

Geometrische Grundlagen für das Fräsen von Schraubnuten I.

Von W. Wunderlich, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. In diesem ersten Teil werden zeichnerische und rechnerische Verfahren zur Ermittlung von Fräserprofilen für die Erzeugung von Schraubnuten einer gewünschten Form auseinandergesetzt. Als Anwendungsbeispiel wird ein im Prinzip zur Herstellung von Flachgewindeflanken geeigneter Scheibenfräser entwickelt.

Summary. In this first part the author explains graphical and numerical methods concerning the construction of the profiles of form cutters fit for milling of helical grooves of a fixed form. The methods are then illustrated by the example of a side-milling cutter, appropriate for shaping the sides of a flat thread.

Résumé. Dans cette première partie l'auteur explique des méthodes graphiques et numériques, concernant la construction de fraises pour l'usinage de rainures hélicoïdales d'une forme prescrite. Ces méthodes sont appliquées à l'étude d'une fraise en disque, propre à l'usinage de vis à filet carré.

Bei der Herstellung einer Schraubnut — fälschlich oft als „Spiralnute“ bezeichnet — mittels eines Scheiben- oder Fingerfräasers liegt in jedem Augenblick folgende geometrische Situation vor: Die die Nut repräsentierende Schraubfläche Φ und jene Drehfläche Ψ , die von den Schneidkanten des rotierenden Fräasers überstrichen wird, berühren einander längs einer gewissen Linie q , die die Grenze der bis zu diesem Zeitpunkt erzeugten Nutenfläche angibt. Diese im allgemeinen krumme Linie q , Eingriffslinie oder Charakteristik genannt, spielt für alle theoretischen Untersuchungen dieses Fragenkreises eine entscheidende Rolle.

Die wichtige Aufgabe der Werkzeugtechnik, die zur Herstellung einer Schraubnut von bestimmter, vorgeschriebener Gestalt geeigneten Fräserformen zu ermitteln, ist demnach ein vorwiegend geometrisches Problem: Es handelt sich darum, zu einer gegebenen Schraubfläche Φ eine längs einer Linie berührende Drehfläche Ψ zu finden, deren Achse vorher passend anzunehmen ist.

Diese häufig auftretende Aufgabe ist nicht ganz einfach und bereitet daher dem Praktiker manche Schwierigkeiten, wiewohl die dabei obwaltenden geometrischen Verhältnisse wiederholt gekennzeichnet worden sind; erstmalig anscheinend durch E. Stübler^{1, 2}, im Anschluß daran in dem bekannten Lehrbuch der darstellenden Geometrie von Th. Schmid³ und später neuerlich durch O. Baier⁴. Öfters festgestellte Unklarheiten bewogen nun den Verfasser, dieses Problem hiermit nochmals zu behandeln und in einer der Denkweise und dem Anschauungsbedürfnis des Ingenieurs entgegenkommenden, ausführlichen und elementaren Weise darzulegen. Zunächst werden in voller Allgemeinheit die für alle Vorarbeiten notwendigen zeichnerischen Verfahren auseinandergesetzt, die eine interessante Anwendung der darstellenden Geometrie bieten. Anschließend wird eine rechnerische Methode entwickelt, die zur Steigerung der Genauigkeit eingesetzt werden kann, sobald einmal über die Lage der Fräserachse endgültig entschieden ist. Als Anwendungsbeispiel wird schließlich ein zur Herstellung von flachgängigen Gewindenuten prinzipiell geeigneter Scheibenfräser konstruiert und durchgerechnet. Eine kurze Kennzeichnung

¹ E. Stübler: Das Fräsen von Schraubengewinden. Z. Math. Phys. 57, 271—279 (1909).

² E. Stübler: Geometrische Probleme bei der Verwendung von Schraubenflächen in der Technik. Z. Math. Phys. 60, 244—274 (1912).

³ Th. Schmid: Darstellende Geometrie, II. Bd., S. 281ff. (Sammlung Schubert 66. Berlin und Leipzig, 1921.)

⁴ O. Baier: Konstruktion eines Fräasers, der eine gegebene Schraubenfläche erzeugt. Z. angew. Math. Mechan. 14, 248—250 (1934).

der bei spezieller Fräserlage eintretenden Besonderheiten beschließt diesen I. Teil. — In einem später folgenden II. Teil soll dann die umgekehrte Aufgabe erörtert werden, die Ermittlung der von einem vorliegenden Fräser erzeugbaren Schraubnuten betreffend.

1. Zeichnerische Verfahren.

Die die Schraubnut darstellende Schraubfläche Φ sei durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt: Durch die Schraubachse a , die Ganghöhe H oder besser

den Schraubparameter $p = H/2\pi$, und schließlich durch eine beliebige, auf der Fläche verlaufende „Erzeugende“ e . Von der Fräserfläche Ψ sei die Achse b gegeben; schneidet dieselbe die Schraubachse a unter rechtem Winkel, so handelt es sich um einen sogenannten „Fingerfräser“, sonst — also vor allem bei windschiefer Lage — im allgemeinen um einen „Scheibenfräser“.

Um die zur Achse b gehörige, die Schraubfläche Φ längs einer Linie berührende Drehfläche Ψ zu konstruieren, sind im wesentlichen zwei Methoden anwendbar. In beiden Fällen wird die Aufstellung am besten so vorgenommen, daß die Schraubachse a zur Grundrißebene normal und die Fräserachse b zur Aufrißebene parallel ist.

A. Parallelkreisverfahren (Abb. 1). Man lege eine Serie von ebenen Schnitten normal zur Fräserachse b . Jede solche Ebene $\sigma \perp b$ wird die Schraubfläche Φ nach einer) (im allgemeinen transzendenten Kurve k und die Drehfläche Ψ nach einem Parallelkreis l schneiden, die einander in einem Punkt Q der Eingriffslinie q berühren müssen. Hat man also die Schnittlinie $k = \sigma \Phi$ sorgfältig in einem Seitenriß parallel zu σ gezeichnet, dann kann dort auch der Parallelkreis l um den bekannten Mittelpunkt $M = \sigma b$ berührend an k eingetragen werden. Der Berührungspunkt Q wird dabei zwar mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sein, die sich jedoch nicht auf den Parallelkreisradius r und den zugehörigen Hauptmeridianpunkt R des Fräfers auswirkt. — Es ist als besonderer Vorteil des Parallelkreisverfahrens zu werten, daß allfällige „Unterschnitte“ unmittelbar in dem verwendeten Seitenriß sichtbar werden, indem dann der Fräserkreis l den Kurvenbogen k an irgend einer Stelle durchsetzt. Einem solchen, unbedingt zu vermeidenden Vorkommnis muß durch Verlegung der Fräserachse begegnet werden.

