Über die L-Torsen der Flächen 2. Klasse

Von Walter Wunderlich in Wien

1. In gewissem Sinne dual zu den im Rahmen der konformen Geometrie des dreidimensionalen Raumes (also der Möbiusschen Kugelgeometrie) betrachteten und nach G. Darboux benannten „*D-Kurven*" einer Fläche — jenen Kurven, deren Schmiegkugeln die Fläche berühren[1]) — sind vom Standpunkt der Laguerreschen Kugelgeometrie jene einer Fläche umschriebenen *Torsen* von Interesse, deren Schmiegkugeln die Ausgangsfläche berühren. Unter den *Schmiegkugeln* einer Torse Λ sind dabei solche Kugeln zu verstehen, die vier zusammengerückte Tangentialebenen von Λ berühren; ihre Mittelpunkte erfüllen offenbar die Gratlinie der durch die Normalebenen von Λ eingehüllten abwickelbaren Fläche, welche bekanntlich die rektifizierende Torse für die Gratlinie von Λ darstellt. Auf die genannten, einer doppelt gekrümmten Fläche umschriebenen und Laguerre-invariant mit ihr verbundenen „*L-Torsen*" hat W. Blaschke hingewiesen[2]).

Für die *Flächen 2. Ordnung* sind die *D-Linien*, wenigstens prinzipiell, bereits a. a. O.[1]) von Darboux selbst bestimmt worden; ihre Darstellung führt im allgemeinen auf elliptische Integrale. In einer demnächst erscheinenden Arbeit habe ich eine sehr einfache und vorwiegend rein geometrische Behandlungsweise dieser Kurven dargelegt und dieselben als *affine Böschungslinien* (mit zur Grundfläche konzyklischen Tangentenrichtkegeln) gekennzeichnet[3]). Die — im Euklidischen keineswegs rein duale — Ermittlung der *L-Torsen* für die *Flächen 2. Klasse* ist meines Wissens noch ausständig und soll jetzt hier nachgetragen werden.

2. Diesbezüglich gilt der

Satz 1: *Die Gratlinien der ∞^2 einer Fläche 2. Klasse umschriebenen L-Torsen sind geodätische Linien auf den konfokalen Flächen.*

Als Grenzformen treten noch die der Fläche umschriebenen *Drehkegel* hinzu, deren Spitzen bekanntlich die Fokalkegelschnitte der Fläche erfüllen.

---

1) G. Darboux, Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. C. R. **73** (1871), 732—736. — Bezüglich weiterer Literatur siehe Enz. math. Wiss. III D **3**, Nr. 39.

2) W. Blaschke, Über die Geometrie von Laguerre III; Beiträge zur Flächentheorie. Abh. Math. Sem. Hamburg **4** (1926), 1—12.

3) W. Wunderlich, Euklidische und nichteuklidische D-Linien auf Quadriken. Ann. di mat. Vgl. auch: Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken. Math. Tidsskr. 1951, 9—26.

Beim Beweis von Satz 1 wollen wir uns zunächst auf den „allgemeinen Fall" beschränken. Seien also Φ und Ψ zwei reguläre *konfokale Quadriken* und Λ eine aus gemeinsamen Tangenten t gebildete Torse, die Φ längs einer Kurve k berührt und sich mit ihrer Gratlinie l auf Ψ stützt. Die Berührungspunkte der laufenden Erzeugenden t mit Φ und Ψ seien S und T genannt, die zugehörigen Tangentialebenen σ und τ. Diese bilden bekanntlich einen rechten Winkel[4]), und da σ auch die Schmiegebene von l abgibt, so ist l eine *geodätische Linie* von Ψ (Chasles).

