Euklidische und nichteuklidische D-Linien auf Quadriken.

Memoria di WALTER WUNDERLICH (a Wien).

Zusammenfassung. - *Die auf einer Fläche 2. Ordnung verlaufenden Kurven, deren Schmieg kugeln die Fläche berühren, werden hier erstmalig vom synthetischen Standpunkt aus betrachtet. In einfachster Weise ergeben sich dabei nicht nur die wenigen bekannten, sondern auch zahlreiche neue geometrische Eigenschaften dieser im allgemeinen transzendenten Kurven, die gleichzeitig einer darstellend-geometrischen Behandlung zugänglich gemacht werden. - Die unschwer durchzuführende Übertragung der im euklidischen Raum herrschenden Beziehungen auf einen Raum mit* CAYLEY-KLEINscher *Metrik weist auf manche interessanten Zusammenhänge hin.*

1. - Einleitung.

1. Die auf einer vorgelegten Fläche verlaufenden Kurven, deren *Schmiegkugeln die Fläche berühren*, werden « D-Kurven » genannt, nach G. DARBOUX, der sie als erster betrachtet hat (1). Diese Kurven fallen offensichtlich in das Interessengebiet der *Inversionsgeometrie*, da ihre charakteristische Eigenschaft durch Inversionen nicht zerstört wird. - Da diese Linien von Ableitungen 3. Ordnung abhängen, könnte es im ersten Augenblick scheinen, dass auf einer Fläche ∞^3 D-Kurven liegen und ihre Bestimmung die Lösung einer Differentialgleichung 3. Ordnung erfordert. Dies ist indessen nicht der Fall, wie die folgende grundlegende Überlegung lehrt.

Sei l eine *D-Linie* der (von einer Kugel verschiedenen) Fläche Φ und Σ ihre *Schmiegkugel* in einem allgemeinen Punkte T. Σ schneidet Φ nach einer Kurve h, die mit l vier in T vereinigte Punkte gemein hat; da h als Schnitt berührender Flächen in T einen Doppelpunkt aufweist, wird l den einen Zweig von h einfach und den anderen in drei zusammengerückten Punkten schneiden, also oskulieren. Jeder durch die Tangente t von l (und h) gelegte ebene Schnitt von Φ hat mit h wenigstens $2 + 1 = 3$ zusammengerückte Punkte gemein und sein Krümmungskreis liegt auf der Kugel Σ, die damit als die zum Linienelement (T, t) gehörige *Meusnierkugel* zu erkennen ist. Unter den Ebenen durch t ist die *Schmiegebene* τ von l (und h) ausgezeichnet; alle und nur die das Element (T, t, τ) oder das entsprechende Element des zweiten Zweiges von h enthaltenden Flächenkurven haben mit h wenigstens $3 + 1 = 4$ zusammenfallende Punkte gemein und besitzen demnach Σ als Schmiegkugel. Insbesondere weist der ebene Schnitt $\tau\Phi$ in T einen *Scheitel* auf.

(1) G. DARBOUX, *Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface*, « Comptes rendus », 73, (1871), 732-736.

Nehmen wir umgekehrt in einem Flächenpunkt T eine beliebige Fortschreitungsrichtung t an, so gehört zu dieser eine bestimmte Meusnierkugel Σ, und deren Schnittlinie h mit Φ legt eindeutig die zugehörige Schmiegebene τ fest (2). Die Ermittlung der D-Linien von Φ beruht nun auf der Aneinanderreihung solcher Elemente (T, t, τ) aus einem Vorrat von ∞^3 Exemplaren, verlangt also nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung, die DARBOUX a. a. O. (1) aufgestellt hat. Auf der Fläche existieren mithin bloss ∞^2 D-Linien, für die sich überdies aus den eben entwickelten Vorstellungen sofort eine zweite Kennzeichnung ergibt: *Es sind jene Flächenkurven, deren Krümmungskreise die Fläche hyperoskulieren* (3).

Es liegt auf der Hand, dass sich die angestellten Überlegungen auch ohne weiteres in Rahmen einer nichteuklidischen Metrik durchführen lassen.

2. Im folgenden sollen nun speziell die D-Kurven auf Flächen 2. Ordnung betrachtet werden. DARBOUX selbst hat bereits a. a. O. (1) ihre Bestimmung mit Hilfe elliptischer Koordinaten auf Quadraturen zurückgeführt. Deren Auswertung (mittels komplexer elliptischer Funktionen) wurde jedoch erst von A. PELL (4) vorgenommen, der den Verlauf der D-Linien auf einem dreiachsigen Ellipsoid diskutierte und eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser speziellen Kurven entdeckte, die auch von A. ENNEPER und J. G. HARDY betrachtet worden waren (5).

Im Gegensatz zu allen diesen rein analytischen Untersuchungen soll hier in Verfolgung des eingeschlagenen Weges vorwiegend die konstruktiv-synthetische Methode verwendet werden, die gerade im Fall der Flächen 2. Ordnung besonders angezeigt erscheint und tatsächlich mühelos und in sehr durchsichtiger Weise zu interessanten und neuen Ergebnissen führt. Einer rechnerischen Auswertung dieser Betrachtungsweise steht natürlich nichts entgegen.

---

(2) Hinsichtlich des von den Ebenen τ eingehüllten *Kegels 5. Klasse*, sowie der von den zugehörigen Krümmungskreisen erzeugten *zyklischen Fläche 10. Ordnung* lese man die inhaltsreiche Abhandlung von G. DARBOUX, *Sur le contact des courbes et des surfaces*, « Bull. sci. math. astr. », (II), 4, (1880), 348-384.

(3) Ähnliche Überlegungen lassen sich für die *Schmieglinien (Asymptotenkurven)* einer Fläche anstellen, die ja durch berührende Schmiegebenen gekennzeichnet sind: Obwohl hier Ableitungen 2. Ordnung eingehen, existieren doch bloss ∞^1 derartige Kurven auf einer Fläche und ihre Bestimmung erfordert nur die Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung. Es sind überdies jene Flächenkurven, deren Tangenten die Fläche oskulieren.

(4) A. PELL, *« D » lines on quadrics*. « Transact. Amer. Math. Soc. », 1, (1900), 315-322.

(5) A. ENNEPER, *Bemerkungen über die Differentialgleichung einer Art von Kurven auf Flächen*, « Nachr. Göttinger Ges. Wiss. », (1871), 577-583; J. G. HARDY, *On Darboux lines on surfaces*, « Amer. J. Math. », 20, (1898), 283-292. - Eine kurze Zusammenfassung bringt G. LORIA, *Curve sghembe speciali II*, (Bologna, 1925), 225 ff.

II. – Euklidische D-Kurven auf Quadriken.

3. Sei von jetzt ab Φ eine *Fläche 2. Ordnung*, Kegel und Zylinder inbegriffen. Die vorhin benützte Schnittlinie h mit einer berührenden *Kugel* Σ ist nun eine *rationale Quartik* mit einem Knoten im Berührungspunkt T und vier unveränderlichen Fernpunkten I_1, I_2, I_3, I_4, nämlich den absoluten Punkten von Φ. Jede Quartik h wird daher aus ihrem Doppelpunkt T durch einen *Kegel 2. Ordnung* Δ projiziert, der einerseits die beiden Doppelpunktstangenten t zu Erzeugenden hat und längs derselben von den zugehörigen Schmiegebenen τ berührt wird, anderseits die Fixpunkte I_n enthält; die *Fernkegelschnitte* der ∞^3 Kegel Δ erfüllen daher lediglich ein *Büschel* mit den Grundpunkten I_n.