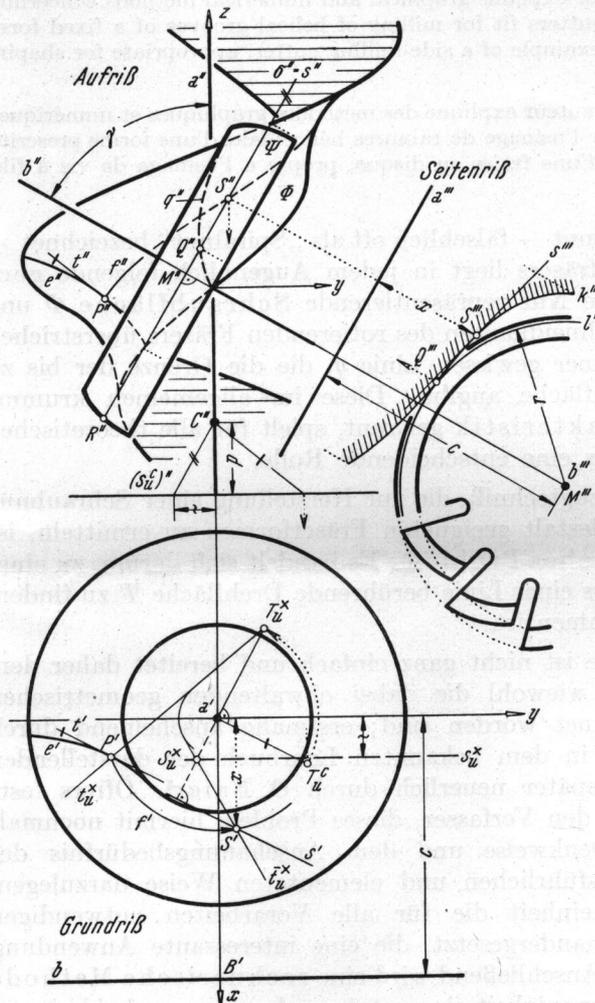


Abb. 1. Parallelkreisverfahren.

Einige Worte mögen noch der Konstruktion der Schnittkurve $k = \sigma \Phi$ gewidmet werden. Man erhält zunächst Punkte von k , indem man die Ebene σ entweder mit den Schraublinien f schneidet, die von einzelnen Punkten P der Erzeugenden e ausgehen, oder aber mit einzelnen Schraublagen \bar{e} von e , falls die Erzeugende besonders einfach (insbesondere gerade) ist; beides ist wegen der aufrißprojizierenden Lage von σ leicht durchzuführen. Anschließend empfiehlt es sich, stets noch in jedem konstruierten Punkt S von k die Tangente s zu ermitteln, indem man σ mit der Tangentialebene von Φ (in S) zum Schnitt bringt; hierbei leistet das elegante „Drehfluchtprinzip“ von Th. Schmid⁵ gute Dienste⁵. So wurde in Abb. 1 zunächst im Ausgangspunkt P die von der Erzeugendentangente t und der Schraubtangente aufgespannte Tangentialebene τ von Φ durch ihre Drehfluchtspur $t_u \times = T_u \times P'$ festgelegt und diese hierauf, der Schraubung $P \rightarrow S$ entsprechend, der Drehung $P' \rightarrow S'$ unterworfen; die so gewonnene Neulage $\bar{t}_u \times$ schneidet dann aus der (allen Parallelschnitten gemeinsamen) Drehfluchtspur $s_u \times$ der Ebene σ den Drehfluchtpunkt $S_u \times$ der Schnitttangente s aus. Aus deren Grundriß $s' \perp a' S_u \times$ und Aufriß $s'' = \sigma''$ ist dann der benötigte Seitenriß s''' ohne weiteres zu bekommen.

Auch die Meridiantangente der Fräserfläche Ψ in dem durch Drehung um b aus Q hervorgehenden Umrißpunkt R ließe sich unschwer angeben: Man hätte bloß die Tangentialebene von Φ im Berührungspunkt Q zu bestimmen und mit der Fräserachse b zu schneiden; der so gewonnene Punkt T stellt die Spitze des der Drehfläche längs des Parallelkreises l umschriebenen Berührungskegels dar und ist nur noch mit R zu verbinden. Es muß allerdings betont werden, daß die oben erwähnte Unsicherheit des Eingriffspunktes Q sich in gleicher Größenordnung auf die zugehörige Tangentialebene und damit auch auf die Meridiantangente RT fortpflanzen kann.

B. Normalenverfahren (Abb. 2). Die Grundidee beruht auf der Tatsache, daß die beiden Flächen Φ und Ψ in jedem Punkt ihrer Berührungslinie q eine gemeinsame Normale haben: Ein Eingriffspunkt ist also dadurch gekennzeichnet, daß die zugehörige Schraubflächennormale die Drehflächenachse b trifft. Zur konstruktiven Auswertung geht man von einem beliebigen Punkt P der die Schraubfläche Φ festlegenden Erzeugenden e aus, bestimmt daselbst die Flächennormale n und verschraubt diese hierauf so lange, bis sie die Fräserachse b trifft, wobei der Ausgangspunkt P in einen Eingriffspunkt Q übergeht. Der Treffpunkt N der Neulage \bar{n} von n mit b kann als Durchstoßpunkt von b mit der von n bei der Schraubung überstrichenen Strahlschraubfläche (Regelschraubfläche) Σ gefunden werden.

⁵ Hierbei wird der im Abstand p über der Grundrißebene befindliche Punkt C der Schraubachse als Augpunkt einer zusätzlichen Zentralprojektion auf die Grundrißebene eingeführt. Man erhält dann den „Drehfluchtpunkt“ $G_u \times$ einer Geraden g , wenn man deren Fluchtpunkt G_u^c im Sinne der Aufwärtsschraubung einer Viertelschwenkung um die Achse unterwirft; G_u^c , der Zentralriß des unendlich fernen Punktes G_u von g , ist dabei der Spurpunkt der durch C gehenden Parallele zu g . Analog entsteht die „Drehfluchtspur“ $e_u \times$ einer Ebene ε durch Viertelschwenkung aus ihrer Fluchtspur e_u^c , das ist die Spur der durch C gehenden Parallelebene zu ε .

