die ursprüngliche Schrängung erhalten bleibt. Mit

$$\frac{\sin \sigma'}{s'} = \frac{\sin \sigma''}{s''} = \frac{\sin \sigma}{s}$$

ergibt sich dann

$$(18) \quad \begin{aligned} s' &= \frac{\lambda s}{l'} & l' &= \cos^2 \frac{\sigma}{2} + \lambda^2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ s'' &= \frac{s}{\lambda l'} & l' &= \cos^2 \frac{\sigma}{2} + \lambda^{-2} \sin^2 \frac{\sigma}{2}. \end{aligned}$$

Satz 11: *Jede flächenstarre Verknickung eines einem Rautengitter mit ebenen Knoten durch parallele Kanten zugeordneten Viereckspolyeders (Kräfteplans) induziert eine winkel- und schrängungstreue Gittertransformation, die ein ebeneckiges Parallelogrammgitter mit zweierlei Stablängen liefert.*

Durch infinitesimale Verfeinerung ($s \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$) gelangt man zu einer *Transformation der pseudosphärischen Flächen* mit folgenden Eigenschaften: Jeder Fläche konstanter negativer Krümmung lassen sich ∞^1 Flächen derselben Krümmung zuordnen, wobei neben den Windungen der Schnieglinien auch deren

Schnittwinkel erhalten bleiben. Die Bogenlängen und Krümmungsradien multiplizieren sich in der 1. Schar mit einem konstanten Faktor λ , in der 2. Schar mit $1/\lambda$.²⁶ Es handelt sich hierbei um die seit langem bekannte *Liesche Transformation*.²⁷ — Der Verknickbarkeit der Viereckspolyeder entspricht die *Verbiegbarkeit der Voss'schen Flächen unter Erhaltung eines konjugierten Netzes geodätischer Linien*.^{6,7,18}

Ein verknickbares Modell des zur „Fischreuse“ gehörigen *Wendelflächenpolyeders* nach Abb. 5 ist seinerzeit im Wienerischen Modellverlag erschienen.⁵ Die zu seinem Knickformen gehörigen Parallelogrammnetze präsentieren gewisse *Schraubflächen konstanter Krümmung*.

IX. Windschiefs Parallelepiped. Bäcklund-Transformation

G. T. Bennett, dem Entdecker des „windschiefen Gelenkparallelogramms“, verdankt man auch noch die Kenntnis eines interessanten zwölfgliedrigen Raumgetriebes von zwei Freiheitsgraden, das als „windschiefes Parallelepiped“ bezeichnet werden kann.¹¹ Man mag es am besten wieder aus *foldierten Lamellen gleicher Schrönkung zusammensetzen*: Benötigt werden drei Sorten zu je vier Stück, deren Längen a, b, c und Schräinkinkel α, β, γ der Bennett-Bedingung

$$(19) \quad a : b : c = |\sin \alpha| : |\sin \beta| : |\sin \gamma|$$

genügen müssen, sonst aber keiner Beschränkung unterliegen. Bildet man ein „Grundisogramm“ $P_1 P_2 P_3 P_4$ mit den Seiten a, b und bringt man in den Ecken vier Lamellen der Länge c gelenkig an (wobei die Richtung einer derselben beliebig gewählt werden kann), so lassen sich die Endpunkte durch ein zweites Isogramm $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ nach Art des Grundisogramms verbinden; in jedem Knoten dient dabei ein gemeinsames Zylindergelenk für alle drei Lamellen. Entsprechend der Veränderlichkeit des

²⁶ Hierzu ist einerseits von $l', l'' \rightarrow 1$ Gebrauch zu machen, andererseits von $s/\theta \rightarrow \rho$, wenn θ den Richtungsunterschied aufeinanderfolgender Stäbe bedeutet.

²⁷ S. Lie: Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. Arch. Math. Naturw. 5 (1881).

Grundisogramms und dem Richtungswechsel der Seitenstäbe liegt ein zweiparametrisch beweglicher Mechanismus vor.