Die Schmiegkugelmitten S^* der Torse Λ erfüllen zufolge einer eingangs gemachten Bemerkung den Grat der rektifizierenden Torse $\overline{\Lambda}$ von l; $\overline{\Lambda}$ ist bei uns die Ψ längs l umschriebene Torse, welche auch als das Polargebilde der Kurve l bezüglich der Quadrik Ψ angesehen werden kann. Der Gratpunkt S^* von $\overline{\Lambda}$ ist mithin der Pol der Schmiegebene σ von l bezüglich Ψ. Nun erfüllen die Pole einer festen Ebene bezüglich aller Flächen einer konfokalen Schar bekanntlich eine *Gerade*, die wegen des in der Schar enthaltenen absoluten Kegelschnittes zu der Ebene *normal* ist. Das bedingt in unserem Fall, angewandt auf die Ebene σ, daß deren Polgerade SS^* die *Flächennormale* von Φ in S ist, womit nachgewiesen ist, daß Φ von den Schmiegkugeln der Torse Λ berührt wird, letztere also tatsächlich eine *L-Torse* von Φ ist.

Daß sich auf diese Weise sämtliche L-Torsen der Grundfläche Φ ergeben, wenn die „Stützfläche" Ψ innerhalb der Schar variiert, liegt auf der Hand. Die Gesamtheit der L-Torsen gliedert sich danach in ∞^1 einfach ausgedehnte, den einzelnen Stützflächen zugeordnete Systeme von je ∞^1 Exemplaren. Die Berührungskurven k der Torsen eines solchen Systems bilden auf der Grundfläche Φ zusammen mit den durch Ψ als Leitfläche definierten Geodätischen $\overline{k}$ ein *konjugiertes Netz* innerhalb des von der Krümmungslinie $q = \Phi\Psi$ berandeten Gebietes.

3. Bedenken wir, daß sich der Übergang $S \to \sigma \to S^*$ aus den Polaritäten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ an Φ und Ψ zusammensetzt, so erkennen wir, daß der direkte Übergang $S \to S^*$ durch eine *Affinität* $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}$ bewerkstelligt wird, welche die Hauptebenen fest läßt.

Werden die beiden Quadriken in kartesischen Normalkoordinaten x_1, x_2, x_3 durch die Gleichungen

$$\Phi \ldots \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \text{ und } \Psi \ldots \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1 \; (a_i \neq 0) \qquad (1)$$

beschrieben, so stellt sich die genannte Affinität dar durch

$$\mathfrak{A} \ldots x_i^* = \left(1 - \frac{\lambda}{a_i}\right) x_i \quad (i = 1, 2, 3)\,. \qquad (2)$$

[4]) Die aus t an die Flächen der Φ und Ψ enthaltenden konfokalen Schar legbaren Tangentialebenen bilden die Paare einer quadratischen Involution mit den Doppelebenen σ und τ; dem der Schar angehörenden absoluten Kegelschnitt entsprechend enthält die Involution ein Paar von Minimalebenen, ist also symmetrisch ($\sigma \perp \tau$).

Auf Grund dieses Zusammenhanges gilt zunächst — übrigens auch für Flächen ohne Mittelpunkt — der

Satz 2: *Für jede einer regulären Quadrik umschriebene L-Torse ist der Ort der Schmiegkugelmitten affin zur Berührungskurve.*

Diese zur Berührungskurve k affine Kurve k^* verläuft daher auf der zu Φ affinen (und bezüglich Ψ polaren) Quadrik

$$\Phi^* \ldots \sum_1^3 \frac{a_i}{(a_i - \lambda)^2} x_i^{*2} = 1 . \tag{3}$$

Die Tangenten von k^* erfüllen nach Nr. 2 die rektifizierende Torse $\bar{\Lambda}$ der Geodätischen l von Ψ, sind also die zu den Erzeugenden t der L-Torse Λ konjugierten Tangenten $\bar{t}$ von Ψ.

4. An jenen Stellen $S = T$, wo die Geodätische l von Ψ berührend an die *Krümmungslinie* $q = \Phi\Psi$ herangeht, sind folgende Besonderheiten zu vermerken:

a) $\bar{t}$ ist normal zu t und daher *Flächennormale* der Grundquadrik Φ.

b) $\bar{t}$ ist *Spitzentangente* von k^*; die L-Torse weist eine *stationäre Schmiegkugel* auf.

c) Die Schmiegkugelmitte S^* fällt mit einem *Hauptkrümmungszentrum* der Quadrik Φ zusammen.