Die von den Tangenten einer auf Φ verlaufenden *D-Linie* l gebildete *Torse* wird nun längs ihrer Erzeugenden t von den Schmiegebenen τ und daher auch von den zugehörigen Kegeln Δ berührt. Die *Fernkurve* der Torse wird mithin in jedem ihrer Punkte von einem der *Kegelschnitte* c des Büschels $I_1I_2I_3I_4$ berührt, ist also notwendig mit einem dieser Kegelschnitte *identisch*, da keine Hüllkurve existiert. Wir haben damit den

SATZ 1. – *Die Tangentenflächen der D-Kurven einer Quadrik schneiden die Fernebene nach den Kegelschnitten eines Büschels, das die Fernkurve der Quadrik und den absoluten Kegelschnitt enthält. Umgekehrt ist jede Flächenkurve, deren Tangenten einen der Büschelkegelschnitte treffen, eine D-Linie der Quadrik.*

Dieser Satz ist bei Mittelpunktsflächen 2. Ordnung äquivalent zu dem

SATZ VON PELL. – *Die zu den Tangenten einer D-Linie einer Mittelpunktsquadrik parallelen Flächendurchmesser sind gleich lang.*

A. PELL scheint jedoch nicht beachtet zu haben, dass solche Durchmesser auf einem Kegel 2. Ordnung liegen. In der Tat, schneidet man Φ mit einer konzentrischen Kugel Ω, so ergibt sich eine zentralsymmetrische Quartik mit den Fernpunkten I_n, welche aus dem Mittelpunkt O durch einen *Kegel 2. Ordnung* Δ_0 projiziert wird, der einerseits gleich lange Flächendurchmesser trägt und anderseits einen der Fernkegelschnitte c enthält.

Bezieht man übrigens Φ *affin* auf Ω, so bleiben beim Übergang von Φ zu Ω alle in Richtung der Erzeugenden von Δ_0 gemessenen Längen unverändert, insbesondere also auch die *Bogenlängen* der durch Ω bestimmten *D-Linien* von Φ. In diesem Sinne wäre eine zweite Aussage von A. PELL richtigzustellen, der fälschlich behauptet, die Bögen einer D-Linie von Φ blieben bei Projektion aus dem Flächenmittelpunkt auf Ω erhalten.

4. Die Ermittlung der D-Linien einer Quadrik Φ ist nunmehr zurückgeführt auf die Bestimmung von Flächenkurven mit einem bekannten *Tangentenrichtkegel* Δ_0, der übrigens mit Φ *konzyklisch* ist. Sieht man von den zerfal-

lenden Kegeln Δ_0 ab, die auf die ebenfalls als D-Linien anzusehenden Kreisschnitte von Φ führen, und denkt man sich Δ_0 durch eine räumliche *Affinität* in einen *Drehkegel* verwandelt, so gehen die D-Kurven von Φ in *Böschungslinien* auf der affinen Quadrik über. Die D-Kurven auf Quadriken sind also *affine Böschungslinien* und lassen sich nach der gleichen, im wesentlichen projektiven Methode behandeln, die der Verfasser für die gewöhnlichen Böschungslinien auf Quadriken entwickelt hat ([6]).

Vor dem Eingehen auf den allgemeinen Fall soll noch hervorgehoben werden, dass für *Drehflächen 2. Ordnung* gewöhnliche Böschungslinien als D-Kurven auftreten, da hier die konzyklischen Kegel Δ_0 von vornherein *Drehkegel* sind. Es gilt hier der

SATZ VON BLASCHKE – *Die D-Linien einer Drehquadrik sind bei lotrechter Achsenlage identisch mit ihren Böschungslinien.*

Diese speziellen Böschungslinien mit ihren zahlreichen merkwürdigen Eigenschaften sind wiederholt untersucht worden, u. a. von W. BLASCHKE, der anscheinend als einziger bemerkt hat, dass ihre Schmiegkugeln die Trägerfläche berühren ([7]). Diese Kurven erscheinen bei Normalprojektion auf eine Parallelkreisebene bekanntlich als *Radlinien* oder Grenzfälle davon (Ellipsoid: Epizykloiden; einschaliges Hyperboloid: Hypo-oder Hyperzykloiden; zweischaliges Hyperboloid: Parazykloiden; Paraboloid: Kreisevolventen). Auf dem Drehkegel ergeben sich die wohlbekannten *zylindrokonischen Spiralen (Loxodromen),* auf dem Drehzylinder die gemeinen *Schraublinien.*

5. Da im Falle eines Zylinders oder Kegels Φ jede zu einem bestimmten Richtkegel Δ_0 gehörige Schar affiner Böschungslinien eine kontinuierliche Schiebungs-oder Streckungsgruppe verträgt, ist ihre Integration leicht durchzuführen und wir können uns auf die Betrachtung *regulärer Quadriken* Φ beschränken. Wir machen hierbei Gebrauch von der Transformation durch das *Polarsystem* von Φ und bezeichnen den Polarkegel des unendlich fernen Leitkegelschnittes c mit Γ; sein Scheitel ist der (eigentliche oder uneigentliche) Flächenmittelpunkt O. Ferner bedienen wir uns der *Zentralprojektion* aus O auf eine beliebige Bildebene π und kennzeichnen dabei alle Bildelemente durch einen Akzent; die Projektion u' des Fernkegelschnittes u von Φ stellt den scheinbaren Umriss der Fläche dar.

Sei nun l eine auf Φ verlaufende Kurve, deren sämtliche Tangenten den Leitkegelschnitt c treffen. In der Polarität von Φ entspricht jeder solchen

---

([6]) W. WUNDERLICH, *Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung,* « Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien », 155, (1947), 309-331. - Vgl. auch die hieran anknüpfende Arbeit von F. FABRICIUS-BJERRE, *Über projektive Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung,* « Danske Vid. Selsk., Mat. fys. Medd. », 25, (1950), 3-21

([7]) W. BLASCHKE, *Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien,* « Mh. Math. Phys. », 19, (1908), 188-204.

Tangente t die konjugierte Flächentangente $\bar{t}$, und da diese den Polarkegel Γ von c berühren muss, so erscheint sie in der Projektion aus O als Tangente $\bar{t}'$ des festen Kegelschnittes Γ'. Als Bilder reziproker Polaren sind t und $\bar{t}'$ überdies konjugierte Geraden bezüglich des Umrisskegelschnittes u' (Fig. 1). Fassen wir nun u' als *Massgebilde einer nichteuklidischen Metrik* von CAYLEY-KLEINschem Typus in der Bildebene auf, so haben wir t' und $\bar{t}'$ in diesem Sinne als « orthogonal » anzusehen. Das Bild l' der affinen Böschungslinie l ist demnach eine Orthogonaltrajektorie der Strahlenschar $\bar{t}'$, also eine *Evolvente des Kegelschnittes* Γ' im Sinne der genannten Massbestimmung.

SATZ 2. - *Die* ∞^1 *affinen Böschungslinien einer regulären Quadrik* Φ, *die zu einem in der Fernebene gegebenen Leitkegelschnitt* c *gehören, erscheinen bei Projektion aus dem Flächenmittelpunkt auf eine Ebene als Evolventen eines Kegelschnittes* Γ', *und zwar im Sinne jener Cayley-Kleinschen Metrik, die sich auf den scheinbaren Umriss der Quadrik gründet.* Γ' *ist die Spur des zu* c *bezüglich* Φ *polaren Kegels* Γ.

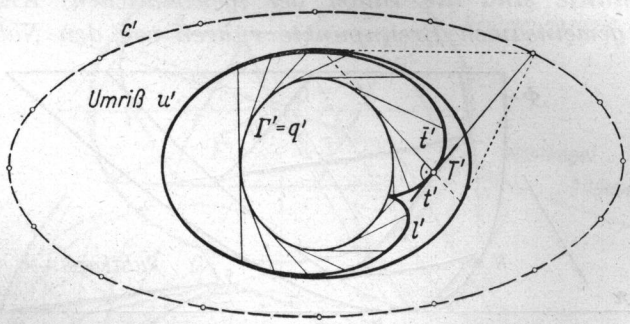

Fig. 1. - D-Linie eines zweischaligen Hyperboloides. Projektion aus dem Flächenmittelpunkt auf eine a hsennormale Ebene: Hyperbolische Evolvente der Ellipse Γ'.

Die Art der in Satz 2 genannten Metrik hängt von den Realitätsverhältnissen des Fernkegelschnittes der Quadrik ab und geht aus der folgenden Zusammenstellung hervor:

Ellipsoid	Elliptische Metrik
Einschaliges Hyperboloid	Indefinite Metrik
Zweischaliges Hyperboloid	Hyperbolische Metrik (Fig. 1)
Elliptisches Paraboloid	Euklidische Metrik [8]
Hyperbolisches Paraboloid	Pseudoeuklidische Metrik.

