



mindestens dieselbe Genauigkeit wie Zirkel und Dreieck und spart überdies an Hilfslinien. So läßt sich beispielsweise die Bahn jedes weiteren Punktes  $C'$  durch einfaches Durchstechen gewinnen.

Das Fundament der ebenen Kinematik ist nun der Satz, daß irgend zwei Lagen eines starren Systems stets durch eine Drehung ineinander übergeführt werden können. Hierauf soll etwas näher eingegangen werden. Häufig wird so argumentiert (Abb. 3): Sind  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  zwei Lagen der das bewegte System repräsentierenden Strecke  $A'B'$ , ferner  $P$  der Schnittpunkt der Symmetralen von  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$ , dann folgt aus den Streckengleichheiten  $A_1B_1 = A_2B_2$ ,  $A_1P = A_2P$ ,  $B_1P = B_2P$  die Kongruenz der Dreiecke  $A_1B_1P$  und  $A_2B_2P$ , so daß diese durch Drehung um  $P$  zur Deckung gebracht werden können. Diese einleuchtende Schlussfolgerung weist jedoch eine gefährliche Lücke auf: Die Kongruenz der Dreiecke steht zweifellos fest, diese allein ist aber nicht hinreichend, sondern es ist noch die Gleichsinnigkeit notwendig. Dies zeigt sich deutlich im Sonderfall zusammenfallender Symmetralen, wenn der unbestimmte Schnittpunkt  $P$  willkürlich angenommen wird: Die beiden Dreiecke fallen dann gegenseitig kongruent aus und können nicht durch Drehung um  $P$  zur Deckung gebracht werden!<sup>1)</sup>

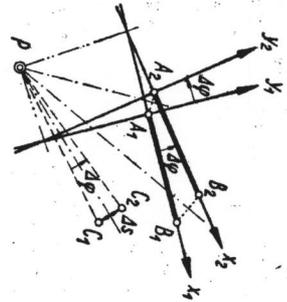


Abb. 3

— Ganz gefährlich bei der räumlichen Bewegung: Man kann die beiden Systemlagen durch zwei kongruente Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$  repräsentieren und im Schnitt der drei Symmetralebenen von  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  und  $C_1C_2$  einen Punkt  $P$  finden, der mit den Dreiecken zwei kongruente Pyramiden bestimmt, so daß man versucht ist, anzunehmen, daß dieselben durch Drehung um  $P$  zur Deckung gebracht werden können. Diese Folgerung wäre aber vollkommen falsch, da zwei Raumlagen eines starren Systems im allgemeinen nicht durch Drehung, sondern nur durch Schraubung zusammenhängen. Hier liegt somit ein interessanter Trugschluß vor, der offenbar auf der gegensinnigen Kongruenz der Pyramiden beruht.

Der Beweis der für die Ebene behaupteten Tatsache wird besser etwas anders aufgezogen, indem man das bewegte System durch ein rechtwinkliges und orientiertes Achsenkreuz  $x'y'$  repräsentiert. Sind zwei Systemlagen durch die gleichsinnigen Achsenkreuze  $x_1y_1$  und  $x_2y_2$  festgehalten (Abb. 3), so muß ein allenfalls vorhandenes Drehzentrum  $P$  sicher auf der äußeren Winkelsymmetrale der Achsen  $x_1, x_2$  liegen: Drehung um irgend einen Punkt dieser Symmetrale und um den Betrag  $\alpha$   $x_1x_2 = \Delta\varphi$  läßt  $x_1$  immer mit  $x_2$  zusammenfallen. Wird  $P$  nun gleichzeitig auf der Außenwinkelsymmetrale von  $y_1y_2$  gewählt, so bringt diese Drehung System  $\alpha$   $y_1y_2 = \Delta\varphi$  auch das zweite Achsenpaar und damit die beiden System-

<sup>1)</sup> Die Aufklärung des Sachverhaltes in diesem Sonderfall ist leicht zu erkennen: Wird  $P$  im Schnitt von  $A_1A_2$  und  $A_2B_2$  angenommen, dann arten die Dreiecke  $A_1B_1P$  und  $A_2B_2P$  zu Strecken aus, die in beiderlei Sinn kongruent sind und nun doch durch Drehung um  $P$  zur Deckung zu bringen sind.

lagen zur Deckung. — Da die benutzten Symmetralen einen rechten Winkel einschließen, so ist die Existenz eines Drehzentrums gesichert, falls die beiden Achsenkreuze nicht gerade gleichsinnig parallel liegen. In diesem Falle wird man zur Vereinfachung der Redeweise statt von einer „Schiebung“ von einer „Drehung um einen unendlich fernen Punkt“ sprechen, so daß der genannte Satz als allgemein gültig angesehen werden kann.