Die Einführung dieser Begriffe erweist sich vor allem deshalb als vorteilhaft, weil der oft benötigte Drehfluchtpunkt einer Schraubtangente stets mit dem Grundriß ihres Berührungspunktes zusammenfällt, also nicht eigens konstruiert zu werden braucht. Wichtig sind ferner folgende, unmittelbar einzusehende Eigenschaften: a) Der Grundriß einer Geraden ist senkrecht zum Radiusvektor ihres Drehfluchtpunktes. b) Die Normalen einer Ebene erscheinen im Grundriß parallel zu deren Drehfluchtspur. c) Die Drehfluchten einer Ebene und ihrer Normalen liegen antipolar bezüglich des „Distanzkreises“ der Zentralprojektion (Mitte a' , Radius p). d) Die Drehfluchtspur einer von zwei Geraden aufgespannten Ebene verbindet die Drehfluchtpunkte der Geraden. e) Der Drehfluchtpunkt der Schnittgeraden zweier Ebenen liegt im Schnitt der beiden Drehfluchtspuren. f) Bei der Verschraubung von Geraden und Ebenen machen die Drehfluchten die Drehung um die Achse mit.

Die zeichnerische Durchführung dieses Planes erfordert nun eine Reihe von Einzelschritten. Zunächst wird wie unter A die von der Erzeugendentangente t und der Schraubtangente aufgespannte Tangentialebene τ in P durch ihre Drehfluchtspur $t_u^\times = T_u^\times P'$ festgelegt. Hierauf wird die Flächennormale $n \perp \tau$ dargestellt, deren Drehfluchtpunkt N_u^\times zufolge Fußnote 5c mit dem Antipol von t_u^\times bezüglich

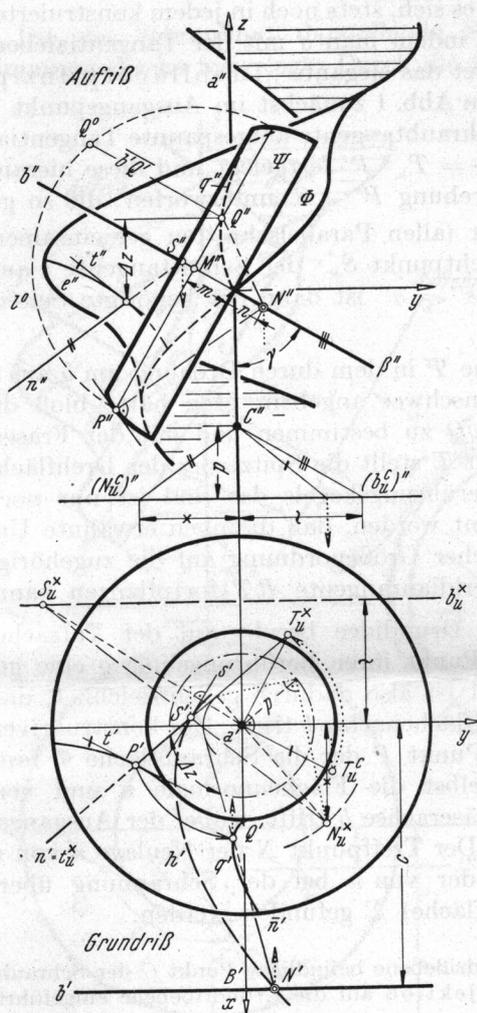


Abb. 2. Normalenverfahren.

des „Parameterkreises“ (Mitte a' , Radius p) zusammenfällt: Geleitet von der Vorstellung des durch negative Viertelschwenkung aus N_u^\times rekonstruierbaren Fluchtpunktes N_u^c , dessen Verbindung mit dem Augpunkt C die Richtung der gesuchten Normale n anzeigt, erkennt man, daß deren Grundriß n' sich mit t_u^\times deckt und daß zur Bestimmung des Aufrißes $n'' \parallel C''(N_u^c)''$ nur die Übertragung des (in Abb. 2 angekreuzten) x -Abstandes von N_u^\times auf die negative y -Achse nötig ist. — Zur Ermittlung des Durchstoßpunktes N der Fräserachse b mit der durch Verschraubung der Normale n erzeugten Strahlschraubfläche Σ kann man deren Schnittkurve h mit einer passenden, durch b gelegten Hilfsebene β konstruieren; in erster Linie eignet sich hierzu die zur Aufrißtafel normale Ebene, weil diese im Aufriß projizierend erscheint ($\beta'' = b''$). Man erhält einen ersten Punkt S der Hilfskurve h im Durchstoßpunkt von n mit β . Die zugehörige Tangente s von h wird aus β durch die Tangentialebene von Σ ausgeschnitten, die von der Erzeugenden n und der Schraubtangente des Punktes S aufgespannt wird; der die zum Grundriß s' normale Richtung anzeigende Drehfluchtpunkt S_u^\times wird demnach im Schnitt der Drehfluchtspuren b_u^\times und $N_u^\times S'$ von β und der genannten Tangentialebene gefunden. Nach diesem Muster können beliebig viele weitere Punkte und Tangenten von h bestimmt werden, wenn n durch einzelne Schraublagen ersetzt wird; b_u^\times bleibt dabei fest, während N_u^\times die Drehung um a mitmacht.

— Die mit aller Sorgfalt zu zeichnende Hilfskurve h schneidet nun aus der Fräserachse b den gewünschten Durchstoßpunkt $N = b \Sigma$ aus⁶. Die durch N gehende Schraublage \bar{n} kann nun im Grundriß mittels des von n' eingehüllten Hilfskreises (um a') sofort gezeichnet werden, ebenso der aus P hervorgehende Eingriffspunkt Q . Bezeichnet $\Delta\varphi$ den nunmehr bekannten Drehwinkel der Schraubung $n \rightarrow \bar{n}$ ($P \rightarrow Q$), so gibt $\Delta z = p \cdot \Delta\varphi$ den für den Aufriß benötigten Höhenunterschied von P und Q an, und dieser kann demnach als Bogen des „Parameterkreises“ zwischen n' und \bar{n}' abgenommen (mit dem Stechzirkel abgelaufen) werden. — Mit dem Eingriffspunkt Q ist jetzt auch der durch Rotation von Q um b entstehende Parallelkreis l

⁶ Tritt kein reeller Schnittpunkt auf, so ist die angenommene Fräserachse unbrauchbar. Liegen mehrere Schnittpunkte vor, so bereitet die Wahl des in Betracht kommenden im allgemeinen keine Schwierigkeiten, doch besteht begründeter Verdacht auf Unterschneidungen.

der Fräserfläche \mathcal{P} bekannt, dessen Mittelpunkt M und Umklappung l^0 im Aufriß sofort angegeben werden können. Da in N die Spitze des längs l errichtbaren Normalenkegels von \mathcal{P} zur Verfügung steht, können auch Meridiannormale und -tangente — etwa im Hauptmeridianpunkt R — unmittelbar eingetragen werden, und zwar diesmal ohne die beim Parallelkreisverfahren festgestellte Unsicherheit.