[8] Im Falle des Paraboloids zerfällt die Fernkurve u in zwei durch das Projektionszentrum O gehende Erzeugende u_1, u_2, sodass das Massgebilde u' der Bildebene π aus zwei Fernpunkten u_1', u_2' besteht. Wählt man für π speziell eine Kreisschnittebene, so fallen die Masspunkte mit den absoluten Kreispunkten zusammen.

6. Der abzuwickelnde Kegelschnitt Γ' der Bildebene kann als die Projektion einer gewissen, der Fläche Φ angehörenden *Quartik* q aufgefasst werden. Diese Quartik q ist die Berührungslinie der Φ und c umschriebenen Torse 4. Klasse und grenzt das Realitätsgebiet der zu c gehörigen Böschungslinien ab, die mit *Spitzen* auf q aufsetzen. Hier fallen die Spitzentangenten t — wie bei jeder D-Kurve — mit Hauptkrümmungsrichtungen zusammen, ebenso mithin die dazu konjugierten Tangenten $\bar{t}$ von q; hieraus ist zu ersehen, dass q eine *Krümmungslinie* von Φ ist.

Bekanntlich besitzen die Krümmungslinien einer regulären Quadrik die Minimalerzeugenden der Fläche zu gemeinsamen Tangenten. Über Satz 2 hinausgehend gilt daher der

SATZ 3. – *Die D-Kurven einer regulären Quadrik erscheinen bei Projektion aus der (eigentlichen oder uneigentlichen) Flächenmitte auf eine Ebene als Evolventen konfokaler Kegelschnitte im Sinne jener Geometrie, die sich auf den scheinbaren Flächenumriss als absolutes Gebilde gründet. Die abzuwikkelnden Kegelschnitte sind die Bilder der (gewöhnlichen) Krümmungslinien der Fläche, die gemeinsamen Brennpunkte rühren von den Nabelpunkten her.*

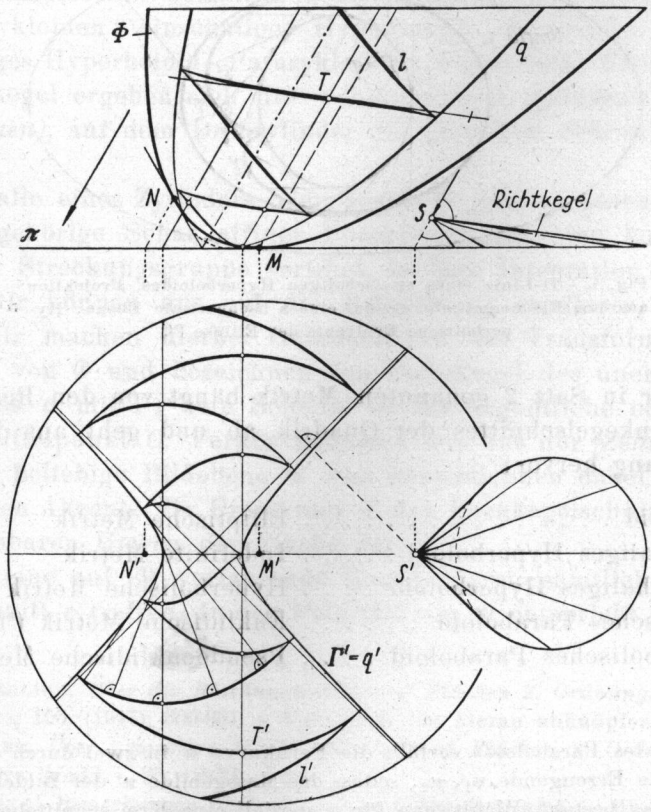

Fig. 2. – D-Linie eines elliptischen Paraboloides. Parallelprojektion in Achsenrichtung auf eine Kreisschnittebene: Euklidische Evolvente der Hyperbel $\Gamma' = q'$ mit den Brennpunkten M' und N'.

Damit bietet sich nun die Möglichkeit, die Konstruktion der D-Linien von Quadriken mit darstellend-geometrischen Methoden in Angriff zu nehmen, da sich die Kegelschnittsevolventen — auch bei nichteuklidischer Metrik — graphisch leicht und mit genügender Genauigkeit ermitteln lassen. Fig. 2 illustriert den Sachverhalt für das elliptische Paraboloid (8).

7. Die Tangentialebenen des Kegels Γ schneiden aus der Quadrik Φ ein System die Grenzquartik $q = \Gamma\Phi$ doppelt berührender *Kegelschnitte* aus. Diese Kegelschnitte k bilden zusammen mit den zu q gehörigen D-Linien l ein *konjugiertes Netz*, denn sie sind die Berührungskurven der aus den Punkten des Leitkegelschnittes c an Φ legbaren Tangentialzylinder.

Projizieren wir die Fläche *stereographisch* aus einem Nabelpunkt P auf eine zugehörige Kreisschnittebene π, so werden die Erzeugenden auf zwei

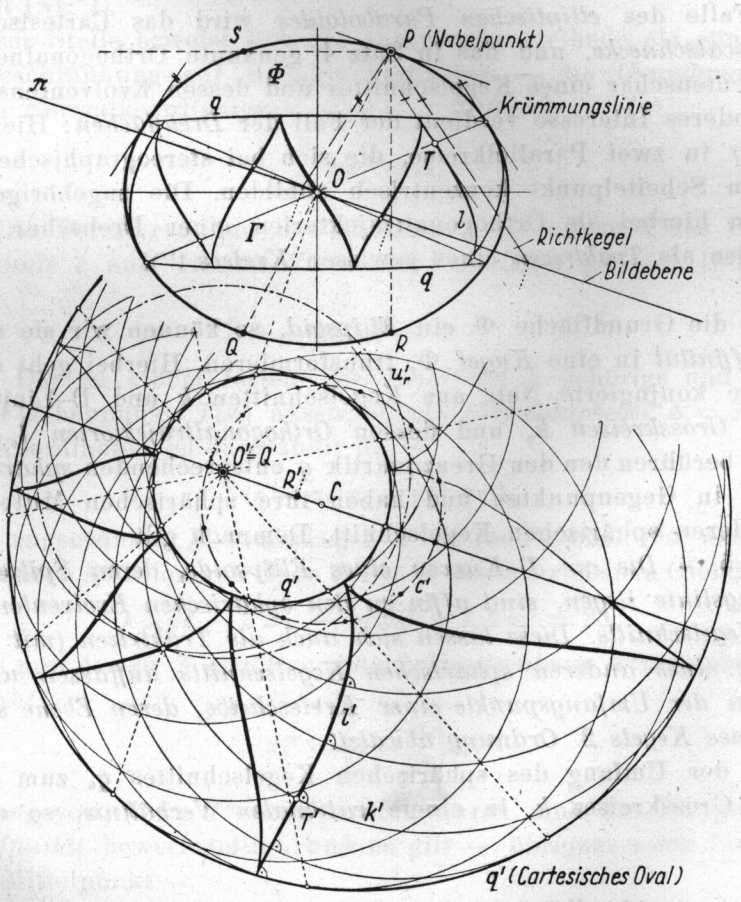

Fig. 3. – D-Linie eines Ellipsoids Φ. Zentralprojektion aus dem Nabelpunkt P auf die zyklische Durchmesserebene π: Orthogonaltrajektorie einer Schar von Kreisen k', die ein Cartesisches Oval q' doppelt berühren; diese Kreise schneiden den Kreis $\Phi\pi = u_r'$ (den «reellen Vertreter» von u') nach Gegenpunkten und haben ihre Mittelpunkte auf dem Bildkreis c' des Leitkegelschnittes.

Minimalstrahlenbüschel abgebildet und konjugierte Richtungen der Fläche erscheinen im Bild *normal*. Jeder ebene Schnitt bildet sich als *Kreis* ab und jede Krümmungslinie q hat als Projektion eine ebene Quartik mit absoluten Spitzen, also im allgemeinen ein *Cartesisches Oval* (9). Durch Betrachtung des vorhin genannten konjugierten Netzes erhalten wir dann den

SATZ 4. – *Die D-Kurven einer regulären Mittelpunktsquadrik Φ erscheinen bei Zentralprojektion aus einem Nabelpunkt der Fläche auf eine zugehörige Kreisschnittebene als Orthogonaltrajektorien einer Schar von doppelt berührenden Kreisen eines Cartesischen Ovals. Diese Kreise schneiden den Bildkreis der Fernkurve von Φ orthogonal und ihre Mittelpunkte liegen auf dem Bildkreis des Leitkegelschnittes.*

Damit haben wir eine zweite, bequem durchzuführende Möglichkeit, D-Linien von Quadriken zeichnerisch zu ermitteln (Fig. 3).