Aus a) und c) folgt, daß die längs der Krümmungslinie q errichtete Normalenfläche nicht nur die *Zentrafläche* von Φ, sondern auch die Quadrik Φ^* längs der zu q affinen Quartik q^* berührt. Beachten wir, daß Φ^* mit der Polarfläche von Φ bezüglich Ψ identisch ist, so finden wir nebenbei den

Satz von Waelsch: *Die Zentrafläche einer Quadrik wird von ihren Polarreziproken bezüglich der zu ihr konfokalen Flächen eingehüllt*[5]).

Es verdient erwähnt zu werden, daß dasselbe Flächensystem Φ^* (3) auch die Ortslinien der Schmiegkugelmitten für die *D-Kurven* von Φ trägt, und daß der Zusammenhang zwischen den Punkten und Schmiegkugelzentren einer solchen D-Kurve gleichfalls durch die Affinität $\mathfrak{A}$ (2) vermittelt wird[2]).

5. Wenden wir uns nunmehr der Annahme zu, daß die Grundfläche 2. Klasse in einen *Kegelschnitt* ausartet, wobei wir die Betrachtungen auf den Fall einer Mittelpunktskurve

$$k \ldots \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} = 1, \; x_3 = 0 \tag{4}$$

beschränken wollen. Sei Ψ eine nichtsinguläre Quadrik, die k als *Fokalkurve* besitzt — also durch die 2. Gleichung (1) mit $a_3 = 0$ dargestellt werden kann — und l eine der „*Nabelgeodätischen*" von Ψ, deren Tangenten k treffen. Die aus diesen Tangenten gebildete abwickelbare Fläche Λ ist jetzt eine der *L-Torsen* von k und ihre Polarkurve

[5]) E. Waelsch, Über das Normalensystem und die Centrafläche der Flächen 2. Ordnung, II. Mitt.; Sitzungsb. Ak. Wiss. Wien **97** (1888), 1—8.

bezüglich Ψ stellt wieder die Ortslinie k^* der Schmiegkugelmitten dar. Die Kurve k^* verläuft auf dem zu k bezüglich Ψ polaren *Zylinder* 2. *Grades* Φ^*, der für $a_3 = 0$ durch (3) beschrieben wird, und besitzt Ψ als Tangentenleitfläche, wodurch sie genügend gekennzeichnet erscheint; die im regulären Fall bestehende Affinität $\mathfrak{A}$ jedoch, die k^* und k koppelte, ist hier ausgeartet. — Als Hüllgebilde der ∞^1 Zylinderflächen Φ^* ergibt sich der über der Evolute des Grundkegelschnittes k errichtete x_3-parallele Zylinder.

Betrachten wir zwei zusammengehörige Tangenten t von l und $\bar{t}$ von k^*, die, wie wir wissen, konjugierte Tangenten der Quadrik Ψ sind, und projizieren wir dieselben normal auf die Ebene $x_3 = 0$, so erhalten wir zwei bezüglich des Umrißkegelschnittes

$$u \ldots \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} = 1 \tag{5}$$

konjugierte Bildgeraden t' und $\bar{t}'$. Fassen wir u als absoluten Kegelschnitt einer *nichteuklidischen Metrik* CAYLEY-KLEINschen Musters in der Bildebene auf, dann können wir t' und $\bar{t}'$ als *normal* im Sinne dieser Maßbestimmung bezeichnen. Da $\bar{t}'$ überdies Tangente des Basiskegelschnittes

$$b \ldots \frac{a_1 x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{a_2 x_2^2}{a_2 - \lambda} = 1 \tag{6}$$

von Φ^* ist, so kann die Projektion l' der Nabelgeodätischen l als *nichteuklidische Evolvente des Kegelschnitts b* gekennzeichnet werden. — Es handelt sich hierbei um eine projektive Verallgemeinerung der in einer früheren Arbeit entwickelten Behandlung der Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung[6]), angewandt auf die *Nabelgeodätischen* einer Quadrik, die ja als „*projektive Böschungslinien*" angesehen werden können, da ihre Tangenten einen eigentlichen (Fokal-) Kegelschnitt treffen. Auf diese Weise eröffnet sich auch für die L-Torsen eines Kegelschnitts eine mit darstellend-geometrischen Hilfsmitteln leicht durchführbare *konstruktive Behandlung*.