C. Varianten des Normalenverfahrens. O. Baier⁴ hält die im Ausgangspunkt P errichtete Schraubflächennormale n fest und verschraubt dafür die Fräserachse b in eine Lage \bar{b} zurück, die n trifft. Die Schraubung $\bar{b} \rightarrow b$ bringt dann n in die b treffende Lage \bar{n} und macht aus P den Eingriffspunkt Q . Der ausschlaggebende Treffpunkt N von n und \bar{b} wird als Durchstoßpunkt von n mit der durch \bar{b} überstrichenen Strahlschraubfläche Θ gewonnen. Es ist eine bestechende Eigenheit dieser Variante, daß es sich hier bei der notwendigen Wiederholung des Verfahrens stets um dieselbe Fläche Θ handelt, die lediglich mit verschiedenen Normalen n zu schneiden ist. Es würde sich daher lohnen, zwecks Einsatzes des Prinzips der „kotierte Projektion“ den durch ein äquidistantes System von Horizontalebenebenen erzeugten Schichtenplan der Schraubfläche Θ zu entwickeln, da dann der Schnittpunkt mit der jeweiligen, entsprechend graduierten Geraden n leicht zu bestimmen ist. Die Tatsache, daß die Schichtenlinien von Θ durch Schraubung auseinander hervorgehen, also untereinander kongruent sind, gestattet jedoch noch eine originelle Vereinfachung: O. Baier zeichnet auf ein mit der Zirkelspitze in a' festgehaltenes durchsichtiges Pauspapier eine einzige der Schichtenlinien i (übrigens eine allgemeine Kreisevolvente), sowie eine gleichmäßige Kreisskala mittels des zur Schichtenhöhe d gehörigen Schraubwinkels $\delta = d/p$, so daß die zu einer verdrehten Lage gehörige Schichtenkennziffer unmittelbar über einer auf der festen Unterlage angebrachten Ablesemarke aufscheint. Die Verdrehung ist nun so weit zu treiben, bis die von i auf der Graduierungsskala des Normalengrundrisses n' ausgeschnittene Schichtenzahl mit dem über der Ablesemarke befindlichen Kreisskalenwert übereinstimmt, was durch kurzes Probieren zu erreichen ist: Im Schnittpunkt $i n'$ ist dann der Grundriß des benötigten Treffpunktes $N = \Theta n$ gefunden. Die Genauigkeit ist bei einem solchen mit einem Interpolationsprozeß verbundenen „geometrischen Experiment“ wohl etwas unsicher.

E. Stübler¹ befaßt sich wiederum vorwiegend mit dem ziemlich häufigen Spezialfall geradliniger Erzeugenden ($\Phi =$ Strahlschraubfläche) und betrachtet dabei jeweils die Gesamtheit der Flächennormalen n längs einer solchen Erzeugenden e . Um unter diesen Normalen, die bekanntlich ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid II erfüllen, jene zu finden, die die Fräserachse b treffen, sind die beiden Durchstoßpunkte N von b mit II aufzusuchen. Es handelt sich hierbei um eine quadratische Aufgabe, die zwar grundsätzlich mit Lineal und Zirkel zu bewältigen ist, aber doch allerhand Umstände bedingt. Zur Vereinfachung kann übrigens jedes der untereinander kongruenten Paraboloiden II in das zu einer Ausgangslage e_0 gehörige Paraboloid II_0 zurückverschraubt werden, wobei die Gerade b mitzunehmen ist.

2. Rechnerische Behandlung.

Sobald die Aufgabe der Ermittlung eines bestimmten Schraubnutenfräasers auf graphischem Wege befriedigend erledigt ist, wird zur Kontrolle und Steigerung der Genauigkeit noch eine rechnerische Nachprüfung erwünscht sein. Die nachstehend entwickelte numerische Behandlung des Fräserproblems macht die vorhin dargestellten darstellend-geometrischen Methoden keineswegs etwa überflüssig, sondern wird sich wesentlich auf deren Ergebnisse stützen müssen; erst nachdem in zeichnerischer Vorarbeit die Achsenlage des Fräasers zufriedenstellend geklärt wurde, kann die Rechnung erfolgreich einsetzen.

Eine numerische Näherungsmethode, die sich auf das „Parallelkreisverfahren“ stützt, setzte kürzlich J. Heisig⁷ auseinander, während dem von E. Stübler² mitgeteilten Rechenschema, ebenso wie dem folgenden, das „Normalenverfahren“ zugrunde liegt.

Die nachstehende analytische Behandlung bedient sich eines kartesischen Normalkoordinatensystems x, y, z , dessen z -Achse mit der Schraubachse a zusammenfällt, während die x -Achse den kürzesten Abstand OB von a und der Fräserachse b tragen soll (vgl. Abb. 1 und 2). Das Koordinatentripel eines Punktes wird gelegentlich zu einem Ortsvektor $\bar{x}(x, y, z)$ zusammengefaßt. Bezeichnet $c = OB$ den Abstand und γ den Winkel des Achsenpaares a, b , dann wird b beschrieben durch

$$x = c, \quad y \cos \gamma + z \sin \gamma = 0. \quad (1)$$

Die Erzeugende e der Schraubfläche Φ sei in ihrer Ausgangslage mit Hilfe eines Kurvenparameters v dargestellt durch

$$\bar{x} = \begin{cases} X(v), \\ Y(v), \\ Z(v). \end{cases} \quad (2)$$

Bezeichnet weiterhin u den Schraubwinkel — zu dem bekanntlich die Schieb-
strecke $\Delta z = pu$ gehört —, so lautet die Gleichung der entsprechenden Schraub-
lage \bar{e} von e :

$$\bar{x} = \begin{cases} X(v) \cos u - Y(v) \sin u, \\ X(v) \sin u + Y(v) \cos u, \\ Z(v) + pu. \end{cases} \quad (3)$$