Im Falle des *elliptischen Paraboloides* wird das Cartesische Oval zu einer *Pascalschnecke*, und das in Satz 4 genannte Orthogonalnetz ist invers zur Tangentenschar eines Kegelschnittes und dessen Evolventensystem.

Besonderes Interesse verdient der Fall der *Drehflächen*: Hier zerfällt die Quartik q in zwei Parallelkreise, die sich bei stereographischer Projektion aus einem Scheitelpunkt konzentrisch abbilden. Die zugehörigen D-Linien erscheinen hierbei als Orthogonaltrajektorien einer Drehschar kongruenter Kreise, also als *Traktrizen* eines gewissen *Kreises* (10).

8. Ist die Grundfläche Φ ein *Ellipsoid*, so können wir sie mittels einer reellen *Affinität* in eine *Kugel* Φ_0 transformieren. Hierbei geht das in Nr. 7 betrachtete konjugierte Netz aus Kegelschnitten k und D-Linien l in ein Netz aus *Grosskreisen* k_0 und dessen *Orthogonaltrajektorien* l_0 über. Diese Kreise k_0 berühren den der Grenzquartik q entsprechenden *sphärischen Kegelschnitt* q_0 in Gegenpunkten und haben ihre sphärischen Mittelpunkte auf einem anderen sphärischen Kegelschnitt. Demnach gilt

SATZ 5. – *Die ∞^1 D-Kurven eines Ellipsoids, deren Spitzen auf einer Krümmungslinie liegen, sind affin zu den sphärischen Evolventen eines sphärischen Kegelschnitts. Diese lassen sich auch als Traktrizen (mit der Schlepplänge $\pi/2$) eines anderen sphärischen Kegelschnitts auffassen und sind die Rollbahnen der Umfangspunkte einer Kreisscheibe, deren Ebene sich auf dem Mantel eines Kegels 2. Ordnung abwälzt.*

Steht der Umfang des sphärischen Kegelschnittes q_0 zum Umfang des rollenden Grosskreises k_0 in einem *rationalen Verhältnis*, so ergeben sich

---

(9) Das System der Krümmungslinien bildet sich auf ein *Orthogonalsystem konfokaler Cartesischer Ovale* ab.

(10) Vgl. hierzu W. WUNDERLICH, *Über die Schleppkurven des Kreises*, « Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien », 156 (1948), 155-173.

lauter *geschlossene Rollkurven* (die jedoch nur dann algebraisch sind, wenn q_0 in ein Kreispaar zerfällt). Auf jeden Fall besteht aber ein *Schliessungstheorem:*

SATZ 6. - *Von den ∞^1 zu einer Krümmungslinie gehörigen D-Kurven eines Ellipsoids schliesst sich entweder jede oder keine.*

9. Die *Polare* oder *Planevolute* l^* einer affinen Böschungslinie l — also der Ort ihrer Schmiegkugelzentren — ist offenbar wiederum eine *affine Böschungslinie*, denn die Normalebenen von l berühren in der unendlich fernen Ebene den zum Leitkegelschnitt c von l bezüglich des absoluten Kreises polarreziproken Kegelschnitt c^*, der somit auch von allen Tangenten der Evolute l^* getroffen wird. In unserem Fall, wo l D-Linie einer Quadrik ist, lassen sich über l^* bemerkenswerte zusätzliche Aussagen machen, die darauf beruhen, dass hier jede Schmiegkugel auch Meusnierkugel der Trägerfläche ist (Nr. 1).

An dieser Stelle erweist sich die analytische Methode als günstiger. Sei — unter Beschränkung auf Mittelpunktsflächen — die *Grundquadrik* Φ in kartesischen Normalkoordinaten x_i $(i = 1, 2, 3)$ durch

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_i^2 = a \tag{1}$$

angesetzt. Die Fernkurve und der absolute Kreis spannen das Büschel der *Leitkegelschnitte* c auf, die den Fortschreitungsrichtungen der D-Kurven die Bedingung

$$\Sigma (\lambda - \alpha_i) dx_i^2 = 0 \tag{2}$$

auferlegen. Der zu einem festen Parameterwert λ gehörige und von einem beliebigen Flächenpunkt $T(x_i)$ ausstrahlende *Elementarkegel* $\Delta = Tc$ wird (in laufenden Koordinaten y_i) dargestellt durch

$$\Sigma (\lambda - \alpha_i)(x_i - y_i)^2 = 0. \tag{3}$$

Die T zugeordnete *Meusnierkugel* Σ ist im Büschel $\Phi\Delta$ enthalten und ergibt sich durch Addition von (3) zu der in y_i angeschriebenen Gleichung (1) mit

$$\lambda \Sigma y_i^2 - 2 \Sigma (\lambda - \alpha_i) x_i y_i + \lambda \Sigma x_i^2 = 2a, \tag{4}$$

woraus sich nun das zu T gehörige *Schmiegkugelzentrum* $T^*(x_i^*)$ ohne weiteres ablesen lässt:

$$x_i^* = \left(1 - \frac{\alpha_i}{\lambda}\right) x_i. \tag{5}$$

Der Übergang von T zu T^* wird mithin durch eine die Hauptachsen fest lassende *Affinität* bewerkstelligt, und es gilt — übrigens auch für Grundflächen ohne Mittelpunkt —

SATZ 7. - *Jede allgemeine D-Kurve einer Quadrik Φ und ihre Planevolute (Polare) sind affin aufeinander bezogen. Die Evolute ist daher ebenfalls affine Böschungslinie einer Quadrik Φ^*.*

Die *Evolute* l^* verläuft auf der zu Φ *affinen Quadrik* Φ^*, die zufolge (5) durch

$$\Sigma \frac{\alpha_i x_i^{*2}}{(\lambda - \alpha_i)^2} = \frac{a}{\lambda^2} \tag{6}$$

dargestellt wird, und genügt der (2) entsprechenden Differentialgleichung

$$\Sigma \frac{dx_i^{*2}}{\lambda - \alpha_i} = 0. \tag{7}$$

Die Kurven l^* sind demnach im allgemeinen keine D-Linien ihrer Trägerfläche Φ^*, da diese und die Tangentenrichtkegel (7) nicht notwendig konzyklisch ausfallen. Wohl trifft dies jedoch für *Drehflächen* ($\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$) zu, und zwar durch die Rotationssymmetrie bedingt, derzufolge l wie auch l^* *gewöhnliche Böschungslinien* sind (vgl. Nr. 4). Der affine Zusammenhang zwischen den Böschungslinien auf Drehquadriken und ihren Planevoluten wurde übrigens — von ganz anderem Gesichtspunkt aus — bereits von W. BLASCHKE festgestellt ([11]).

Zu erwähnen wären schliesslich die besonderen Parameterwerte $\lambda = 0$, α_i und ∞, für welche die Affinität (5) ausartet; die zugehörigen D-Linien sind der Reihe nach die geradlinigen *Erzeugenden*, die verschiedenen *Kreisschnitte* und die *Minimalkurven* der Fläche.

Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass sich als Umkehrung von Satz 7 zeigen lässt, dass es ausser den D-Linien der Quadriken überhaupt keine anderen Raumkurven gibt, deren Punkte mit den zugehörigen Schmiegkugelzentren durch eine Affinität verknüpft sind ([12]).

10. Der *Schmiegkugelradius* R ergibt sich zufolge (5) aus

$$R^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Sigma \alpha_i^2 x_i^2. \tag{8}$$

Für den *Zentralabstand* H der zugehörigen Tangentialebene gilt wiederum

$$H^2 = a^2 : \Sigma \alpha_i^2 x_i^2. \tag{9}$$

Damit hat man den

SATZ VON HARDY. – *Für alle Punkte einer D-Linie einer Mittelpunktsquadrik ist das Produkt aus Schmiegkugelradius und Zentralabstand der zugehörigen Tangentialebene konstant:* $RH = a/\lambda$.