Die entstehende Raumfigur erinnert infolge der drei Gruppen gleicher Stäbe und ihrer Anordnung an ein Parallelepiped (Abb. 7). An Stelle ebener Seitenflächen treten allerdings sechs windschiefe Parallelogramme auf. Je drei in einer Ecke zusammenstoßende Stäbe liegen in einer Ebene, so daß die *Tetraeder* $P_1 Q_8 P_3 Q_4$ und $Q_3 P_4 Q_1 P_2$ einander gegenseitig ein- und umgeschrieben sind und ein *Möbius-Paar* bilden. Sämtliche 12 Kanten des Parallelepipeds gehören demnach einem *Gewinde* (linearen Strahlkomplex) an.

Für den hier noch zu erbringenden *Existenzbeweis* der beschriebenen Raumfigur mag die letztgenannte Eigenschaft leitend sein: Die Kanten des Grundisogramms $P_1 P_2 P_3 P_4$ liegen in ∞^1 Gewinden, die von den reziproken Diagonalen $P_1 P_3, P_2 P_4$ aufgespannte *Büschen* erfüllen. Wir greifen eines der Gewinde \mathfrak{G} heraus; seine Achse o muß die Symmetrieachse des Isogramms, die von dem Gemeinlot des Diagonalenpaares gebildet wird, unter rechtem Winkel treffen. Aus Symmetriegründen verteilen sich die Punktpaare $P_1 P_3$ und $P_2 P_4$ auf zwei *Drehzylinder* Ω_1 und Ω_2 mit der Achse o (vgl. Abb. 7).

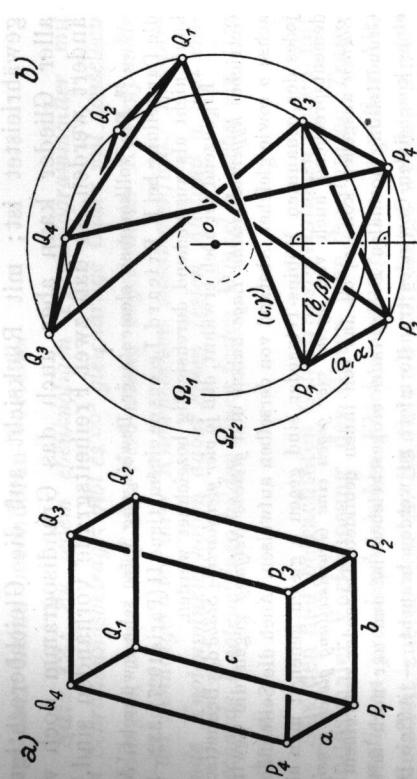


Abb. 7: Windschiefs ebenegiges Parallelepiped von Bennett.

a) Schematische Darstellung; b) Normalriss auf eine zur Gewindeachse normale Ebene.

Den in P_1 befestigten Stab $P_1 Q_1 = c$ drehen wir nun in der Knotenebene solange um P_1 , bis Q_1 auf Ω_2 zu liegen kommt (vier Möglichkeiten); er bleibt dabei auf jeden Fall in \mathfrak{G} . Jetzt führen wir eine Reihe von *gewindeerhaltenden Operationen* aus:

- 1) *Schraubung* $P_1 \rightarrow P_3$ um o ; Q_1 gelangt nach Q_3 ; $P_3 Q_3 \in \mathfrak{G}$.
- 2) *Spiegelung* $P_2 \rightarrow Q_1$ an einer Normale von o ; P_1 gelangt nach Q_2 ; $P_2 Q_2, Q_1 Q_2 \in \mathfrak{G}$.
- 3) *Spiegelung* $P_4 \rightarrow Q_3$ an einer Normale von o ; P_3 gelangt nach Q_4 ; $P_4 Q_4, Q_3 Q_4 \in \mathfrak{G}$.