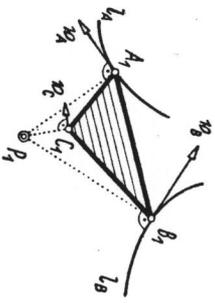


Abb. 4

Momentanzentrum und Geschwindigkeitsverteilung

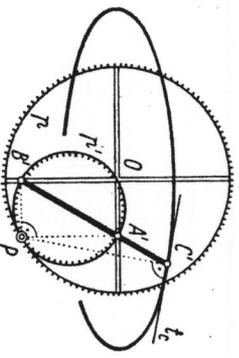


Abb. 5

Ellipsenzirkel

$A'$  und  $B'$  werden auf zwei rechtwinkligen Geraden geführt). Auch über die Bahngeschwindigkeit läßt sich eine Aussage machen, unmittelbar gestützt auf die grundlegende Definition als „Grenzwert des Quotienten aus Lagenänderung  $\Delta s$  durch Zeitspanne  $\Delta t$ “. Man erkennt aus der Betrachtung von Abb. 3, daß die Lagenänderungen der Systempunkte proportional zur Entfernung vom Drehzentrum sind, so daß ihre Geschwindigkeiten in jedem Augenblick proportional zur Entfernung vom jeweiligen Momentanzentrum ausfallen. Beispiel: Konstruktion der Kolbengeschwindigkeit  $v_B$  aus der gegebenen Kurbelwinkelgeschwindigkeit  $\omega_A$  (Abb. 1). Man zieht mit Vorteil die um einen rechten Winkel geschwenkten Geschwindigkeitsvektoren heran, deren Spitzen für je zwei Systempunkte auf einer Parallelen zur Verbindungsstrecke der Punkte liegen; diese Konstruktion bleibt auch bei unerreichtbarem Momentanzentrum ausführbar.

Nachdem nunmehr die Existenz eines Drehzentrums einwandfrei gesichert ist, ist auch gegen die Anwendung der ersten Konstruktion nichts mehr zu sagen. Allgemein muß die Symmetrale zwischen den beiden Lagen  $C_1$  und  $C_2$  irgendeines Systempunktes  $C'$  stets durch den Drehpol  $P$  gehen (Abb. 3).

Läßt man nun die Zeitspanne  $\Delta t$  zwischen den betrachteten Einzellagen 1 und 2 des bewegten Systems immer kleiner werden und gegen Null streben, so unterscheiden sich die Systemlagen immer weniger voneinander und das Drehzentrum  $P$  konvergiert gegen eine bestimmte Grenzlage  $P_1$ , das zu dem betreffenden Augenblick gehörige Momentanzentrum, auch „Momentanpol“ genannt. Aus den verwendeten Symmetralen werden nun die Bahnnormalen, die sich allesamt in  $P_1$  schneiden und von denen zwei zur Ermittlung von  $P_1$  genügen (Abb. 4). Man kann bei Kenntnis des Momentanzentrums also sämtliche Bahnnormalen und damit auch sämtliche Bahntangenten angeben. Beispiel: Ellipsenzirkel (Abb. 5. Zwei Punkte

Zusammenfassend mag sich also sagen: Hinsichtlich der Bahntangenten und der Bahngeschwindigkeiten herrschen bei einer beliebigen ebenen Bewegung in jedem Augenblick dieselben Verhältnisse wie bei einer gewöhnlichen Drehung. Man pflegt von einer „hinterstmalen Drehung“ zu sprechen, doch bestehen hinsichtlich dieser mit einem unklaren Begriff operierenden anschaulichen Vorstellung dieselben Bedenken, wie gegen alle sonstigen „unendlich kleinen“ Dinge.

Macht man sich ferner klar, daß eine mit dem bewegten System mitgenommene Linie ihre Hüllkurve nur in einem solchen Punkt berühren kann, dessen Bahntangente mit der Berührungstangente zusammenfällt, so erkennt man, daß alle Berührungsnormalen zusammengehöriger Gleitkurven stets durch das Momentanzentrum gehen. Dieser Grundsatz, der zur Konstruktion der Hüllkurve dienen kann, liefert auch den Schlüssel zur Theorie der Zahnräder.