([11]) W. BLASCHKE bewies a. a. O. ([7]), dass jede mit dem begleitenden Dreibein einer solchen Böschungslinie starr verbundene *Ebene* eine Torse einhüllt, deren Gratlinie eine zur ersten Kurve *affine* Böschungslinie gleicher Art ist.

([12]) W. WUNDERLICH, *Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken*, «Mh. Math.», 55, (1951), 76-81. – Eine synthetische Ableitung der Affinität (5) enthält der Bericht des Verfassers: *Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken*, «Mat. Tidsskr», 1951, 1-26.

Nun weiss man aber, dass H^4 der *Flächenkrümmung* K proportional ist, und so folgt zunächst unmittelbar für Mittelpunktsflächen — und nach einem Grenzübergang auch allgemeiner — der

SATZ VON ENNEPER. - *Für alle Punkte einer D-Linie einer regulären Quadrik ist der Radius der Schmiegkugel umgekehrt proportional zur 4. Wurzel aus dem Krümmungsmass der Fläche.*

11. Die Tangenten l^* der Evolute l^* sind die *Krümmungsachsen* der D-Linie l. In einer *Spitze* S von l fällt die Krümmungsachse mit der *Flächennormale* zusammen und die zugehörige Schmiegkugelmitte S^* stellt das eine *Hauptkrümmungszentrum* der Fläche Φ in S dar. Die Normalenfläche längs der von den Spitzen S erfüllten Krümmungslinie q berührt mithin die Quadrik Φ^*, und zwar längs derselben zu q affinen Quartik q^* wie die *Zentrafläche* von Φ.

Beachten wir überdies, dass die Flächen Φ und Φ^* auf Grund ihrer Gleichungen *polar* bezüglich der Quadrik

$$\Sigma \frac{\alpha_i x_i^2}{\lambda - \alpha_i} = \frac{a}{\lambda} \tag{10}$$

liegen, und dass diese zu Φ *konfokal* ist, so gelangen wir nebenbei zu dem

SATZ VON WAELSCH. - *Die Zentrafläche einer Quadrik wird von deren Polarreziproken bezüglich der zu ihr konfokalen Flächen eingehüllt* ([13]).

12. Abschliessend sei noch die analytische Auswertung von Satz 2 skizziert, die zwanglos zu einer Parameterdarstellung unserer D-Kurven führt. Wir beschränken uns dabei etwa auf den auch von A. PELL ([4]) behandelten Fall eines dreiachsigen *Ellipsoids*

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \qquad (a_1 > a_2 > a_3 > 0) \tag{11}$$

mit dem der D-Kurve vorgeschriebenen Tangentenrichtkegel

$$\Sigma \frac{dx_i^2}{a_i^2}(\lambda - a_i^2) = 0 \qquad (a_2^2 > \lambda > a_3^2). \tag{12}$$

Nach Einführung der bequemeren affinen Koordinaten $X_i = x_i/a_i$ (vgl. Nr. 8) und mit Benützung der Abkürzungen $(a_i^2 - \lambda) : (\lambda - a_3^2) = b_i^2$ sind die ∞^1 zum Parameterwert λ gehörigen D-Linien festgelegt durch

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0, \qquad b_1^2 dX_1^2 + b_2^2 dX_2^2 - dX_3^2 = 0, \tag{13}$$

([13]) E. WAELSCH, *Über das Normalensystem und die Zentrafläche der Flächen zweiter Ordnung, II. Mitt.*, « Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien », 97, (1888), 1-8.

wobei $b_1^2 > b_2^2$. Die Gleichung des Polarkegels Γ lautet

$$\frac{X_1^2}{b_1^2} + \frac{X_2^2}{b_2^2} - X_3^2 = 0. \tag{14}$$

Die als Bildebene π gewählte Ebene $X_3 = 1$ schneidet Γ nach dem abzuwikkelnden Kegelschnitt Γ'

$$\frac{X_1^2}{b_1^2} + \frac{X_2^2}{b_2^2} = 1 \quad \text{oder} \quad X_1 = b_1 \sin\varphi,\ X_2 = b_2 \cos\varphi, \tag{15}$$

wobei die in π herrschende Metrik durch den vom Asymptotenkegel des Ellipsoids herrührenden nullteiligen Masskegelschnitt $X_1^2 + X_2^2 + 1 = 0$ und das zugehörige (elliptische) Bogenelement

$$ds^2 = \frac{dX_1^2 + dX_2^2 + (X_2 dX_1 - X_1 dX_2)^2}{(X_1^2 + X_2^2 + 1)^2} \tag{16}$$

geregelt wird ([14]). Angewandt auf den Kegelschnitt (15) ergibt sich

$$ds^2 = \frac{b_1^2(1 + b_2^2) - (b_1^2 - b_2^2)\sin^2\varphi}{[(1 + b_2^2) + (b_1^2 - b_2^2)\sin^2\varphi]^2}\, d\varphi^2, \tag{17}$$

und damit für den Bogen

$$s = \frac{1 + b_1^2}{b_1\sqrt{1 + b_2^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + b_1^2 k^2 \sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \tag{18}$$

$$- \frac{1}{b_1\sqrt{1 + b_2^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} + C \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1^2(1 + b_2^2)}.$$

Die auftretenden elliptischen Integrale sind die LEGENDREschen Normalintegrale 3. Gattung $\Pi(\varphi, b_1^2 k^2, k)$ und 1. Gattung $F(\varphi, k)$. Der Wert der Konstanten C hängt von der Stelle ab, an der die Abwicklung beginnt.

Der ermittelte Bogen s ist nun auf der gegenläufig orientierten Kegelschnittstangente

$$X_1 = b_1(\sin\varphi - t\cos\varphi), \qquad X_2 = b_2(\cos\varphi + t\sin\varphi) \tag{19}$$

([14]) Mit Benützung des Symbols $(xy) = \Sigma\, a_{ik} x_i y_k$ $(a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 0, 1, \ldots, n)$ gilt für das zum Massgebilde $(xx) = 0$ gehörige Bogenelement

$$\pm (xx)^2 ds^2 = (xx)(dxdx) - (xdx)^2,$$

wobei den inhomogenen Koordinaten entsprechend $x_0 = 1$ und $dx_0 = 0$ zu nehmen ist.

aufzutragen. Hierzu ist ebenfalls das Längenelement (16) zu benützen, wobei in (19) φ fest und t veränderlich zu denken ist; man findet so

$$(20) \qquad s = \int_0^t \frac{W dt}{Pt^2 - 2Qt + R} = \operatorname{arctg} \frac{Pt - Q}{W} + \operatorname{arctg} \frac{Q}{W}$$

$$\text{mit } P = b_1^2 \cos^2 \varphi + b_2^2 \sin^2 \varphi,\ Q = (b_1^2 - b_2^2) \sin \varphi \cos \varphi,$$
$$R = b_1^2 \sin^2 \varphi + b_2^2 \cos^2 \varphi + 1,\ W^2 = PR - Q^2 = P + a^2 b^2,$$

und umgekehrt

$$(21) \qquad t = \frac{R}{Q + W \cot s}.$$

Einsetzung dieses Wertes in (19), wobei s aus (18) zu entnehmen wäre, führt auf die Parameterdarstellung der Kegelschnittsevolvente in der Bildebene.

Proportional hierzu können die Koordinaten des laufenden Punktes der *D-Linie* angesetzt werden:

$$(22) \qquad \begin{aligned} X_1 &= \rho b_1 [W \sin \varphi \cos s - (1 + b_2^2) \cos \varphi \sin s] \\ X_2 &= \rho b_2 [W \cos \varphi \cos s + (1 + b_1^2) \sin \varphi \sin s] \\ X_3 &= \rho [W \cos s + Q \sin s]. \end{aligned}$$

Gemäss (13) findet man für den Proportionalitätsfaktor

$$(23) \qquad \rho = 1/W\sqrt{R}$$

und hat damit nun die Darstellung der D-Linie in Abhängigkeit von einem Winkelparameter φ; der Bogen s ist als Funktion von φ durch (18) gegeben, die Bedeutung der eingeführten Abkürzungen ist in (20) festgehalten. Der Übergang zu den Originalabmessungen a_i und den ursprünglichen Koordinaten $x_i = a_i X_i$ liesse sich ohne weiteres vollziehen, brächte jedoch keinerlei Vorteile.

