Sonderabdruck
ELEMENTE DER MATHEMATIK
VERLAG BIRKHÄUSER, BASEL/SCHWEIZ

Band VII/4, 1952

Eine überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion

H. SCHERER behandelte vor einigen Jahren ein bemerkenswertes Beispiel einer *überall stetigen und nirgends differenzierbaren Funktion* einer Veränderlichen, das anscheinend auf D. HILBERT (Vorlesung 1917) zurückgeht, von P. FINSLER in seinen Vorlesungen verschiedentlich gebracht wurde und leider viel zuwenig bekanntgeworden ist[1]). Es handelt sich dabei vielleicht um das einfachste Beispiel dieser Art, das gleichzeitig eine hübsche Anwendung *nichtdekadischer Zahlensysteme* bietet. Die vorliegenden Zeilen haben daher einerseits den Zweck, die fragliche Funktion der Vergessenheit zu entreissen, anderseits sollen bei dieser Gelegenheit einige nicht uninteressante Ergänzungen hinzugefügt werden.

1. *Definition.* Unabhängige wie abhängige Veränderliche mögen auf das geschlossene Intervall $[0, 1]$ beschränkt bleiben. Die Funktionsvorschrift kann dann folgendermassen ausgesprochen werden:

«Das Argument x werde zunächst im *Dreiersystem* angeschrieben; der zugehörige Funktionswert $y = f(x)$ ergibt sich dann im *Zweiersystem*, so zwar, dass man – ausgehend von der Null vor dem Komma – jedem Ziffernwechsel bei x an gleicher Stelle einen Ziffernwechsel bei y zuordnet, sonst jedoch keinen Ziffernwechsel vornimmt.»

Also:

$$x = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots = \Sigma a_i\, 3^{-i} \quad \text{mit} \quad a_i = 0, 1, 2;$$

$$y = 0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots = \Sigma b_i\, 2^{-i} \quad \text{mit} \quad b_i = 0 \text{ oder } 1, \tag{1}$$

$$\text{wobei } b_i \mp b_{i-1}, \text{ wenn } a_i \mp a_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Beispiel:

$$x = 0{,}2110021\ldots$$

$$y = 0{,}1001101\ldots$$

2. *Eindeutigkeit.* Die Vorschrift weist jedem Dreierbruch genau einen Zweierbruch zu, da im Zweiersystem nur die Ziffern 0 und 1 zur Auswahl stehen. Zweifel an der *Eindeutigkeit* der Funktion sind nur insofern berechtigt, als gewisse Argumente *zwei* Darstellungen besitzen; jeder *endliche Dreierbruch* kann nämlich auch als *unendlicher*

[1]) H. SCHERER, *Konstruktion einer überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion*, Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule (Münster) *12*, 39–49 (1938).

geschrieben werden:

$$x = 0,a_1 \ldots a_{n-1}a_n 00 \ldots = 0,a_1 \ldots a_{n-1}a'_n 22 \ldots, \qquad \text{wobei } a_n \neq 0 \text{ und } a'_n = a_n - 1 \neq 2. \tag{2}$$

Die zu den beiden Darstellungen gehörigen Funktionswerte stimmen sicher in den ersten $n-1$ Stellen überein; da nach der n-ten Stelle auf jeden Fall ein Ziffernwechsel vorliegt, so lautet das Ende entweder 011... oder 100..., was aber im Zweiersystem gleichwertig ist. *Die Funktion ist mithin durchwegs eindeutig.*

3. *Stetigkeit.* Eine Funktion $y = f(x)$ heisst an einer Stelle x_0 *stetig*, wenn aus $x \to x_0$ (bei beliebiger Annäherung) auch $y \to y_0$ folgt.

Dass diese Eigenschaft bei der vorliegenden Funktion für alle *eindeutig darstellbaren* x_0 erfüllt ist, liegt auf der Hand: Je mehr sich die Zahl x dem Wert x_0 nähert, um so mehr Stellen nach dem Komma muss sie mit x_0 gemein haben, um so mehr Stellen stimmen dann aber auch bei y und y_0 überein, so dass der Grenzwert von y mit y_0 zusammenfällt.