Damit liegt gleichzeitig die Parameterdarstellung der Nutenfläche Φ vor. Das krummlinige Koordinatennetz auf Φ besteht aus den Erzeugendenlagen $u = \text{konst.}$ und den Schraublinien $v = \text{konst.}$

Die Tangentialebene in einem Punkt $P(u=0, v)$ von e wird aufgespannt vom Tangentenvektor $\dot{\bar{x}} = d\bar{x}/dv$ der Erzeugenden e und dem Schraubtangentenvektor

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \Big|_{u=0} = \begin{cases} -Y(v), \\ X(v), \\ p. \end{cases} \quad (4)$$

Der Normalenvektor $\bar{n} = \dot{\bar{x}} \times \bar{x}$ hat demnach die Komponenten

$$\xi = XZ' - pY', \quad \eta = YZ' + pX', \quad \zeta = -(XX' + YY'). \quad (5)$$

Er erfährt bei der Schraubung nur eine Verdrehung um die z -Achse, so daß sich die Komponenten des Normalenvektors \bar{n} des Flächenpunktes $Q(u, v)$ hinschreiben lassen mit

$$\bar{\xi} = \xi \cos u - \eta \sin u, \quad \bar{\eta} = \xi \sin u + \eta \cos u, \quad \bar{\zeta} = \zeta. \quad (6)$$

Q ist ein Eingriffspunkt, wenn seine Normale die Fräserachse b in einem Punkt N trifft. Diese Bedingung ist unter Benützung des Achsenpunktes $B(c, 0, 0)$ gleichbedeutend mit der Forderung, daß die drei Vektoren BQ , \bar{n} und $\bar{b}(0, -\sin \gamma, \cos \gamma)$ komplanar sind. Dies findet wiederum seinen Ausdruck im Verschwinden der Determinante

⁷ J. Heisig: Die Profilermittlung des Formfräasers für das Fräsen von Spiralnuten. Diss. T. H. Wien, 1951.

$$\begin{vmatrix} \bar{X} - c & \bar{\xi} & 0 \\ \bar{Y} & \bar{\eta} & -\sin \gamma \\ \bar{Z} & \bar{\zeta} & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Diese Beziehung stellt sozusagen die „Schlüsselgleichung“ des Fräserproblems dar. Wird die Determinante nach der letzten Spalte entwickelt, wobei die Größen \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} vermöge (3) und $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ vermöge (6) auf u und v zurückgeführt werden, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} [(X \zeta - Z \xi) \cos u - (Y \zeta - Z \eta) \sin u - p u (\xi \cos u - \eta \sin u) - c \zeta] \sin \gamma + \\ + [\underbrace{(X \eta - Y \xi)}_{-p \zeta} - c (\xi \sin u + \eta \cos u)] \cos \gamma = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Bedingung $F(u, v) = 0$ kann direkt als die Gleichung der Eingriffslinie in den Flächenkoordinaten u und v angesehen werden.

Zur Auswertung wird man im allgemeinen eine Reihe von v -Werten annehmen und die transzendente Gl. (8) jeweils nach u auflösen, zu welchem Zwecke sie etwa auf die Gestalt

$$u = \frac{A \sin u + B \cos u + C}{p (\eta \sin u - \xi \cos u)} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} A &= c \xi \operatorname{ctg} \gamma + (Y \zeta - Z \eta), \\ B &= c \eta \operatorname{ctg} \gamma - (X \zeta - Z \xi), \\ C &= (p \operatorname{ctg} \gamma + c) \zeta \end{aligned} \quad (9)$$

gebracht werden mag, die unter Umständen die Anwendung eines einfachen Iterationsverfahrens erlaubt (Einsetzung eines Näherungswertes von u in der rechten Seite, um einen verbesserten Näherungswert zu gewinnen). Mittels des gefundenen u -Wertes liefert dann das Gleichungssystem (3) die Koordinaten \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} des entsprechenden Eingriffspunktes Q . Mit dessen Kenntnis ist auch der zugehörige Parallelkreismittelpunkt M bekannt, dessen Achsenkoordinate $BM = m$ zufolge Abb. 2 mit

$$m = \bar{Y} \sin \gamma - \bar{Z} \cos \gamma \quad (10)$$

angegeben werden kann. Für den Parallelkreisradius r gilt wiederum

$$r^2 = (\bar{X} - c)^2 + q^2 \quad \text{mit} \quad q = \bar{Y} \cos \gamma + \bar{Z} \sin \gamma. \quad (11)$$

Zur Festlegung der Meridiantangente genügt die Angabe des Achsenpunktes N der Flächennormale QN . Seine Achsenkoordinate $BN = n$ berechnet sich am einfachsten aus dem verschwindenden Skalarprodukt des Vektors $NQ = (\bar{X} - c, \bar{Y} - n \sin \gamma, \bar{Z} + n \cos \gamma)$ und des dazu normalen mit Q verbundenen Schraubtangentevektors $(-\bar{Y}, \bar{X}, p)$ zu

$$n = (c \bar{Y} + p \bar{Z}) : (\bar{X} \sin \gamma - p \cos \gamma). \quad (12)$$

Es mag noch erwähnt werden, daß in dem Spezialfall einer geradlinigen Erzeugenden die Koordinaten X, Y, Z und damit auch ξ, η, ζ linear in v sind (wenn v ein Längenparameter der Erzeugenden ist), so daß die in u transzendente Schlüsselgleichung (8) in v quadratisch ist: In einem solchen Fall könnten demnach, im Gegensatz zu dem vorhin eingeschlagenen Weg, passende u -Werte angenommen und die zugehörigen v -Werte durch Auflösung jeweils einer quadratischen Gleichung bestimmt werden, wie es E. Stübler² auch vorschlägt (vgl. Abschn. 1, C). Diese v -Werte können aber leicht aus dem durch die Angabe vorgeschriebenen v -Intervall herausfallen, so daß der ursprüngliche Vorgang — Vorgabe von v -Werten und Auflösung nach u — meist auch hier der empfehlenswertere ist.