An Hand vom Abb. 7 sieht man sofort ein, daß auch die Strecken $Q_2 Q_3$ und $Q_4 Q_1$ durch achsiale Spiegelungen an Normalen von o aus $P_3 P_2$ und $P_1 P_4$ hervorgehen, sodaß folgende Streckengleichheiten bestehen: $P_1 P_2 = P_3 P_4 = Q_1 Q_2 = Q_3 Q_4 = a$, $P_2 P_3 = P_4 P_1 = Q_2 Q_3 = Q_4 Q_1 = b$, $P_i Q_i = c$. Da ferner alle genannten Strecken von *Gewindestrahlen* getragen werden, so liegen jeweils drei von einer Ecke ausgehende Stäbe im einer Ebene (der Nullebene der Ecke) und alle sechs Isogramme müssen demnach *gleiche Schränkung* aufweisen. Lassen wir schließlich \mathfrak{G} das eingangs erwähnte Gewindebüschel durchlaufen, so ändert der Stab $P_1 Q_1$ kontinuierlich seine Richtung, womit die Beweglichkeit des Gebildes bei festgehaltenem Grundisogramm gewährleistet ist; mit Rücksicht auf die Gleichberechtigung aller Glieder kann aber auch das Grundisogramm noch verändert werden, so daß zwei Freiheitsgrade vorhanden sind.²⁸

²⁸ Ein vollkommen elementarer Beweisgang wäre sehr erwünscht. Auch die Darstellung bei R. Brizard, Legons de cinématique II (Paris 1927), 332—336, kann nicht als ausreichend durchsichtig bezeichnet werden.

Ergänzend sei noch erwähnt, daß je vier *gleichartige Stücke* des Bennettseien Getriebes *hyperboloidische Lage* haben und gleiche Neigung gegen die Gewindeachse o sowie gleichen Abstand von derselben aufweisen. Auch die Seitenflächen jedes der genannten Möbius-Tetraeder sind gegen o gleich geneigt; man hätte dementsprechend auch von *irgend vier gegen eine Grundstellung gleich geneigten Ebenen* ausgehen können, da das von ihnen gebildete Tetraeder stets einem zur Grundstellung normalen *Dreizylinder* eingeschrieben ist und nur noch mittels eines koaxialen Gewindes transformiert zu werden braucht. — Affine Dilatation des Bennettseien Mechanismus in der Richtung o liefert nach allem wieder ein gleichartiges Getriebe; insbesondere ist auch das in Abb. 7 als Projektion auftretende ebene *Zwölfstabgetriebe*, das sechs Antiparallelogramme enthält, zweiparametrisch deformierbar.

Gehen wir nunmehr von einem *ebenknötiigen Rautengitter* $\{P_{ik}\}$ aus, das wir uns gemäß Abschn. VI aus um $\pm \sigma$ geschränkten Lamellen der Länge s zusammengestellt denken. Wir bringen ferner in jedem Knoten eine weitere Lamelle gleicher Schränkung gelenkig an, deren feste Länge a und fester Schränkinkel α also der Bedingung

$$(20) \quad a : |\sin \alpha| = s : |\sin \sigma|$$

genügen. Nach allem lassen sich dann sämtliche Lamellenenden durch ein *gleichartiges Rautengitter* $\{Q_{ik}\}$ verbinden, wobei entsprechende Maschen mit den vier Verbindungsgliedern ein „windisches Parallelepiped“ bilden. Da die Stablänge a ($\leq s : |\sin \sigma|$) beliebig gewählt und die Richtung etwa des Stabes $P_{00} Q_{00}$ innerhalb der Knotenebene von P_{00} willkürlich vorgeschrieben werden kann, so haben wir damit die Möglichkeit, aus jedem vorgelegten Rautengitter ∞^2 weitere abzuleiten. Wird das Ur-gitter $\{P_{ik}\}$ festgehalten, ebenso die Länge a der Verbindungsstäbe, so gestatten dieselben noch Drehungen um die Knotenpunkte P_{ik} , wobei zufolge einer Bemerkung in Abschn. VII die Endpunkte Q_{ik} projektive Punktreihen auf ihren Kreisbahnen durchlaufen und das Gitter $\{Q_{ik}\}$ sich ständig ändert. — Die Verallgemeinerung auf *Parallelogrammverter* liegt auf der Hand, bietet aber keine besonderen Vorteile.