Für gemäss (2) *zweideutig darstellbare* x_0 kann man sich zunächst auf einseitige Grenzübergänge beschränken. Wird bei rechtsseitiger Annäherung die Darstellung mit der Nullserie am Ende gewählt, bei linksseitiger Annäherung die Darstellung mit der Zweierserie, dann ist die obige Überlegung wieder anwendbar, und da sich in beiden Fällen derselbe Grenzwert $f(x_0)$ einstellt, so wird er auch bei beliebiger Annäherung erreicht.

Die Funktion ist demnach im ganzen Intervall stetig.

4. *Nichtdifferenzierbarkeit.* Eine Funktion $y = f(x)$ heisst an einer Stelle x_0 *differenzierbar*, wenn mit $x \to x_0$ (bei beliebiger Annäherung) der Differenzenquotient $(y - y_0) : (x - x_0)$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt. Zum Nachweis des Gegenteils genügt daher jeweils die Feststellung einer einzigen Folge $x_n \to x_0$, für welche die Folge der Differenzenquotienten *nicht* konvergiert.

Sei nun

$$x_0 = 0,a_1 \ldots a_{n-1}a_n a_{n+1} \ldots$$

ein beliebiger Argumentwert,

$$y_0 = 0,b_1 \ldots b_{n-1}b_n b_{n+1} \ldots$$

der zugehörige Funktionswert. Man bestimme dann für jeden Index n einen Wert

$$x_n = 0,a_1 \ldots a_{n-1}a'_n a'_{n+1} \ldots$$

derart, dass die ersten $n-1$ Stellen nach dem Komma mit x_0 übereinstimmen, während die folgenden so gewählt werden, dass der Funktionswert

$$y_n = 0,b_1 \ldots b_{n-1}b'_n b_{n+1} \ldots$$

nur an der n-ten Stelle von y_0 abweicht; x_n ist damit keineswegs eindeutig festgelegt, existiert aber in jedem Fall. Für die so konstruierte Folge $x_n \to x_0$ gilt dann

$$|x_n - x_0| \leqq 3^{-n+1}, \qquad |y_n - y_0| = 2^{-n}, \tag{3}$$

und der Differenzenquotient wächst über alle Schranken:

$$\left|\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}\right| \geqq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty. \tag{4}$$

Die Funktion ist demnach nirgends differenzierbar.

So weit gehen im wesentlichen die (hier etwas vereinfachten) Ausführungen H. SCHERERS. Ein vertieftes Studium der vorgelegten Funktion, von der man vorläufig noch keinerlei anschauliche Vorstellung besitzt, stösst kaum auf Schwierigkeiten und ist durchaus lohnend.

5. *Umkehrung.* Die Aufgabe, zu einem innerhalb des Wertebereiches [0, 1] beliebig vorgegebenen Funktionswert y das Argument x zu rekonstruieren, ist naturgemäss *nicht eindeutig.* Jeder durch einen Ziffernwechsel bei y geforderte Ziffernwechsel bei x kann – den Möglichkeiten im Dreiersystem entsprechend – stets auf zwei Arten erfüllt werden. Jedes y mit unendlich vielen Ziffernwechseln, also jeder *eindeutig darstellbare Funktionswert,* wird demnach *unendlich oft* angenommen, und zwar sogar in jeder noch so kleinen Umgebung einer Existenzstelle.

Demgegenüber wird jeder *zweideutig darstellbare Funktionswert,* also jeder Wert, der eine endliche Zweierbruchdarstellung gestattet ($y = g \cdot 2^{-n}$ mit positiv-ganzem $g \leqq 2^n$), nur *endlich oft* angenommen. So wird beispielsweise der Wert

$$y = \frac{1}{2} = 0{,}100\ldots = 0{,}011\ldots$$

erreicht für

$$\begin{aligned} x = 0{,}100\ldots &= \frac{1}{3}; & 0{,}011\ldots &= \frac{1}{6}; \\ 0{,}122\ldots &= \frac{2}{3}; & 0{,}022\ldots &= \frac{1}{3}; \\ 0{,}200\ldots &= \frac{2}{3}; \\ 0{,}211\ldots &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Die *Anzahl* der Argumentwerte x hängt offenbar von der Anzahl der Ziffernwechsel bei y ab. Ist ω_0 die Anzahl der Ziffernwechsel in der «endlichen» Darstellung von y – unter Berücksichtigung der Null vor dem Komma und der Nullserie, die an die letzte Eins angeschlossen werden kann –, ω_1 hingegen die Anzahl der Ziffernwechsel in der «unendlichen» Darstellung, dann gilt $\omega_1 = \omega_0 \pm 1$. Bezeichnet ω die grössere der beiden Zahlen, so ergeben sich für x rein formal

$$2^{\omega_0} + 2^{\omega_1} = 2^{\omega} + 2^{\omega-1} = 3 \cdot 2^{\omega-1} \tag{5}$$