6. Besonders einfache Verhältnisse liegen bei den L-Torsen des *Kreises* vor, denen noch aus anderen Gründen ein gewisses Interesse zukommt. Setzen wir in (4) $a_1 = a_2 = 1$, dann erhalten wir die Gratlinien dieser L-Torsen als *Nabelgeodätische* auf den einschaligen *Drehhyperboloiden*

$$\Psi \ldots \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 - \lambda} - \frac{x_3^2}{\lambda} = 1 \quad (0 < \lambda < 1). \tag{7}$$

Durch die (involutorische) *Zentralkollineation*

$$X_1 = \frac{x_1}{x_3}, \; X_2 = \frac{x_2}{x_3}, \; X_3 = \frac{1}{x_3} \tag{8}$$

---

[6]) W. WUNDERLICH, Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzungsb. Ak. Wiss. Wien **155** (1947), 309—331.

Vgl. auch F. FABRICIUS-BJERRE, Über projektive Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Danske Vid. Selsk., Mat. fys. Medd. **25** (1950), 3—21.

werden sie in die unter $\pi/4$ ansteigenden *echten Böschungslinien* der Hyperboloide

$$\Psi_0 \ldots \frac{X_1^2 + X_2^2}{1-\lambda} - X_3^2 = \frac{1}{\lambda} \tag{9}$$

verwandelt. Diese Kurven sind hinlänglich bekannt und lassen sich auf Grund der folgenden Bemerkung bequem ansetzen: Eine Ebene, die mit konstanter Geschwindigkeit um eine Achse rotiert und gleichzeitig in Richtung dieser Achse eine harmonische Schwingung mit beliebiger Frequenz vollführt, hüllt die Tangentenfläche einer Böschungslinie ein, die auf einer Drehquadrik verläuft. In sinngemäßer Abwandlung dieser Tatsache erhalten wir die hier interessierenden Böschungslinien als Gratgebilde der Ebenenschar

$$X_1 \sin\varphi - X_2 \cos\varphi + X_3 = e \operatorname{sh} p\varphi\,. \tag{10}$$

Zweimalige Ableitung nach φ liefert zwei weitere Gleichungen, denen die Gratpunkte genügen müssen. Ausrechnung der X_i führt dann auf die gewünschte Parameterdarstellung einer solchen Böschungslinie l_0:

$$\begin{aligned} X_1 &= ep(\operatorname{ch} p\varphi \cos\varphi - p \operatorname{sh} p\varphi \sin\varphi) \\ X_2 &= ep(\operatorname{ch} p\varphi \sin\varphi + p \operatorname{sh} p\varphi \cos\varphi) \\ X_3 &= e(1+p^2) \operatorname{sh} p\varphi\,. \end{aligned} \tag{11}$$

l_0 verläuft auf dem Drehhyperboloid

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{p^2} - \frac{X_3^2}{1+p^2} = e^2\,, \tag{12}$$

und dieses stimmt mit Ψ_0 (9) überein, wenn wir $e^2 = 1$ und $1 + p^2 = 1/\lambda$ setzen. Wir erkennen nebenbei, daß sich diese Böschungslinien im Normalriß auf die X_1X_2-Ebene als *Hyperzykloiden* abbilden[7]). Die Schichtenlinie $X_3 = 0$ der Tangentenfläche einer solchen Böschungslinie ist hingegen eine *Parazykloide*, die übrigen sind Parallelkurven derselben.

