

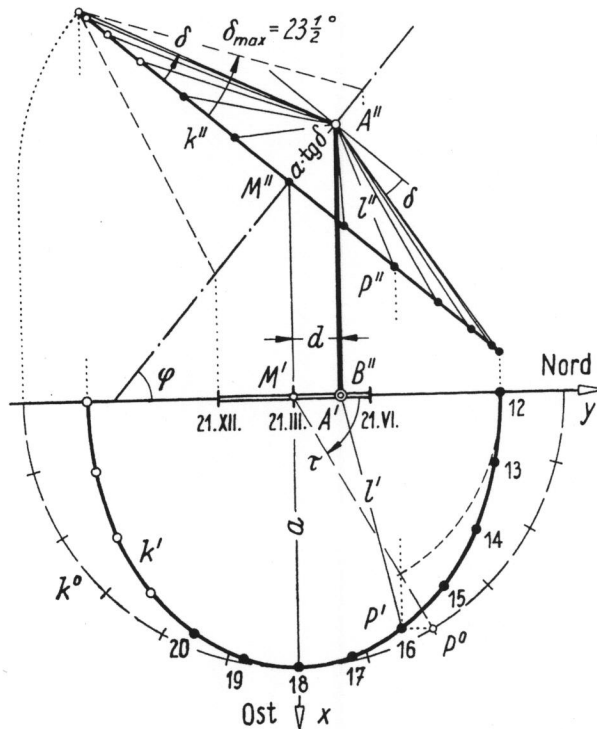
Sonderabdruck
ELEMENTE DER MATHEMATIK

VERLAG BIRKHÄUSER, BASEL/SCHWEIZ

Band VII/5, 1952

Zur analemmatischen Sonnenuhr

H. STOHLER beschrieb und erläuterte unlängst (El. Math. 7, 61–64 [1952]) eine höchst originelle «analemmatische» *Horizontalsonnenuhr* mit lotrechtem Zeiger, wobei er bemerkte, dass eine einfache und durchsichtige Erklärung dieser Uhr bislang zu vermissen sei. Seine eigene, analytische Ableitung ist wohl nicht schwierig, setzt aber doch gewisse Kenntnisse der sphärischen Trigonometrie voraus und stellt letzten Endes bloss die



Verifikation eines Sachverhalts dar, dessen geometrischer Kern verborgen bleibt. Es sei daher gestattet, eine rein geometrische Darstellung kurz vorzuführen, die an Einfachheit und Durchsichtigkeit wohl kaum etwas zu wünschen übriglassen dürfte.

Das Wesen der genannten Sonnenuhr besteht darin, dass der *Standpunkt* des lotrechten Zeigerstabes in bestimmter Weise vom *Datum* abhängig gemacht wird, damit sein auf die Grundebene fallender Schatten auf einem *unveränderlichen Kranz von Stundenmarken* während des ganzen Jahres die richtige Tageszeit abzulesen gestatte.

Sei also *AB* ein *lotrechter Stab*. Sein *Schlagschatten* auf die den Basispunkt *B* enthaltende Horizontalebene wird von dem durch das freie Ende gehenden *Lichtstrahl* (Sonnenstrahl) *l* bestimmt und deckt sich mit dessen *Grundriss l'*. Dieser Lichtstrahl überstreicht – für einen irdischen Beobachter – im Verlauf eines Tages mit konstanter Geschwindigkeit einen gewissen von *A* ausstrahlenden *Drehkegel*, dessen Achse die Richtung der Erdachse hat, also unter dem Breitenwinkel φ des Standortes gegen Norden ansteigt und dessen Öffnungswinkel $180^\circ - 2\delta$ beträgt, wenn δ die Deklination der Sonne bezeichnet (Figur). Ein bestimmter *Punkt P* des Lichtstrahls *l* beschreibt

bei der Drehung um die Kegelachse PM einen *Parallelskreis* k , auf dem seine Stundenlagen die Ecken eines regelmässigen 24-Ecks bilden. Die *Grundrisse* dieser Stundenlagen können nach dem eingangs Gesagten als *Stundenmarken* für den Stabschatten dienen, allerdings zunächst nur während des einen Tages.

Diese Stundenmarken P' bilden ein zu dem regulären 24-Eck affines und sind nach den Regeln der darstellenden Geometrie – etwa mittels einer Umklappung oder Paralleldrehung k° von k – leicht zu konstruieren. Sie liegen auf einer *Ellipse* k' , dem Grundriss des Kreises k ; der Radius a von k gibt gleichzeitig die grosse Halbachse der Ellipse ab, während die kleine Halbachse die Länge $b = a \sin \varphi$ hat. Die kleine Ellipsenachse weist nach Norden und geht durch den Fusspunkt B des Zeigerstabes. Die Zeitmarken lassen sich koordinatenmässig unter Benützung des (vom Mittagspunkt aus gezählten) Stundenwinkels τ durch

$$x = a \sin \tau, \quad y = b \cos \tau \quad \text{mit} \quad b = a \sin \varphi \quad (1)$$

festlegen, wobei x nach Osten und y nach Norden positiv orientiert sind.

Denkt man sich die geschilderte Konstruktion für andere Deklinationswerte δ , jedoch unter Beibehaltung des Kreisradius a wiederholt, so erhält man offensichtlich lauter kongruente und gleichgestellte Ellipsen mit *kongruenten Markenpolygonen*. Es liegt daher nahe, diese durch Verschiebung in Nord-Süd-Richtung zur Deckung zu bringen: Dann muss aber der Zeigerstab von Tag zu Tag einen neuen Standort haben, und zwar hat er, wie aus der Figur abzulesen ist, jeweils in der Entfernung

$$d = a \operatorname{tg} \delta \cos \varphi \quad (2)$$

nördlich vom Ellipsenzentrum zu stehen. Die Konstruktion der entsprechenden *Kalenderskala* geht aus der Figur wohl zur Genüge hervor. Dass hierbei viele der nur zu Erklärungszwecken aufgenommenen *Linien* entbehrlich sind, liegt auf der Hand; auch die Ermittlung der Stundenskala kann mittels der Ellipsenkonstruktion von PROKLUS noch rationalisiert werden.

Abschliessend sei bemerkt, dass sich die geometrischen Überlegungen ohne weiteres auch auf eine Zifferblattebene beliebiger Stellung und einen Zeigerstab beliebiger Richtung übertragen lassen: An Stelle des Grundrisses hat dann eben die Parallelprojektion in Zeigerrichtung auf die Ziffernebene zu treten. W. WUNDERLICH, Wien.