Fassen wir nun eine ganze Folge von Lagen eines kontinuierlich bewegten Systems  $\Sigma'$  ins Auge, die sämtlich den gleichen Zeitunterschied  $\Delta t$  aufweisen mögen; es handelt sich also sozusagen um eine Filmserie der Bewegung. Der Übergang von der 1. zur 2. Lage läßt sich, wie wir wissen, durch eine Drehung um einen bestimmten Punkt  $P_{12}$  ersetzen, der während dieser Drehung mit einem bestimmten Punkt  $P_{12}$  von  $\Sigma'$  in Deckung ist. Anschließend folgt eine Drehung um einen Punkt  $P_{23}$ , der während dieser Drehung mit  $P_{23}$  in  $\Sigma'$  in Deckung ist, usf. (Abb. 6). Im Augenblick „2“, in dem der Übergang von der 1. zur 2. Drehung erfolgt, decken sich mithin sowohl  $P_{12}$  und  $P'_{12}$  als auch  $P_{23}$  und  $P'_{23}$ . Es besteht also die Streckengleichheit  $\overline{P_{12}P_{23}} = \overline{P'_{12}P'_{23}}$ , und analog gelten noch weitere. Durch die Verbindung aufeinanderfolgender Drehpole im festen wie auch im bewegten System entstehen mithin zwei Polygone  $\pi$  und  $\pi'$  mit entsprechend gleichen Seiten (jedoch unabhängigen Winkeln). Bei der Folge der Ersatzdrehungen wälzt sich  $\pi'$  auf  $\pi$  ab, wie übrigens mit Hilfe des Pauspapiers sehr schön beobachtet werden kann. Die ursprüngliche Bahn-springliche Bahnkurve jedes Punktes wird dabei durch ein gewisses Kreisbogenpolygon angenähert. Nimmt man nun das Zeitintervall  $\Delta t$  immer kürzer, so wird die ausgewählte Lagenfolge immer dichter — gewissemaßen eine fort-schreitend genauere Zeitpunktaufnahme — und die Wälzpolygone  $\pi$  und  $\pi'$  konvergieren gegen zwei „Polkurven“  $\rho$  und  $\rho'$ , die die Orte der Momentanzentren im festen bzw. im bewegten System darstellen. Entsprechende Bögen der beiden Kurven haben gleiche Länge. Während des Bewegungsvorganges rollt  $\rho'$  auf  $\rho$  ohne zu gleiten; der Berührungspunkt ist immer das jeweilige Momentanzentrum.

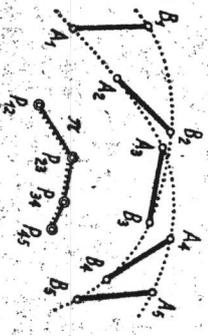
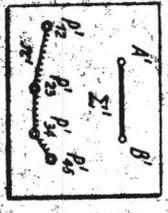


Abb. 6

Zur Illustration dieses fundamentalen Sachverhaltes, demzufolge bei jeder ebenen Bewegung (die keine bloße Schließung ist) ein Paar von Rollkurven existiert, betrachten wir wieder die Bewegung des Ellipsenzirkels (Abb. 5). Aus  $\overline{OP} = \overline{A'B'} = \text{const}$  folgt, daß die „Rastpolkurve“  $\rho$  ein Kreis um den Schienenschnittpunkt  $O$  ist, während sich für die „Gangpolkurve“  $\rho'$  wegen  $\sphericalangle A'P'B' = \pi/2$  der Thaleskreis über  $A'B'$  ergibt. Es rollt mithin der Kreis  $\rho'$  in dem doppelt so großen Kreis  $\rho$ . Da ein auf  $A'B'$  gelegener Punkt  $C'$ , der bekanntlich eine Ellipse beschreibt, gegenüber dem Rollkreis  $\rho'$  in keiner Weise ausgezeichnet ist, so wird ganz allgemein jeder Punkt des bewegten Systems eine Ellipse durchlaufen; für die Umfangspunkte von  $\rho'$  schrumpfen die Bahnen allerdings auf die Durchmesser von  $\rho$  zusammen. — Diese „Ellipsenbewegung“ liegt dem sogenannten Ovalwerk zugrunde, einem auf LEONARDO DA VINCI zurückgehenden Mechanismus zur Herstellung elliptischer Profile auf der Drehbank. —

Zum Schluß mögen diese grundlegenden Dinge auch noch kurz im analytischen Gewande dargestellt werden, und zwar in einer besonders eleganten und noch viel zu wenig verbreiteten Form. Bei vielen metrischen Untersuchungen in der Ebene — und dazu gehört nicht zuletzt die Kinematik — empfiehlt es sich, das Paar der Normalkoordinaten  $x, y$  zu einer komplexen Zahl  $x + iy = z$  zusammenzufassen, die Ebene also als GAUSSSCHE Zahlenebene zu betrachten. Eine Schiebung, die durch den Vektor mit den Komponenten  $a, b$  definiert ist, drückt sich dann einfach durch die Vermehrung aller  $z$  um die komplexe Konstante  $c = a + ib$  aus; eine Drehung um den Ursprung und um den Winkel  $\varphi$  wird hingegen durch die Multiplikation aller  $z$  mit der komplexen Konstanten  $\gamma = \cos \varphi + i \sin \varphi$  bewirkt, wobei nach EULER  $\gamma = e^{i\varphi}$  geschrieben werden darf.