Satz 12: Zu jedem *ebenknötiigen Parallelogrammverter mit dem Schränkungsbeitrag γ* gibt es ∞^2 *gleichartige Gitter mit denselben Stablängen*, derart, daß die Verbindung *zu geordneter Knotenpunkte mit der Schnittgeraden ihrer Knotenebenen zusammenfällt*. Entsprechende Knotenpunkte haben dabei einen festen Abstand a und entsprechende Knotenebenen bilden einen festen Winkel α , wobei $\sin \alpha = \pm \gamma a$.

Aus den hier betrachteten *Gittertransformationen* gehen mit infinitesimaler Verfeinerung der Gitter jene berühmten *Transformationen pseudosphärischer Flächen* hervor, die in voller Allgemeinheit zuerst von A. Bäcklund aufgezeigt worden sind.²⁹ Ihre Eigenschaften sind unmittelbar zu erkennen: Einer gegebenen

²⁹ A. Bäcklund: Om ytor med konstant negativ kröning. Lunds Univ. Arsskr. 19 (1883).

benen Fläche mit der konstanten Krümmung $K = -\tau^2$ lassen sich ∞^2 Flächen gleichen Krümmungsmaßes derart zuordnen, daß die Verbindunggeraden entsprechender Punkte in den zugehörigen Tangentialebenen liegen; die Punkte haben dabei einen festen Abstand a und die Tangentialebenen bilden einen festen Winkel $\alpha = \pm \arcsin \tau a$. Bei jedem Bäcklund-Paar entsprechen einander die *Schnieglinien*, und zwar mit Gleichheit der Bogenlängen und auf die am Schluß von Abschn. VII gekennzeichnete Weise. Ebenso herrscht Zuordnung zwischen den *Krümmungslinien*, die ja aus den Diagonalzügen der Rautegitter hervorgehen. Die ∞^2 Verbindungsgeraden zusammengehöriger Punkte erfüllen eine sogenannte „*pseudosphärische Strahlkongruenz*“, die durch konstanten Brennpunktsabstand und konstanten Brennebenenwinkel charakterisiert ist und das Flächenpaar als Brenngebilde besitzt. Die zu einem bestimmten Abstand a gehörigen ∞^1 Bäcklund-Transformierten einer Fläche schneiden die ∞^2 Kreise mit dem Radius a , die sich in den Tangentialebenen der Urfläche um die Berührungs punkte beschreiben lassen, unter dem festen Winkel α und erzeugen auf denselben projektive Punktreihen. Besonders hervorzuheben wäre der Spezialfall $\alpha = \pi/2$, $a = 1/\tau$: Diese ausgezeichnete Bäcklund-Transformation, für gewöhnlich „*Komplementär-Transformation*“ genannt, war bereits früher von A. Ribaucour und L. Bianchi entdeckt worden, von ersterem im Zusammenhang mit dem erwähnten Kreissystem.³⁰

Abschließend soll noch kurz auf das bemerkenswerte *Vertauschungsgesetz* der Bäcklund-Transformationen eingegangen werden, das nach L. Bianchi¹³ besagt: Wird auf eine pseudosphärische Fläche Φ eine Bäcklund-sche Transformation \mathfrak{B}_a angewendet und auf das Ergebnis eine zweite solche Transformation \mathfrak{B}_b , so läßt sich dasselbe Endergebnis durch zwei gleichartige, jedoch in umgekehrter Reihenfolge ausgeführte Transformationen \mathfrak{B}_b und \mathfrak{B}_a erreichen. (Die Indizes deuten hierbei die Abstände an.) — Dieselbe Vertauschbarkeit gilt bereits für die analogen Glittertransformationen, die mit den