Von Interesse ist endlich noch folgende Feststellung: Die Schlüsselgleichung (9) bleibt unverändert, wenn c durch $c^* = p \operatorname{ctg} \gamma$ und gleichzeitig γ durch $\gamma^* = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} c/p$ ersetzt wird. Das bedeutet geometrisch, daß neben b — wenigstens theoretisch — noch eine zweite Fräserachse b^* existiert, die auf dieselbe Eingriffslinie führt⁸.

3. Anwendungsbeispiel: Scheibenfräser für Flachgewindeflanken.

Ein Drehzylinder vom Radius r_2 soll längs einer Wendelflächenrampe mit der mittleren Steigung $\operatorname{tg} \mu$ auf einen Kernradius r_1 abgefräst werden (vgl. Abb. 3). Es ist eine verbreitete Meinung, daß scharfe Hohlkanten, wie sie hier und bei Flach-

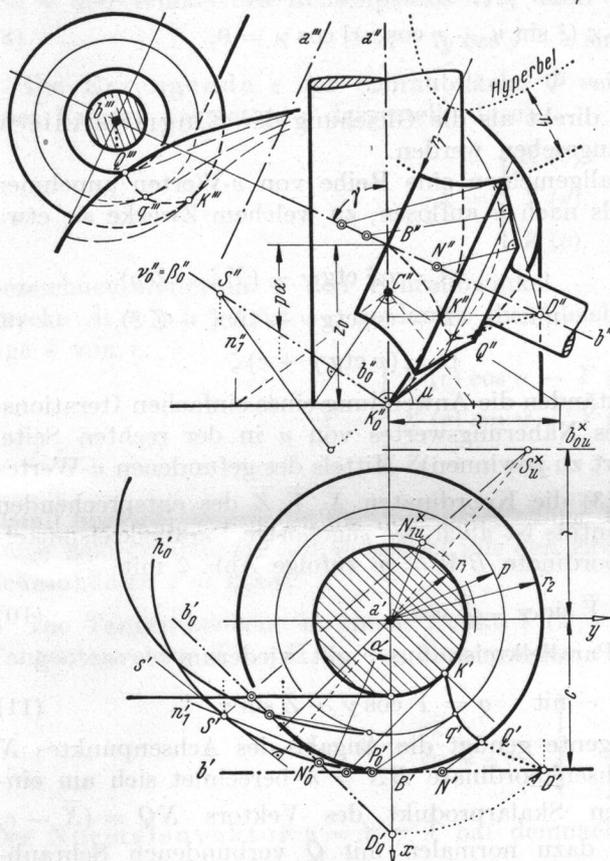


Abb. 3. Scheibenfräser für Flachgewindeflanken.

gewinden auftreten, prinzipiell nicht exakt ausgefräst werden können. Diese Ansicht ist jedoch nicht stichhältig und vielleicht nur durch die stark eingeschränkte Wahlfreiheit für die Fräserachse hervorgerufen. In jedem Punkt K der eine Hohlkante abgebenden Schraublinie f existieren nämlich, den dort zusammentreffenden Schraubflächenmänteln entsprechend, zwei Flächennormalen, die natürlich in der Normalebene v von f liegen; da beide Normalen die Fräserachse b gleichzeitig treffen sollen, darf diese nicht mehr ganz frei, sondern nur in einer solchen Normalebene v gewählt werden⁹. Andernfalls würden die beiden Äste der Eingriffslinie nicht zusammentreffen, und der zwischen ihnen liegende Kreisbogen der Fräserkante, längs der die beiden Mäntel der Fräserfläche zusammenstoßen, würde eine Ausrundung der Hohlkante bewirken. (Daß eine solche Ausrundung aus anderen Gründen oft geradezu erwünscht ist, steht hier nicht zur Diskussion.)

Für die der Rechnung vorausgehende zeichnerische Behandlung der gestellten Aufgabe (Abb. 3) mag zunächst etwa der vorderste Punkt K_0 der Hohlkante f ins Auge gefaßt werden. Seine Normalebene v_0 wird dann gleich als Bezugsebene β_0 verwendet und gemäß 1, B mit einer Anzahl der von den Nutennormalen n überstrichenen Strahlschraubflächen Σ geschnitten. Die Fräserach-

⁸ Für den Kenner der Elemente der räumlichen Kinematik liegt in dieser Feststellung nichts Überraschendes: Sämtliche Bahnnormalen der Schraubung — es gibt deren nur ∞^3 — erfüllen einen linearen Strahlkomplex und alle ∞^2 Bahnnormalen, welche eine vorgelegte Gerade g treffen, treffen dann auch deren Polargerade g^* . Auch die Achsen b und b^* sind nichts anderes als „reziproke Polaren“ bezüglich des Normalenkomplexes.

⁹ Die Wahl der Fräserachse ist damit auf die Tangentenmannigfaltigkeit der von den Normalebenen der Schraublinie f eingehüllten Schraubtorse eingeschränkt.

se b_0 ist dann so anzunehmen, daß sie sämtliche gezeichneten Schnittlinien $h_0 = \Sigma \beta_0$ (und auch die dazwischenliegenden) trifft. — Ist einmal in geeigneter Weise über die Achse b_0 verfügt, dann wird diese für das folgende zweckmäßig in die aufrißparallele Lage b verschraubt; der zugehörige Schraubwinkel sei mit α bezeichnet. Die Fräserachse b liegt jetzt in der Bahnnormalebene jenes Hohlkantenpunktes K , der hierbei aus K_0 hervorgeht, und stellt eine 2. Hauptlinie derselben dar; b erscheint demnach im Aufriß normal zur Schraubtangente von K . — Im Rahmen des vorteilhaft einzusetzenden Normalenverfahrens wird natürlich das vorhandene Hilfskurvensystem h_0 ausgenützt: Ist N_0 ein Schnittpunkt von b_0 mit einer der Linien h_0 , und P_0 der leicht angebbare Fußpunkt der durch N_0 gehenden Nutennormale, dann geht der entsprechende Eingriffspunkt Q aus P_0 durch Schraubung um den Winkel α hervor.