Möglichkeiten. Diese Werte sind aber nicht alle verschieden. Man macht sich nun leicht klar, dass sie sich stets in Sechsergruppen ordnen lassen, die nach dem Muster des obigen Beispiels ($y = 1/2$) auslaufen: Es gibt also gleich viel Null-, Einser- und Zweierserien am Ende, und die auf Null- und Zweierserien endenden Werte sind paarweise äquivalent. Die tatsächliche Anzahl der x-Werte schmilzt mithin auf zwei Drittel zusammen, das ist 2^ω; die Hälfte dieser Werte gestattet eine endliche Darstellung, die andere läuft auf eine Einserserie aus.

6. *Geometrische Veranschaulichung.* Es liegt nahe, ein *approximatives Diagramm* der Funktion anzulegen, indem man beispielsweise die Argumente mit höchstens n-stelliger endlicher Darstellung herausgreift, also die Werte $x = i \cdot 3^{-n}$, und die zugehörigen, in ein Koordinatensystem eingetragenen Bildpunkte $(x|y)$ in der natürlichen Reihenfolge $i = 0, 1, \ldots, 3^n$ durch einen *Streckenzug* verbindet. Das so gewonnene Polygon strebt mit $n \to \infty$ gleichmässig gegen das Funktionsdiagramm und nähert es mit beliebiger Genauigkeit an.

Günstiger erscheint die Auswahl nach *Funktionswerten* mit höchstens n-stelliger Darstellung, also der Werte $y = j \cdot 2^{-n}$; die zugehörigen Argumente sind nach Abschnitt 5 die Werte $x = i \cdot 3^{-n}/2$ mit $i = 0, 1, \ldots, 2 \cdot 3^n$. Die so konstruierte, stetige und abteilungsweise lineare *Näherungsfunktion* $f_n(x)$ stimmt mit $f(x)$ in den benützten $2 \cdot 3^n + 1$ Punkten überein und weicht an keiner Stelle des Intervalls um mehr als 2^{-n} ab; mit Benützung von Ergebnissen aus Abschnitt 8 liesse sich sogar zeigen

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq 2^{-n-1}. \tag{6}$$

Für $n = 0$ erhält man die durch die Wertepaare $(0|0)$, $(1/2|1)$ und $(1|1)$ festgelegte Ausgangsfunktion

$$f_0(x) = \begin{cases} 2x \text{ für } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \\ 1 \quad \text{für } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1. \end{cases} \tag{7}$$

Das Diagramm weist demgemäss einen «Abhang» und eine «Terrasse» auf (Figur 1). Berücksichtigung der vier Stellen mit $y = 1/2$ ($x = 1/6, 1/3, 2/3, 5/6$; vgl. Abschnitt 5) führt auf die «1. Näherung» $f_1(x)$, deren Bildpolygon gemäss Figur 1 aus jenem von f_0 dadurch hervorgeht, dass in der Mitte des «Abhangs» eine neue Terrasse eingeschaltet wird, während in die frühere «Terrasse» jetzt ein trapezförmiger «Graben» eingeschnitten erscheint. Dieses Prinzip ist auch bei allen folgenden Schritten zu beobachten: Jeder vorhandene Abhang wird durch eine neue Terrasse unterbrochen (was zwei neue Abhänge erzeugt), während an die Stelle jeder alten Terrasse ein «Graben» oder «Damm» tritt (was ebenfalls eine neue Terrasse und zwei neue Abhänge mit sich bringt). Die Abhänge werden dabei ständig kürzer, gleichzeitig aber auch immer steiler, was die Nichtdifferenzierbarkeit der Grenzfunktion durchaus einleuchtend macht. Die hier herrschende *geometrische Konstruktionsvorschrift* – deren Richtigkeit aus Abschnitt 8 mit aller Deutlichkeit hervorgehen wird – erinnert stark an das einschlägige Konstruktionsprinzip von K. KNOPP[1]).