Nach dem vorgeführten Muster lässt sich auch jede andere Annahme für D-Kurven auf Quadriken analog und — im Gegensatz zu A. PELL — stets auf reellem Wege erledigen.

III. - Nichteuklidische D-Kurven auf Quadriken.

13. Einleitend wurde bereits auf die Möglichkeit hingewiesen, den Begriff der D-Linien auf nichteuklidische Räume auszudehnen. Dies soll nun unter Voraussetzung einer CAYLEY-KLEINschen Massbestimmung wieder für eine *Quadrik* als Grundfläche näher ausgeführt werden.

Zur Rechnung bedienen wir uns des besonders geeigneten Matrizenkalküls [15]. Sei — unter Verwendung einer symmetrischen Matrix $A = \tilde{A}$ —

$$\tilde{x}Ax = 0 \tag{24}$$

die Gleichung der (nicht ausgearteten) *Massfläche* Ω einer CAYLEY-KLEINschen Metrik, und analog

$$\tilde{x}Bx = 0 \tag{25}$$

die Gleichung der (nicht notwendig regulären) *Quadrik* Φ, deren D-Linien untersucht werden sollen. Ist $T(x_i)$ ein allgemeiner Punkt von Φ, dann wird seine Tangentialebene (in laufenden Koordinaten z_i) dargestellt durch

$$\tilde{z}Bx = 0, \tag{26}$$

und ihr absoluter Pol $U(y_i)$ ergibt sich aus $Ay = Bx$ mit

$$y = A^{-1}Bx. \tag{27}$$

Jede Φ in T berührende *Kugel* Σ hat ihren Mittelpunkt T^* auf der Flächennormale TU; seine Koordinaten x_i^* lassen sich daher aus x_i und y_i linear kombinieren:

$$x^* = \lambda x + \mu y. \tag{28}$$

Die absolute Polarebene σ von T^* — die «Zentralebene» von Σ — schreibt sich $\tilde{z}Ax^* = 0$, also

$$\tilde{z}Cx = 0 \quad \text{mit} \quad C = \lambda A + \mu B. \tag{29}$$

Die in dem von der Doppelebene σ und der absoluten Fläche Ω aufgespannten Büschel enthaltene Kugel Σ lässt sich dann ansetzen mit

$$(\tilde{z}Cx)^2 - \nu \cdot \tilde{z}Az = 0,$$

welche Gleichung auch für $z = x$ bestehen muss, da Σ den Punkt T enthält. Mit Rücksicht auf (29) und (25) ergibt sich $\nu = \lambda^2 \tilde{x}Ax$ und damit als endgültige Gleichung von Σ

$$(\tilde{z}Cx)^2 - \lambda^2 \cdot \tilde{x}Ax \cdot \tilde{z}Az = 0. \tag{30}$$

---

[15] Vgl. z. B. L. BIEBERBACH, *Analytische Geometrie*, (Teubner, 1930), oder J. G. SEMPLE-L. ROTH, *Algebraic geometry*, (Oxford, 1949). - Die homogenen Koordinaten x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) eines Raumpunktes werden stets zu einer *Spaltenmatrix* x zusammengefasst. Bezeichnet $\tilde{x}$ die durch Stürzung daraus hervorgehende *Zeilenmatrix*, so bedeutet $\tilde{x}y = x\tilde{y}$ das innere Produkt $\Sigma x_i y_i$. Ist A eine vierzeilige *quadratische Matrix* mit den Elementen a_{ik}, so ist unter $Ax = y$ die Spaltenmatrix mit den Elementen $y_i = \Sigma a_{ik}x_k$ zu verstehen, unter $\tilde{x}\tilde{A}$ hingegen die Zeilenmatrix $\tilde{y}$. Die Produktmatrix $C = AB$ besteht aus den Elementen $c_{ik} = \Sigma a_{ij}b_{jk}$ und es gilt die Stürzungsregel $\tilde{C} = \tilde{B}\tilde{A}$. Für sinnvolle Produkte besteht das assoziative Gesetz.

Die Schnittquartik $\Sigma\Phi = h$, die in T einen Doppelpunkt besitzt, wird aus T durch einen *Kegel 2. Ordnung* Δ projiziert. Dieser gehört dem Büschel $\Sigma\Phi$ an, lässt sich also als Linearkombination von (30) und (25) ansetzen:

$$(\tilde{z}Cx)^2 - \lambda^2 \cdot \tilde{x}Ax \cdot \tilde{z}Az - \rho \cdot \tilde{z}Bz = 0;$$

der Wert von ρ errechnet sich aus der Bedingung, dass die Polarebene des Punktes T, dargestellt durch

$$\tilde{x}Cx \cdot \tilde{z}Cx - \lambda^2 \cdot \tilde{x}Ax \cdot \tilde{z}Ax - \rho\tilde{z}Bx \equiv (\lambda\mu\tilde{x}Ax - \rho)\tilde{z}Bx = 0,$$

unbestimmt werden muss, mit $\rho = \lambda\mu\tilde{x}Ax$. Die Gleichung des Kegels Δ lautet daher

$$(\tilde{z}Cx)^2 - \lambda \cdot \tilde{x}Ax \cdot \tilde{z}Cz = 0. \tag{31}$$

Wir ersehen daraus, dass dieser Kegel einem *Berührungsbüschel* mit der Doppelebene σ (29) angehört, das auch die Fläche Ψ

$$\tilde{z}Cz \equiv \lambda\tilde{z}Az + \mu\tilde{z}Bz = 0 \tag{32}$$

enthält. Da σ mit der Polarebene von T bezüglich Ψ identisch ist, ist Δ der aus T an Ψ legbare *Berührungskegel*. Die « *Leitquadrik* » Ψ gehört zufolge (32) dem *konzyklischen Büschel* $\Phi\Omega$ an.

14. Diesen wichtigen Sachverhalt kann man auch rein synthetisch einsehen. Sei Ψ eine beliebige, mit der Grundfläche Φ konzyklische Quadrik und u die beiden Flächen gemeinsame (absolute) Quartik. Wir legen aus irgend einem allgemeinen Punkt T von Φ den Tangentialkegel Δ an Ψ; der Berührungskegelschnitt v hat seine vier absoluten Punkte V auf u (Fig. 4). Schneiden wir die beiden einander länge v berührenden Flächen Ψ und Δ

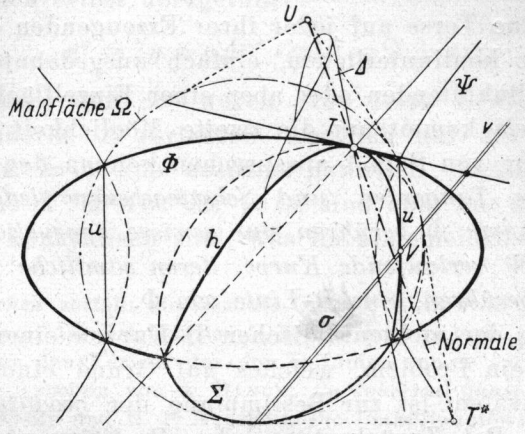

Fig. 4. - Nichteuklidische Berührungskugel einer Quadrik Φ. Die Schnittkurve h wird aus dem Berührungspunkt T durch einen Kegel 2. Grades Δ projiziert, der einer zu Φ konzyklischen Quadrik Ψ umschrieben ist.

mit der Fläche Φ, so erhalten wir zwei einander berührende Schnittlinien, und zwar die absolute Kurve u und eine Quartik h, die in T einen Doppelpunkt besitzt; die Berührung zwischen h und u findet in den genannten vier absoluten Punkten V von v statt.