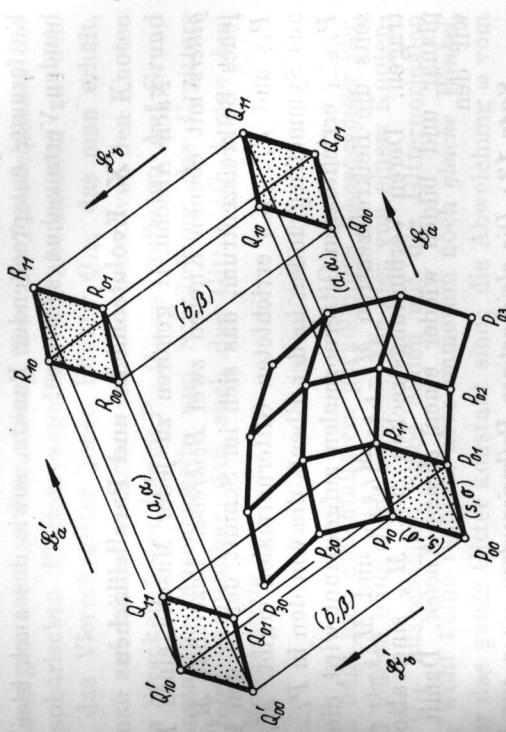


Abb. 8: Schema zum Bianchischen Vertauschungstheorem der Bäcklund-Transformationen.

gleichen Symbolen bezeichnet werden mögen. Das Urgitter $\{P_{ik}\}$ sei durch eine erste Transformation \mathfrak{B}_a in das Gitter $\{Q_{ik}\}$, und dieses vermöge \mathfrak{B}_b in $\{R_{ik}\}$ übergegangen; ergänzen wir das Lamellenpaar $P_{00} Q_{00} P_{00}' Q_{00}'$ zu einem Isogramm, dessen fehlende Ecke Q_{00} genannt wird, dann bestimmen die Stäbe $P_{00} Q_{00}$ und $Q_{00}' R_{00}$ zwei Transformationen \mathfrak{B}_b' und \mathfrak{B}_a' , die von $\{P_{ik}\}$ über ein Gitter $\{Q'_{ik}\}$ zum selben Endgitter $\{R_{ik}\}$ führen. Die Übereinstimmung des Endergebnisses wird, bei P_{00} beginnend und ständig zu Nachbarknoten fortschreitend, immer wieder durch die Existenz windschiefer Parallelipipede gewährleistet (vgl. Abb. 8). Damit erscheint das Theorem von Bianchi auf eine vollkommen elementare Grundlage gestellt.

Hingewiesen sei schließlich noch auf die als *Kugelbild* eines windschiefen Parallelipipeds auftretende und durchaus nicht triviale sphärische Figur aus 8 Punkten und 12 verbindenden, zu vierer kongruenten Großkreisbögen. Diese Figur bildet die Grundlage der den Bäcklund-Transformationen entsprechenden Transformationen sphärischer Tschebyscheff-Netze mit konstanter

³⁰ G. Darboux: *Legons sur la théorie générale des surfaces*, Bd. 3 (Paris 1894), 420 ff.

Entfernung entsprechender Punkte, sowie des auch hier bestehenden Vertauschungsgesetzes.