Figur 2 zeigt im ersten Drittel die 5. Näherungsfunktion $f_5(x)$, die sich von $f(x)$ um höchstens 1/64 unterscheidet, was beim verwendeten Ordinatenmaßstab 1 mm ausmacht.

[1]) K. KNOPP, *Eine einheitliche Erzeugungsart stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen*, Sitz.-Ber. Math. Ges. Berlin *16*, 97–106 (1917).

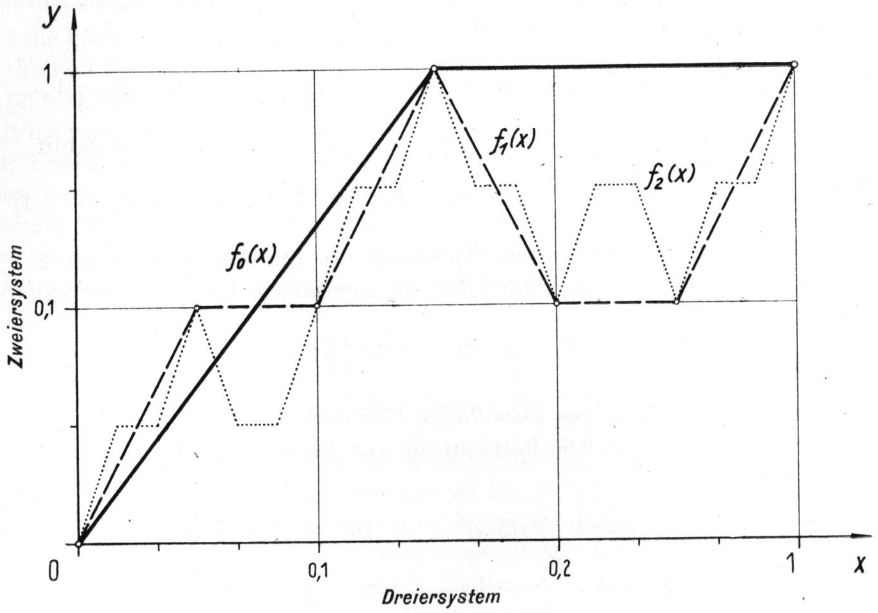
y
1
0,1
0
Zweiersystem
$f_0(x)$
$f_1(x)$
$f_2(x)$
0,1
0,2
1
x
Dreiersystem

Fig. 1

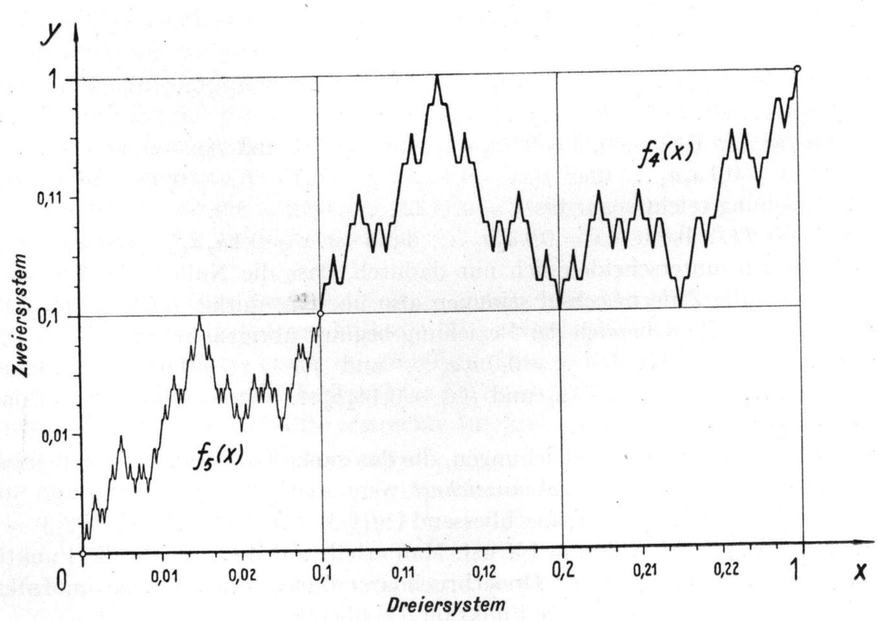
y
1
0,11
0,1
0,01
0
Zweiersystem
$f_4(x)$
$f_5(x)$
0,01
0,02
0,1
0,11
0,12
0,2
0,21
0,22
1
x
Dreiersystem