Durch eine Kurve 4. Ordnung, welche wie h die Massfläche Ω in vier einer Ebene σ angehörenden Punkten V berührt, lässt sich aber immer eine *Kugel* Σ legen: Es ist dies jene dem durch h bestimmten Büschel angehörende Fläche, welche den Kegelschnitt $\Omega\sigma$ enthält, denn diese wird Ω nicht nur in den Punkten V, sondern in allen Punkten des genannten Kegelschnittes berühren. Diese Kugel tangiert — wie alle nichtsingulären Büschelflächen — die Grundfläche Φ im Punkt T, womit zunächst die Umkehrung des zu beweisenden Sachverhaltes bestätigt ist. Da sich für die anderen ∞^1 zu Φ konzyklischen Flächen Ψ jedoch alle übrigen Berührungskugeln Σ des Flächenelementes in T ergeben, kann der Beweis als abgeschlossen gelten.

Die *Zentralebenen* σ der ∞^1 zu einem festen Punkt T gehörigen Berührungskugeln erfüllen als Polarebenen der das Büschel $\Omega\Phi$ bildenden Flächen Ψ selbst ein *Büschel*; dessen Achse liegt in der Tangentialebene von T und ist die reziproke Polare der Flächennormale bezüglich Φ.

15. Nunmehr schliessen wir ähnlich weiter wie im euklidischen Fall (Nr. 3): Sei T ein laufender Punkt und t die zugehörige Tangente einer nichteuklidischen *D-Linie* l der Quadrik Φ; die zu T gehörige, Φ definitionsgemäss berührende Schmiegkugel Σ von l schneidet Φ nach einer Quartik h, die aus T durch einen Kegel 2. Ordnung Δ projiziert wird. Die Schmiegebene τ von l gilt auch für h und berührt daher nicht nur die Tangentenfläche Λ von l, sondern auch den Kegel Δ längs t, woraus folgt, dass Λ die mit Δ verbundene, zu Φ konzyklische Quadrik Ψ in einem Punkt von t berührt.

Besitzt aber eine Torse auf jeder ihrer Erzeugenden eine Berührung mit einer Fläche einer kontinuierlichen, einfach ausgedehnten *Schar*, dann ist sie entweder der Einhüllenden oder aber einer Einzelfläche umschrieben. Im Falle eines *Büschels* kommt nur die zweite Möglichkeit in Betracht, sodass wir als Übertragung von Satz 1 aussprechen können den

SATZ 8. – *Die Tangenten (und Schmiegebenen) jeder nichteuklidischen D-Kurve einer Quadrik Φ berühren eine gewisse konzykliche Quadrik. Umgekehrt ist jede auf Φ verlaufende Kurve, deren sämtliche Tangenten eine konzyklische Quadrik berühren, eine D-Linie von Φ.*

Die Ermittlung der nichteuklidischen D-Kurven einer Quadrik ist damit zurückgeführt auf ein Problem, welches auf Grund eines bekannten Satzes von CHASLES äquivalent ist zur Bestimmung der *geodätischen Linien* einer Fläche 2. Grades. Bei Zurücksetzung der Realitätsverhältnisse kann hier sogar ein *kollinearer* Zusammenhang behauptet werden. Die Rechnung wird jedenfalls auf hyperelliptische Integrale führen und sich nur bei besonderer

Lage der Grundfläche zur absoluten Quadrik vereinfachen, also beispielsweise für Drehflächen ([16]). Diese Dinge sollen hier jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Von Bedeutung für den Verlauf der D-Kurven einer Quadrik Φ, die zu einer bestimmten Leitfläche Ψ gehören, ist vor allem die Φ uud Ψ gemeinsam umschriebene *Torse 4. Klasse* und ihre *Berührungslinie* q mit Φ. Es ist dies eine Quartik, die, falls sie reell ist, das Realitätsgebiet der betreffenden Schar von D-Linien abgrenzt; dieselben setzen auf q mit Spitzen auf. Die Erzeugenden der Torse geben die Spitzentangenten ab, und da diese einerseits Hauptkrümmungsrichtungen anzeigen, anderseits zu den Tangenten von q konjugiert sind, ist wie im euklidischen Fall q als *Krümmungslinie* von Φ zu erkennen. - Das System der D-Linien besitzt ferner die absolute Quartik u als Einhüllende; sie wird von den D-Linien berührt, und fungiert, falls sie reell ist, ebenfalls als Realitätsgrenze.

16. Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Punkten T einer D-Linie und den zugehörigen *Schmiegkugelzentren* T^* lässt sich mit Hilfe der Entwicklungen aus Nr. 13 sofort beantworten: Aus den Gleichungen (27) bis (29) folgt die Beziehung

$$x^* = (\lambda + \mu A^{-1}B)x = A^{-1}Cx, \tag{33}$$

wobei zufolge Satz 8 $\lambda : \mu = \text{const}$. Es gilt mithin

SATZ 9. - *Die Punkte einer nichteuklidischen D-Kurve einer Quadrik und die zugehörigen Schmiegkugelmitten entsprechen einander in einer Kollineation, die das Hauptachsentetraeder der Fläche festlässt.*

Jeder Punkt $P(y_i)$ nämlich, dessen Polarebenen bezüglich der Grundfläche und der absoluten Quadrik zusammenfallen ($By = \sigma Ay$), wird durch die Kollineation (33) in sich selbst übergeführt:

$$y^* = \lambda y + \mu A^{-1} \cdot \sigma Ay = (\lambda + \mu\sigma)y$$

Die *Planevoluten* der ∞^1 durch eine feste Leitfläche Ψ definierten D-Linien der Quadrik Φ verlaufen sämtlich auf der kollinearen Fläche Φ^* ($\tilde{x}^* AC^{-1}BC^{-1}Ax^* = 0$). Sie besitzen natürlich ebenfalls eine gemeinsame Tangentenleitfläche Ψ^* ($\tilde{x}^* AC^{-1}Ax^* = 0$), sind aber nur dann selbst D-Linien, wenn Φ^* und Ψ^* konzyklisch sind, was im allgemeinen nicht zutreffen wird.

([16]) Bei *Drehflächen* zerfällt die absolute Quartik u in zwei Kegelschnitte; ist einer davon nullteilig, so kann das Flächenpaar Φ, Ψ kollinear in zwei euklidische *Kugeln* übergeführt werden. Über den Verlauf der den D-Linien von Φ entsprechenden sphärischen Kurven handeln die Arbeiten von A. RANUM, *On spherical quasi-spherical curves*, « Ann. di mat. », 7, (1929), 283-316 und E. J. NYSTRÖM, *Die Umhüllungstorsen zweier Kugeln*, « Soc. Sci. Fennica, Comm. phys. math. », 9, (1936), 1-15. Dass diese Kurven mit den *sphärischen Bündelloxodromen* identisch sind, hat der Verfasser gezeigt: *Über die Torsen, deren Erzeugendenzwei Kugeln berühren*, « Soc. Sci. Fenn. », 14, (1949), 1-16.

Fragen wir nun, unter welchen Umständen dies doch der Fall ist, so haben wir zum Ausdruck zu bringen, dass Φ^*, Ψ^* und Ω einem Büschel angehören, oder — nach Rücktransformation mittels der regulär vorausgesetzten Kollineation (33) — dass die Matrizen B, C und $CA^{-1}C$ linear abhängig sind. Vom komplexen Standpunkt aus bedeutet es keine Einschränkung, sondern lediglich eine zweckmässige Koordinatenwahl, wenn wir die (reguläre) Matrix A mit der Einheitsmatrix I identifizieren; es bleibt dann die lineare Abhängigkeit der Matrizen B, C und C^2 oder, mit Rücksicht auf (29), jene von I, B und B^2 zu deuten. Ist B regulär, dann liegt auch Abhängigkeit zwischen I, B und B^{-1} vor, d. h. die Flächen Ω, Φ und die absolute Polare von Φ gehören einem (zu sich selbst dualen) *Büschel* an: Da der triviale Fall des Berührungsbüschels (Φ = Kugel) ausser Betracht bleiben kann, bleibt nur der Fall, dass die Flächen ein *gemeinsames Erzeugendenvierseit* besitzen (Φ = CLIFFORDsche Fläche).