An den die Wendelflächenrampe erzeugenden Fräserteil, der, wie aus dem in Abb. 3 hinzugefügten Seitenriß klar zu ersehen ist, zu keinerlei Unterschneidungen Anlaß gibt, schließt sich dann ein den Zylinderschaft formender Teil, der etwas einfacher zu konstruieren ist. Die Eingriffslinie besteht auch hier aus allen Punkten des Zylinders, deren Flächennormalen die Fräserachse b treffen. Zu deren Ermittlung können etwa Hilfsebenen normal zur Schraubachse a benutzt werden; die Punkte, in denen eine solche Ebene die Achsen a und b schneidet, liefern in ihrer Verbindung eine Eingriffsnormale. Diese trägt zwei einander gegenüberliegende Zylinderpunkte, von welchen natürlich nur der b näherliegende praktisch als Eingriffspunkt in Frage kommt. Die Gesamtheit der Eingriffsnormalen erfüllt ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid mit der Scheitelerzeugenden a , so daß als Eingriffslinie eine bezüglich a symmetrische Kurve 4. Ordnung auftritt. Man macht sich übrigens leicht klar, daß der zugehörige Fräser von der zum Abstand r_1 gehörigen Parallelfläche jenes einschaligen Drehhyperboloides gebildet wird, das durch Rotation von a um b entsteht; dementsprechend ist der Fräsermeridian die Parallelkurve einer Hyperbel. — Wie weit dieser Fräserteil erstreckt wird, hängt von sonstigen Umständen ab; in Abb. 3 wurde er nur bis zum Kehlkreis ausgeführt.

Für die Rechnung stehen an Daten zunächst der Schraubparameter

$$p = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \operatorname{tg} \mu$$

sowie die Wendelflächenerzeugende

$$X = v (r_1 \leq v \leq r_2), \quad Y = 0, \quad Z = z_0 = \text{konst.} \quad (13)$$

zur Verfügung, ferner die gemäß (5) zu bestimmende Normalenschar

$$\xi = 0, \quad \eta = p, \quad \zeta = -v. \quad (14)$$

Hinsichtlich der Fräserachse b wird auf Grund der Zeichnung über den Achsenabstand c und den Winkel α in geeigneter Weise verfügt, das heißt b soll in einer bestimmten Frontalebene $x = c$ und in der Bahnnormalebene v des Hohlkantenpunktes K ($u = \alpha$, $v = r_1$) liegen, dessen Koordinaten zufolge (3) die Werte

$$x_1 = r_1 \cos \alpha, \quad y_1 = r_1 \sin \alpha, \quad z_1 = z_0 + p \alpha \quad (15)$$

haben. Mittels des Bahntangentenvektors $(-y_1, x_1, p)$ ergibt sich dann die Normalebene v :

$$-y_1 x + x_1 y + p z = p z_1. \quad (16)$$

v muß auch den Punkt $B(c, 0, 0)$ der Fräserachse enthalten; hieraus folgt also $-c y_1 = p z_1$, das ist ausgeführt:

$$-c r_1 \sin \alpha = p (z_0 + p \alpha),$$

woraus sich die noch fehlende Koordinate z_0 jetzt mit

$$z_0 = -\left(p \alpha + \frac{cr_1}{p} \sin \alpha\right) \quad (17)$$

ergibt. Der Achsenwinkel γ berechnet sich dann auf Grund von (16) aus

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{x_1}{p} = \frac{r_1}{p} \cos \alpha. \quad (18)$$

Nachdem nun alle Bestimmungsstücke bekannt sind, kann die Eingriffsgleichung (9) aufgestellt werden, die folgende Gestalt annimmt:

$$u + \frac{z_0}{p} = \frac{B \cos u + C}{p^2 \sin u} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} B &= v^2 + cr_1 \cos \alpha, \\ C &= -(c + r_1 \cos \alpha)v. \end{aligned} \quad (19)$$

Zur Kontrolle kann nachgeprüft werden, daß dieser Bedingung durch die Koordinaten des Eingriffspunktes $K (u = \alpha, v = r_1)$ genügt wird.

Für die weitere Auswertung müssen dann konkrete numerische Werte vorliegen. Sei etwa in Übereinstimmung mit Abb. 3

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad \operatorname{tg} \mu = 1; \quad c = 2, \quad \alpha = \pi/4.$$

Dann ist

$$p = 1.5, \quad z_0 = -\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) = -2.12091;$$

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{3}\sqrt{2}, \quad \gamma = 64^\circ 46'.$$

Die Schlüsselgleichung lautet jetzt

$$u = 1.41394 + \left(\frac{4}{9}v^2 + 0.62854\right) \operatorname{ctg} u - \frac{1.20316 \cdot v}{\sin u}, \quad (20)$$

und die nachstehende Tab. 1 enthält einige daraus berechnete Zahlenwerte, die an Hand von Abb. 3 nachgeprüft werden können:

Tabelle 1.

Schlüsselwerte		Eingriffslinie			Fräsermeridian		
v	u	\bar{X}	\bar{Y}	\bar{Z}	m	r	n
1	45°	0.707	0.707	-0.943	1.042	1.406	-0.648 ¹⁰
1.5	34° 18'	1.239	0.845	-1.223	1.286	1.065	-0.298
2	36° 06'	1.616	1.178	-1.176	1.567	0.680	0.720

Für den anschließenden, den Zylinderschaft erzeugenden Fräserteil kann auch das allgemeine Schema angewandt werden, wenn man den Schaft als Schraubfläche ansieht, die von der achsenparallelen Erzeugenden

$$X = r_1, \quad Y = 0, \quad Z = v (\geq z_0) \quad (21)$$

überstrichen wird. Die solcherart gefundene Parameterdarstellung der Eingriffslinie

$$\bar{X} = r_1 \cos u, \quad \bar{Y} = r_1 \sin u, \quad \bar{Z} = -c \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{tg} u \quad (22)$$

kann auf Grund geometrischer Vorstellung auch unmittelbar hingeschrieben werden.