Fig. 2

7. *Variation.* Bezeichne A_n die Anzahl der «Abhänge» von $f_n(x)$, B_n die Anzahl der «Terrassen». Es gelten die Rekursionsformeln

$$A_n = 2\,(A_{n-1} + B_{n-1}), \quad B_n = A_{n-1} + B_{n-1} \quad \text{mit} \quad A_0 = B_0 = 1. \tag{8}$$

Hieraus folgt unmittelbar $A_n = 2\,B_n$ und $B_n = 3\,B_{n-1}$ für $n > 0$, und damit

$$A_n = 4 \cdot 3^{n-1}, \quad B_n = 2 \cdot 3^{n-1}. \qquad (n \geqq 1) \tag{9}$$

Jedem «Abhang» entspricht eine Änderung des Funktionswertes um 2^{-n}; die Summe aller Änderungsbeiträge für $f_n(x)$, die sogenannte *Variation*, beträgt mithin

$$V_n = A_n \cdot 2^{-n} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}. \tag{10}$$

Die Funktion $f(x)$ ist daher von unendlicher Variation.

8. *Funktionalgleichungen.* Die Betrachtung von Figur 2 lässt folgende *Funktionalgleichungen* erkennen:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && f(x) = \frac{1}{2}\,f(3\,x) && \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}, \\
&\text{II.} && f(x) = \frac{1}{2} + f\left(x - \frac{1}{3}\right) && \text{für} \quad \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \\
&\text{III.} && f(x) = f(1 - x) && \text{für} \quad \frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{2}{3}, \\
&\text{IV.} && f(x) = 1 - f(1 - x) && \text{für} \quad \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1.
\end{aligned}$$

Beweis für I: Ist $3\,x = 0{,}a_1 a_2 \ldots$ und $f(3\,x) = 0{,}b_1 b_2 \ldots$, dann gehört zu $x = 0{,}0 a_1 a_2 \ldots$ ein $f(x) = 0{,}0 b_1 b_2 \ldots = 2^{-1} \cdot f(3\,x)$.

Beweis für II: Ist $x - 0{,}1 = 0{,}0 a_2 a_3 \ldots$ mit $a_2 \leqq 1$ und $f(x - 0{,}1) = 0{,}0 a_2 b_3 \ldots$, dann ist $x = 0{,}1 a_2 a_3 \ldots$ und $f(x) = 0{,}1 a_2 b_3 \ldots = 0{,}1 + f(x - 0{,}1)$; die Gültigkeit dieser Beziehung reicht sogar bis $x = 0{,}1122 \ldots = 0{,}12 = 5/9$.

Beweis für III: Ist $1 - x = 0{,}1 a_2 a_3 \ldots$, dann ist $x = 0{,}1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \ldots$ mit $\bar{a}_i = 2 - a_i$. Die Argumente unterscheiden sich nur dadurch, dass die Nullen und Zweien vertauscht sind; die Ziffernwechsel stimmen also überein, mithin auch die Funktionswerte. Der Gültigkeitsbereich der Beziehung beginnt übrigens schon bei $x = 1/3$.

Beweis für IV: Ist $1 - x = 0{,}0 a_2 a_3 \ldots$ und $f(1 - x) = 0{,}0 b_2 b_3 \ldots$, dann ist $x = 0{,}2 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \ldots$ mit $\bar{a}_i = 2 - a_i$ und $f(x) = 0{,}1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \ldots$ mit $\bar{b}_i = 1 - b_i$; mithin gilt $f(1 - x) + f(x) = 0{,}11 \ldots = 1$.

Durch die vier Funktionalgleichungen, die das ganze Definitionsintervall erfassen, ist die Funktion $f(x)$ *eindeutig gekennzeichnet*, wenn man $f(0) = 0$ festsetzt und Stetigkeit fordert. IV liefert $f(1) = 1$, anschliessend I: $f(1/3) = 1/2$, III oder IV: $f(2/3) = 1/2$; neuerdings IV: $f(1/9) = f(2/9) = 1/4$ usf. Man erhält auf diese Weise die Funktionswerte für alle x mit endlicher Dreierbruchdarstellung, und da diese im Intervall überall dicht liegen, ist die stetige Funktion $f(x)$ überall definiert.