Kehren wir jetzt mittels der Kollineation (8) wieder zum ursprünglichen System zurück, und beachten wir, daß die aus den Punkten des Grundkreises an die konfokalen Hyperboloide legbaren Tangentialkegel kongruente Drehkegel sind, so können wir zusammenfassend aussprechen den

Satz 3: *Jede nichtkonische L-Torse des Kreises* $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_3 = 0$ *wird als Ebenenort durch*

$$x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi - x_3 \operatorname{sh} p\varphi + 1 = 0 \tag{13}$$

dargestellt. Ihre Gratlinie

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda p(\operatorname{ctgh} p\varphi \cos\varphi - p \sin\varphi) \\ x_2 &= \lambda p(\operatorname{ctgh} p\varphi \sin\varphi + p \cos\varphi) \\ x_3 &= \lambda/\operatorname{sh} p\varphi \quad mit\ \lambda = 1/(1+p^2) \end{aligned} \tag{14}$$

[7]) W. BLASCHKE, Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Mh. Math. Phys. **19** (1908), 188—204.

ist Nabelgeodätische eines Drehhyperboloides und erscheint bei Zentralprojektion aus dem Mittelpunkt auf eine Ebene $x_3 = const$ als Hyperzykloide. Die Schichtenlinien $x_3 = const$ der Torse durchsetzen ihre Erzeugenden unter dem festen Winkel $\alpha = \operatorname{arcctg} p$ und sind, abgesehen vom Grundkreis, Parallelkurven von Parazykloiden. Die Gratlinie ist mithin α-Evolutoide des Kreises.

Der Ort der Schmiegkugelmitten der L-Torse, beschrieben durch

$$x_1^* = -\lambda p^2 \sin\varphi,\quad x_2^* = \lambda p^2 \cos\varphi,\quad x_3^* = -\lambda \operatorname{sh} p\varphi\,, \tag{15}$$

liegt auf einem Drehzylinder und geht bei dessen Verebnung in eine hyperbolische Sinuslinie über.

Das Schmiegkugelzentrum (15) ergibt sich gemäß Nr. 2 als Pol der Ebene (13) bezüglich der Trägerfläche (7) der Geodätischen (14).

7. Aus den hier betrachteten L-Torsen einer Fläche 2. Klasse Φ lassen sich nun durch Ausübung irgendeiner LAGUERRE-*Transformation* die L-Torsen der entsprechenden Flächen 4. Klasse $\widehat{\Phi}$ gewinnen, die W. BLASCHKE „*Hyperzykliden*" genannt hat[8]). Hierzu gehören insbesondere die *Parallelflächen* von Φ, die sich durch Anwendung der *Dilatation* ergeben, also durch Parallelverschiebung der (orientierten) Ebenen des Raumes auf einen bestimmten (vorzeichenbegabten) Normalabstand; es ist klar, daß hierbei die Schmiegkugelzentren unverändert bleiben. Allgemeinere — ja abgesehen von gewissen Grenzformen überhaupt die allgemeinsten — Hyperzykliden kann man bereits bei Beschränkung auf die sogenannten „LAGUERRE*schen Spiegelungen*" erhalten, die konstruktiv am bequemsten zu handhaben sind.

Liegt eine zu einem *Kegelschnitt* k ausgeartete Quadrik vor, so ist die zugehörige Hyperzyklide insofern speziell, als sie, den Punkten von k entsprechend, ein System von ∞^1 eingeschriebenen Kugeln besitzt, also zu den *Kanalflächen* gehört.

Ist k speziell ein *Kreis*, so führen die ∞^1 ihn enthaltenden Kugeln zu einem zweiten System von Berührungskugeln seiner LAGUERRE-Transformierten, die damit als DUPIN*sche Zyklide* zu erkennen ist. Deren L-Torsen müssen sich mithin gemäß Satz 3 elementar darstellen lassen. Insbesondere gelangt man mit Hilfe der Dilatation zu den L-Torsen des *Torus*. Diese Dinge sollen hier jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Eingegangen am 28. 7. 1950

---

[8]) W. BLASCHKE, Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene. Mh. Math. Phys. **21** (1910), 3—60 (§ 13).