¹⁰ Für den Hohlkantenpunkt $K (v = 1)$ versagt die Formel (12) für die Achsenkoordinate n des Normalenschnittpunktes, weil b ganz in der Normalebene v liegt, also keinen Schnittpunkt liefert (unbestimmte Form $0:0$). Zieht man statt der Bahnnormalebene des Eingriffspunktes Q jedoch die Tangentialebene des Schraubzylinders $x^2 + y^2 = v^2$ heran, die ja im vorliegenden Falle auch die Normale enthält, so gelangt man zu der äquivalenten Formel $n = (v^2 - cx) : y \sin \gamma$, die natürlich nur für die Wendelfläche angewendet werden darf, hier aber auch im Hohlkantenpunkt K brauchbar bleibt.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß es also durchaus möglich ist, Flachgewindeflanken scharf auszufräsen. Denkt man sich den in Abb. 3 dargestellten Fräser noch durch Spiegelung an seiner Kehlkreisebene verdoppelt, so vermag derselbe sogar vollkommene Flachgewindenuten zu erzeugen; die in Achsenrichtung gemessene lichte Weite derselben beträgt dabei $2|z_0|$. Bis zu welchem Betrage diese Lückenweite durch passende Wahl von α und c in (17) jeweils heruntergedrückt werden kann, ohne Unterschnitte zu verursachen, müßte zum Gegenstand einer eigenen Untersuchung gemacht werden, die wesentlich auf das Hüllgebilde des Systems der Hilfskurven h_0 Bedacht zu nehmen hätte.

4. Sonderfälle.

Auf zwei durch besondere Lage der Fräserachse b ausgezeichnete Sonderfälle sei zum Schluß in aller Kürze hingewiesen.

1. Fingerfräser ($c = 0, \gamma = \pi/2$). Die Schlüsselgleichung (9) vereinfacht sich ein wenig, ohne jedoch ihren transzendenten Charakter zu verlieren.

Für Fingerfräser zu steilgängigen Schrauben und Schnecken mit geradem Achsenschnitt hat W. Vogel¹¹ auf Grund des Parallelkreisverfahrens die rechnerischen Grundlagen entwickelt; dieselben stellen sich natürlich auch ganz zwanglos durch Spezialisierung der hier gegebenen allgemeinen Formeln ein. Für ein Trapezgewinde mit dem Flankenwinkel 2ω , dem Flankendurchmesser d und der Lückenweite w gemäß Abb. 4 ist anzusetzen:

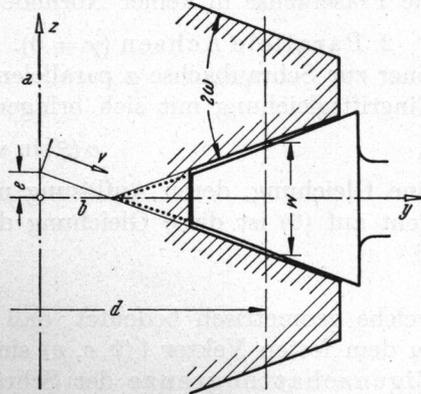


Abb. 4. Fingerfräser für Trapezgewinde.

$$X = 0, \quad Y = v \cos \omega, \quad Z = e - v \sin \omega \quad \text{mit} \quad e = \frac{1}{2}(d \operatorname{tg} \omega - w). \quad (23)$$

Auf Grund von

$$\xi : \eta : \zeta = p : v \sin \omega : v \cos \omega$$

nimmt die Eingriffsgleichung (9) dann folgende Gestalt an:

$$u = \frac{v(v - e \sin \omega) \sin u + p(e - v \sin \omega) \cos u}{p(v \sin \omega \sin u - p \cos u)}. \quad (24)$$

Nach v aufgelöst, hat man unter Verwendung der Abkürzung $e/p = \varepsilon$:

$$v = \frac{p}{2} [(\varepsilon + u + \operatorname{ctg} u) \sin \omega \pm \sqrt{(\varepsilon + u + \operatorname{ctg} u)^2 \sin^2 \omega - 4(\varepsilon + u) \operatorname{ctg} u}]. \quad (25)$$

Um einen Anhaltspunkt für die zu verwendenden u -Werte zu haben, die durchwegs klein sind, kann man in (24) $\sin u$ durch u und $\cos u$ durch 1 ersetzen, womit man zu einem bestimmten v den Näherungswert

$$u \approx \frac{p(v \sin \omega - e)}{p^2 + v^2 - e v \sin \omega} \quad (26)$$

erhält. Anschließend ergibt sich auf Grund von (3) die Darstellung der Eingriffslinie:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= -v \cos \omega \sin u \approx -u v \cos \omega, \\ \bar{Y} &= v \cos \omega \cos u \approx v \cos \omega, \\ \bar{Z} &= e - v \sin \omega + p u. \end{aligned} \quad (27)$$

¹¹ W. Vogel: Analytische Berechnung des Fingerfräserprofils für steilgängige Schrauben und Schnecken mit geradem Achsenschnitt. Z. Ver. deutsch. Ing. 78, 156—158 (1934), s. auch 1222.

Der im Abstand $m = \bar{Y}$ gemessene Parallelkreisradius r des Fräasers ergibt sich dann gemäß (11) aus $r^2 = \bar{X}^2 + \bar{Z}^2$.

Für das Flachgewinde ($\omega = 0$, $e = -w/2$) vereinfacht sich die Schlüsselgleichung (24) auf

$$v^2 = p \left(\frac{w}{2} - pu \right) \operatorname{ctg} u \quad \text{und} \quad u \approx \frac{pw}{2(p^2 + v^2)}. \quad (28)$$

In beiden Fällen ist ein scharfes Ausfräsen der Hohlkanten nicht möglich, weil die Fräserachse in keiner Normalebene der betreffenden Schraublinien liegt.

2. Parallele Achsen ($\gamma = 0$). Die praktisch wohl nur selten mögliche Anordnung einer zur Schraubachse a parallelen Fräserachse b würde eine wesentlich vereinfachte Eingriffsgleichung mit sich bringen; aus (8) folgt nämlich mit $\gamma = 0$

$$c (\xi \sin u + \eta \cos u) + p \zeta = 0, \quad (29)$$

eine Gleichung, deren Auflösung nach u keine Schwierigkeiten bereitet. Mit Rücksicht auf (6) ist diese Gleichung der Ausdruck für die Bedingung

$$c \eta + p \bar{\zeta} = 0, \quad (30)$$

welche geometrisch bedeutet, daß die Eingriffsnormalen $\bar{n} (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ sämtlich normal zu dem festen Vektor $l(0, c, p)$ sind: Die Eingriffslinie ist mithin identisch mit der Eigenschattengrenze der Schraubfläche für die Lichtrichtung ¹².

¹² Die zur Fräserachse b gehörige Polare b^* in bezug auf den in Fußnote 8 erwähnten linearen Normalenkomplex ist im vorliegenden Fall eine Ferngerade, nämlich jene der zur Lichtrichtung l normalen Stellung.

(Eingegangen am 20. Mai 1952.)