Ausgehend von einer *beliebigen Ausgangsfunktion* $f_0(x)$, die im Intervall $[0, 1]$ stetig vorausgesetzt sei und die Punkte $(0 \mid 0)$ und $(1 \mid 1)$ verbindet, lässt sich mittels der Funktionalgleichungen I bis IV eine *Funktionenfolge* $f_n(x)$ konstruieren, die *gleich-*

mässig gegen $f(x)$ konvergiert. Ist $f_{n-1}(x)$ bereits bekannt, dann liefert die Anwendung von I die nächste Funktion $f_n(x) = f_{n-1}(3x)/2$ im Intervall $[0, 1/3]$, während II, III und IV anschliessend die Erweiterung auf die restlichen Abschnitte $[1/3, 1/2]$, $[1/2, 2/3]$ und $[2/3, 1]$ ermöglichen. Wird beispielsweise für $f_0(x)$ die Funktion (7) gewählt, so erhält man auf diese Weise genau die Näherungsfunktionen $f_n(x)$ aus Abschnitt 6.

Die Funktionalgleichung I bedeutet geometrisch, dass das erste Drittel des *Diagramms* von $f(x)$ zum ganzen Diagramm *affin* ist; dasselbe gilt wegen IV auch für das letzte Drittel. Iteration der Funktionalgleichungen lehrt, dass die *Bildkurve in jeder Umgebung beliebig kleine Abschnitte enthält, die ihren Gesamtverlauf affin verkleinert wiedergeben*, was zweifellos recht merkwürdig ist.

9. *Extreme.* Sei

$$x = 0, a_1 \ldots a_{n-2}02 = 0, a_1 \ldots a_{n-2}0122 \ldots,$$

ferner

$$y = 0, b_1 \ldots b_{n-2}\bar{b}_n b_n \bar{b}_n \bar{b}_n \ldots \quad \text{mit} \quad \bar{b}_n = 1 - b_n$$

der zugehörige Funktionswert, der für beide Darstellungen von x auch formal gleich ausfällt. Jede Änderung von x um weniger als $h = 3^{-n}/2$ bewirkt eine Änderung von y erst nach der n-ten Stelle, und zwar – wegen der Endserie gleicher Ziffern $\bar{b}_n$ – stets im gleichen Sinn. Die Funktionswerte im offenen Intervall $(x - h, x + h)$ sind daher durchwegs grösser bzw. durchwegs kleiner als y. Der Wert y stellt somit ein (relatives) *Extrem* dar, und zwar ein *Minimum* oder *Maximum*, je nachdem $\bar{b}_n = 0$ oder 1; dies hängt wiederum davon ab, ob die Anzahl der *Ziffernwechsel* in x *gerade* oder *ungerade* ist.

Ähnliche Überlegungen sind für die Endgruppe 21 sowie für eine unendliche Einserserie durchführbar, während sie für die übrigen Endgruppen 01, 11, 12 und 22 schon wegen der Verschiedenheit der beiden Darstellungen von y versagen; da schliesslich ein Funktionswert mit nur unendlicher Darstellung in jeder noch so kleinen Umgebung einer Existenzstelle unendlich oft angenommen wird (Abschnitt 5) kann auch er *kein Extrem* abgeben. Es gilt daher:

An allen Stellen, deren Argument in der Dreierbruchdarstellung auf 02, 21 oder eine unendliche Einserserie ausläuft – und nur an diesen – liegt ein Extrem der Funktion $f(x)$ vor.

10. *Integral.* Das über das Definitionsintervall erstreckte *bestimmte Integral J* der Funktion $f(x)$ kann natürlich mit Hilfe der Näherungsfunktionen $f_n(x)$ aus Abschnitt 6 berechnet werden. Dieser etwas umständliche Weg lässt sich wesentlich abkürzen, wenn man die *Funktionalgleichungen* I bis IV heranzieht. Bezeichnet nämlich J' das nur über die erste Intervallhälfte erstreckte Integral, so bestehen – aus Figur 2 leicht zu ersehen – die folgenden Beziehungen:

$$J' = \frac{J}{6} + \frac{J'}{6} + \frac{1}{12}, \quad J = \frac{J'}{3} + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Aus diesem Gleichungspaar ergibt sich aber unmittelbar $J' = 3/14$ und

$$J = \int_0^1 f(x)\, dx = \frac{4}{7}. \tag{12}$$

W. WUNDERLICH, Wien.