Wir bedienen uns nun in der festen Ebene der komplexen Koordinate  $z = x + iy$ , analog in der bewegten Ebene der Koordinate  $\zeta = \xi + i\eta$ . Die Lage der bewegten Ebene wird festgehalten durch die (komplexe) Ursprungs-koordinate  $z_0$  und den (reellen) Verdrehungswinkel  $\varphi = \sphericalangle x\xi = \sphericalangle y\eta$ . Die Lage eines bestimmten Systempunktes  $\zeta$  ist im festen System dann gegeben durch

$$z = z_0 + \zeta \cdot e^{i\varphi} \quad (1)$$

Ein Bewegungsvorgang wird nun durch die Änderung von  $z_0$  und  $\varphi$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  beschrieben:  $z = z_0(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Gleichung (1) stellt dann bei festem  $\zeta$  schon die komplexe Gleichung der Bahnkurve des Punktes  $\zeta$  dar. Ihre gewöhnliche Parameterdarstellung läßt sich daraus sofort gewinnen, indem man Real- und Imaginärbestandteile trennt.

Durch Ableitung nach  $t$  ergibt sich die Geschwindigkeit

$$\dot{z} = \dot{z}_0 + \dot{\zeta} \cdot e^{i\varphi} \cdot i\varphi \quad (2)$$

Das ist so zu verstehen: Die Zahl  $z$  stellt die komplexe Zusammenfassung der Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung dar; sie wird geometrisch durch den Ortsvektor des Punktes  $z$  in der GAUSSSCHE Zahlen-ebene repräsentiert.

<sup>1)</sup> Die Ellipsenbewegung wird beispielsweise für  $z_0 = e^{-it}$ ,  $\varphi = t$  erhalten.

Um das Momentanzentrum zu finden, haben wir nur nach dem Punkt mit der Geschwindigkeit  $z=0$  zu fragen. Gemäß (2) ist dies der Punkt, der in der bewegten Ebene durch

$$\zeta^* = z_0 e^{-i\varphi} i/\varphi, \quad (3)$$

in der festen Ebene durch

$$z^* = z_0 + \zeta^* e^{i\varphi} = z_0 + z_0 i/\varphi \quad (4)$$

dargestellt wird. Elimination der Größen  $\zeta$  und  $z_0$  aus (1), (2) und (4) liefert die für alle Punkte geltende Beziehung

$$z = (z - z^*) i\varphi, \quad (5)$$

die den bekannten Sachverhalt wiedergibt, daß die Bahngeschwindigkeiten proportional und normal zum Abstand der Systempunkte vom Momentanzentrum sind.

Sehen wir in den Gleichungen (3) und (4)  $z_0$  und  $\varphi$  (und natürlich auch die Ableitungen  $\dot{z}_0$  und  $\dot{\varphi}$ ) als Funktionen von  $t$  an, so haben wir die Parameterdarstellungen der beiden Polkurven vor uns. Daß diese aufeinander abrollen, läßt sich ganz leicht zeigen. Differenzieren wir die Gleichung (4), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{z}^* &= \dot{z}_0 + \zeta^* e^{i\varphi} \cdot i\dot{\varphi} + \dot{\zeta}^* e^{i\varphi}, \\ &= 0 \text{ gemäß (3)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{oder} \quad dz^* = e^{i\varphi} \cdot d\zeta^*, \quad (7)$$

was besagt, daß die Bogenelemente durch Drehung um den Winkel  $\varphi$  zur Deckung gebracht werden können. Darin steckt aber nicht nur die Bogenleichheit, sondern, da  $\varphi$  der Drehungswinkel der beiden Koordinatensysteme ist, auch die Berührung der Polkurven.

Es ist anzunehmen, daß diese analytische Methode — die eine Art von Vektorrechnung der Ebene (ohne eigene Rechenregeln!) abgibt — der Denkweise und dem Geschmack des Ingenieurs besonders liegt, wie ja die ausgedehnte Anwendung der gleichen Prinzipien in der Wechselstromtechnik beweist. Die hervorragende Eignung dieser Methode für die Kinematik springt in die Augen, und sie ist hierzu vom Vortragenden selbst und in einer von ihm geförderten Untersuchung mit Erfolg eingesetzt worden<sup>1)</sup>. Es wäre erfreulich, einen breiteren Interessentenkreis dafür gewinnen zu können.

<sup>1)</sup> W. WORMMANN: Höhere Radlinien. Österr. Ing.-Arch. 1 (1946), 277—296. — Höhere Radlinien als Näherungskurven. Ebdenda, 4 (1950), 3—11.

K. BARRIS: Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen. Österr. Ing.-Arch. 6 (1951), 240—266.