X. Evolutenfläche und Parallelflächen

Nach Abschn. II gehören zu jeder Masche eines *Rautengitters* mit ebenen Knoten zwei *Beikreise*. Bezeichne M_{ik} etwa jenes Beikreiszentrum, das sich im Schnitt der in den Knoten P_{ik} und $P_{i-1,k-1}$ errichteten Gitternormalen ergibt. M_{ik} liegt aus Symmetriegründen in der Ebene, die von den in $P_{i-1,k}$ und $P_{i,k-1}$ errichtbaren Gitternormalen aufgespannt wird, die ihrerseits die Beikreiszentren $M_{i-1,k}$, $M_{i,k+1}$ und $M_{i-1,k-1}$, $M_{i+1,k}$ tragen. Deren Verbindungstrecken mit M_{ik} sind also komplanar und bilden wieder einen ebenen Knoten. Damit haben wir den

Satz 13: Die gleichartigen Beikreiszentren eines geradlinigen Rhombengitters mit ebenen Knoten bilden ein Vierecksjitter mit ebenen Knoten, wenn man die von aneinandergrenzenden Maschen herrührenden Zentren durch Strecken verbindet.

Aus dieser elementaren Feststellung fließt durch den üblichen Grenzübergang, der das Rautengitter $\{P_{ik}\}$ in das Schmieglinienetz einer pseudosphärischen Fläche Φ verwandelt und dabei das Gitter $\{M_{ik}\}$ in das Schmiegliniennetz der *Zentrale oder Evolutenfläche* von Φ überführt, der Satz, daß den Schmieglinien eine Fläche konstanter Krümmung auf der Evolutenfläche wiederum deren Schmieglinien entsprechen. Nach L. Bianchi (a. a. O. 243) ist diese Zuordnungseigenschaft sogar zur Kennzeichnung der Flächen fester Krümmung geeignet.

Auch sonstige Eigenschaften der Normalenkongruenz einer Fläche treten bereits beim Normalensystem des Gitters zutage. Verfolgung der Diagonalenfüge führt beispielsweise auf die Krümmungslinien mit ihren abwickelbaren, einander orthogonal durchsetzenden Normalenflächen, deren Gratlinien Geodätische auf den Mänteln der Evolutenfläche darstellen, usw. Da es sich hierbei jedoch um keine für Flächen konstanter Krümmung spezifischen Erscheinungen handelt, sollen diese Dinge nicht näher erörtert werden.

Hingegen sei eine Bemerkung über die *Parallelflächen* der pseudosphärischen Flächen angefügt. Wir betrachten zu dem Zweck das Vierecksjitter jener Punkte Q_{ik} , das man erhält, wenn man auf den (orientierten) Gitternormalen von den Knoten P_{ik} aus Strecken fester Länge $P_{ik} Q_{ik} = l$ aufrägt. Auf Grund der konstanten Maschenweite und Schränkung des Urgitters $\{P_{ik}\}$ folgt unmittelbar, daß auch das Gitter $\{Q_{ik}\}$ eine *konstante Maschenweite*

$$(21) \quad s' = \sqrt{s^2 + (2l \sin \sigma/2)^2}$$

hat. Es liegt also gleichfalls ein geradliniges *Rhombeengitter* vor, diesmal jedoch ohne ebene Knoten. Die vier von einem Knotenpunkt Q_{ik} ausgehenden Stäbe bilden mit der Gitternormalen $P_{ik} Q_{ik}$ wohl keine rechten, aber immerhin noch *gleiche Winkel*, die über das ganze Gitter konstant sind; die Abweichung ω vom rechten Winkel ergibt sich aus

$$(22) \quad \sin \omega = \frac{2l}{s'} \sin^2 \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \omega}$$

Da also je vier in einem Punkt zusammenlaufende Gitterstäbe auf einem *Drehkegel* liegen, so könnte man füglich von „*konischen Knoten*“ (mit konstanter Öffnung) sprechen.

Satz 14: Trägt man auf den Normalen eines geradlinigen Rhombengitters mit ebenen Knoten Strecken gleicher Länge im gleichen Sinn auf, so gelangt man zu einem geradlinigen Rhombengitter mit konischen Knoten konstanter Öffnung.