Jede *Cliffordquadrik* ist invariant gegenüber einer zweigliedrigen kontinuierlichen Bewegungsgruppe und trägt dementsprechend ∞^2 nichteuklidische «*Schraublinien*», die die Bahnkurven der eingliedrigen Untergruppen darstellen ([17]); diese Schraublinien sind natürlich mit den *D-Kurven* der Fläche identisch, und es liegt auf der Hand, dass die zugehörigen Evoluten gleichfalls Schraublinien sind und daher ebenfalls D-Linien ihrer Trägerflächen abgeben. – Der noch offengebliebene Fall einfachsingulärer Flächen (Rg $B = 3$) führt zu keinem Ergebnis, wie eine nähere Betrachtung lehrt.

Wie in Euklidischen gilt ferner stets, dass die reziproken Polaren der Quadrik Φ bezüglich der zu ihr konfokalen Flächen identisch sind mit den ∞^1 ihr zugeordneten Flächen Φ^*, und dass diese die (nichteuklidische) *Zentrafläche* von Φ einhüllen (vgl. Nr. 11).

17. Nicht ohne Interesse ist die duale Übertragung der hier durchgeführten Betrachtungen. Polarisiert man die konzyklischen Flächen 2. Ordnung Φ, Ψ an der Massfläche Ω, so erhält man zwei *konfokale Flächen 2. Klasse* $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$. Das Ψ berührende Tangentensystem einer auf Φ verlaufenden D-Linie l wird in die Erzeugendenschar einer $\overline{\Phi}$ umschriebenen *Torse* $\overline{\Lambda}$ verwandelt, die sich mit ihrer Gratlinie $\bar{k}$ auf $\overline{\Psi}$ stützt: $\bar{k}$ ist demnach eine *geodätische Linie* von $\overline{\Psi}$.

Jede Schmiegkugel Σ von l wird in eine Kugel $\overline{\Sigma}$ transformiert, die vier benachbarte Ebenen der Torse $\overline{\Lambda}$ berührt und auch kurz deren «*Schmiegkugel*» genannt werden mag. Die ∞^1 Schmiegkugeln von $\overline{\Lambda}$ berühren die Torse in

([17]) Diese nichteuklidischen Schraubungen wurden eingehend studiert von K. STRUBECKER, *Über die Schraubungen des elliptischen Raumes*, «Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien», 139, (1930), 421-450, und: *Über nichteuklidische Schraubungen*, «Mh. Math. Phys.», 38, (1931), 63-84. Vgl. auch W. WUNDERLICH, *Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen*, «Mh. Math. Phys.», 44, (1936), 249-279.

den Punkten jener Kurve $\bar{l}$, längs welcher sie der Quadrik $\bar{\Phi}$ umschrieben ist; $\bar{l}$ ist kollinear zur D-Linie l und konjugiert zu dem durch die Leitfläche $\bar{\Psi}$ auf $\bar{\Phi}$ definierten System von Geodätischen.

Nennt man mit W. BLASCHKE «*L-Torsen*» einer Fläche jene ihr umschriebenen abwickelbaren Flächen, deren Schmiegkugeln die Grundfläche berühren — es handelt sich offensichtlich um einen für die LAGUERREsche Geometrie interessanten Begriff ([18]) — so gilt nach dem Gesagten (dual zu Satz 8)

SATZ 10. – *Die L-Torsen einer Quadrik sind die Tangentenflächen geodätischer Linien auf den konfokalen Quadriken.*

Die in diesem Satz enthaltene Eigenschaft der geodätischen Linien auf den Flächen 2. Grades scheint zwar auch im Euklidischen noch nicht ausgesprochen worden zu sein, lässt sich aber mit Hilfe der Fokaltheorie unschwer direkt beweisen ([19]). Dass übrigens der zunächst im nichteuklidischen Raum abgeleitete Satz 10 auch im euklidischen Rahmen richtig bleibt, ist durch einen geeigneten Grenzübergang sofort sicherzustellen.

Der Ort der ∞^1 *Schmiegkugelzentren* einer Torse ist die Gratlinie der von ihren Normalebenen eingehüllten Torse, also der rektifizierenden Torse ihrer eigenen Gratlinie. Der Ort der Schmiegkugelmitten der vorliegenden Torse $\bar{\Lambda}$ ist daher die Gratlinie jener Torse, die der Quadrik $\bar{\Psi}$ längs der Geodätischen k angeschrieben ist: Da sich diese Gratlinie durch Polarisation von $\bar{\Lambda}$ an $\bar{\Psi}$ ergibt, folgt, dass sie ebenfalls zur *D-Linie* l (und zur Berührungskurve $\bar{l}$ von $\bar{\Lambda}$) *kollinear* ist.

18. Abschliessend sei noch an die auf G. DARBOUX zurückgehende Transformation erinnert, die das CAYLEY-KLEINsche *projektive Modell* der nichteuklidischen Geometrie in das *konforme Modell* von POINCARÉ überführt, in welchem bekanntlich Kugeln und Kreise ihre euklidische Gestalt haben und die euklidische Winkelmetrik herrscht. Diese einzweideutige, quadratische Punkttransformation ordnet jedem zu einer festen (euklidischen) Kugel Ω inversen Punktepaar P_1, P_2 jenen Punkt P zu, der zum Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 bezüglich Ω invers liegt ([20]). Beschreibt P eine Ebene σ, so durchläuft das Paar P_1, P_2 jene Orthogonalkugel $\sigma_{1,2}$ von Ω, die den Fixkreis $\Omega\alpha$ enthält; eine beliebige Kugel Σ_1 (uud ihre inverse Σ_2) entspricht jedoch einer Drehfläche 2. Ordnung Σ, die Ω längs eines Kreises berührt, also einer nichteuklidischen Kugel im Sinne jener CAYLEY-KLEINschen Metrik, die sich auf die absolute Fläche Ω gründet.

([18]) W. BLASCHKE, *Über die Geometrie von Laguerre III*, «Abh. Math. Sem. Hamburg», 4, (1926), 1-12.

([19]) W. WUNDERLICH, *Über die L-Torsen der Flächen 2. Klasse*, «Arch. Math.», *im Druck.*

([20]) G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires*, (Paris, 1873).

Diese *Darbouxtransformation* $P \rightarrow P_{1,2}$ führt nun die Flächen 2. Ordnung in jene ausgiebig untersuchten Flächen 4. Ordnung über, die den absoluten Kugelkreis als Doppelkurve enthalten und von DARBOUX *Zykliden* genannt wurden. Es liegt auf der Hand, dass dabei die vorhin betrachteten nichteuklidischen D-Kurven der Quadriken in die *euklidischen D-Linien der Zykliden* übergehen, womit sich ein bequemer Zugang zur Behandlung der letzteren eröffnet. Gewisse Sätze lassen sich unmittelbar übertragen, beispielsweise die Tatsache, dass sich die Spitzen der D-Linien auf die Krümmungslinien verteilen, oder das Schliessungstheorem. Ferner ist klar, dass die rechnerische Bestimmung der D-Kurven einer allgemeinen Zyklide auf gewisse hyperelliptische Integrale hinausläuft, wie sie bei der Ermittlung der geodätischen Linien auf Quadriken auftreten ([21]).

Im besonderen gehen die DUPINschen *Zykliden* — darunter der *Torus* — vermöge der DARBOUXschen Transformation aus den in Nr. 16 erwähnten *Cliffordflächen* hervor. Ihre D-Kurven entsprechen daher den nichteuklidischen Schraublinien auf den Cliffordflächen und schneiden auf Grund der « Winkeltreue » dieses Zusammenhanges die (vier) Kreissysteme der DUPINschen Zykliden jeweils unter festen Winkeln: Sie sind demnach im allgemeinen invers zu den bekannten *Torusloxodromen* ([22]), im besonderen mit ihnen identisch.

Diese Dinge sollen hier nicht weiter verfolgt werden, um den Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht zu überschreiten. Der Verfasser hofft jedoch, bei anderer Gelegenheit auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

([21]) G. DARBOUX selbst hat a. a. O. ([1]) die D-Linien der Zykliden unter Benützung pentasphärischer Koordinaten durch hyperelliptische Integrale dargestellt. - Auf die D-Linien einer sehr speziellen Zyklide stiess der Verfasser bei seiner Untersuchung *Über die polykonischen Loxodromen*, « Ann. di mat. », 29, (1949), 177-186.

([22]) K. STRUBECKER, *Zur sphärischen Raumgeometrie*, « Mh. Math. Phys. », 38, (1931), 275-290.