Hieraus läßt sich durch Grenzübergang die Bemerkung von A. Voss gewinnen, derzufolge dem *rhombischen Schmiegliniennetz einer pseudosphärischen Fläche auf den Parallelflächen wieder rhombische Netze entsprechen*.²

Diese *Tschebyscheff-Netze* auf den Parallelflächen bestehen nicht mehr aus Schmieglinien, jedoch aus einer naheliegenden Verallgemeinerung derselben, nämlich aus *Flächenkurven konstanter Normalkrümmung*, was anscheinend noch nicht bemerkt worden ist. Fassen wir zum Beweise die durch einen Knoten Q_{ik} und seine vier Nachbarn bestimmte *Kugel* Σ ins Auge, deren Mittelpunkt offenbar auf der Q_{ik} tragenden Gitternormale liegt,

so erkennen wir auf Grund von Satz 14 sofort, daß sie einen über das ganze Gitter konstanten Radius hat, dessen Wert sich mittels (21) und (22) durch

$$(23) \quad r' = \frac{s'}{2 \sin \omega} = l + 4 l \sin^2 \sigma/2$$

ausdrückt. Nach Ausführung des Grenzüberganges $s \rightarrow 0$ ($\sigma/s \rightarrow \tau$) wird aus Σ die gemeinsame *Meusnier-Kugel* der durch den Flächenpunkt gehenden Netzkurven; ihr Radius

$$(24) \quad r_n = l + \frac{1}{l \tau^2}$$

ist für die Netzkurven unveränderlich, ebenso daher deren Normalkrümmung $\kappa_n = 1/r_n$.

Übrigens läßt sich auch über die *geodätische Krümmung* der Netzkurven eine einfache Aussage machen. Wir betrachten drei Nachbarknoten des Ausgangsgitters, etwa P_{00}, P_{01}, P_{02} , samt den zugehörigen Knoten Q_{00}, Q_{01}, Q_{02} des abgeleiteten Gitters. Die Normalprojektion des Punktetripels Q auf die Knotenebene von P_{01} hängt mit dem Tripel P durch eine Drehstreckung um P_{01} zusammen, deren Drehwinkel $\lambda = \pm \arctg(l \sin \sigma/s)$ beträgt, während der Streckungsfaktor den Wert $\sec \lambda$ hat. Hieraus folgt: *Die Schnieglinien einer Fläche konstanter negativer Krümmung $K = -\tau^2$ und die entsprechenden Kurven auf einer Parallelfläche im Abstande l haben in entsprechenden Punkten Tangenten, die den festen Winkel $\lambda = \pm \arctg l \tau$ bilden, und geodätische Krümmungen, die im festen Verhältnis $\kappa : \kappa_g = 1 : \cos \lambda$ stehen.*

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß sich auch die abgeleiteten Rautengitter $\{Q_{ik}\}$ durch *bewegliche Gelenksysteme* realisieren lassen. Man denke sich zunächst ein Lamellenmodell für das Ausgangsgitter $\{P_{ik}\}$ nach Abschn. VI hergestellt, die mit den Gitternormalen zusammenfallenden Gelenkachsen als Stäbe von der Länge l ausgeführt und ihre Enden durch passend tordierte und geknickte Lamellen verbunden. Dieses zweite Lamellensystem, das dem ersten vom kinematischen Standpunkt aus vollständig äquivalent ist, kann natürlich auch für sich allein bestehen und stellt in jedem Zustand das

differenzengeometrische Modell der zum Abstand l gehörigen Parallelfläche einer pseudosphärischen Fläche samt dem ausgezeichneten System ihrer Kurven konstanter Normalkrümmung dar. Auch diese Gebilde lassen sich zu Bäcklund-Paaren verbinden, was nur die sinngemäße Übertragung der Entwicklungen des vorigen Abschnittes erfordern würde.

Damit soll der vorliegende Bericht über ein mannigfach verzweigtes Sachgebiet vorläufig sein Ende finden. Es erscheint durchaus lohnend und nützlich, den beschrittenen Weg unter konsequenter Anwendung der differenzengeometrischen Methode nach verschiedenen Richtungen hin weiterzuverfolgen.