

Über die Torusloxodromen.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingelangt am 7. April 1952.)

Über die *Torusloxodromen* — jene auf der Oberfläche eines Torus gezogenen Kurven, die dessen Meridian- oder Parallelkreise unter konstantem Winkel durchsetzen — ist schon öfters geschrieben worden, nicht zuletzt an dieser Stelle: Zunächst hat A. Puchta¹ ihre Differentialgleichung integriert, in seiner (stellenweise recht anfechtbaren) Mitteilung jedoch keinerlei geometrische Eigenschaften erwähnt. Erst E. Müller² erfaßte die Torusloxodromen konstruktiv, indem er sie durch *achsiale Winkelstreckung* oder -*stauchung* mit den *Villarceauschen Kreisen* in Verbindung brachte, deren Loxodromeigenschaft schon früher erkannt worden war³. Einen höheren Standpunkt nimmt endlich K. Strubecker ein⁴, der im Rahmen der durch stereographische Projektion gewonnenen Versinnlichung des dreidimensionalen sphärischen Raumes im elliptischen Kugelgebüsch die Loxodromen der Ringfläche als *Abbilder sphärischer Schraublinien* kennzeichnet. Im übrigen wurden die Torusloxodromen auch wiederholt im Zusammenhang mit der elementar ausführbaren *konformen Abbildung* der Ringfläche auf die Ebene erwähnt⁵.

Trotz alledem muß gesagt werden, daß eine wirklich eingehende Untersuchung dieser interessanten Kurven noch immer ausständig ist;

¹ A. Puchta: Loxodromen und kürzeste Linien auf dem Kreisring. Mh. Math. Phys. 1, 443—450 (1890).

² E. Müller: Kreise als Loxodromen. Arch. Math. Phys. 26, 73—96 (1917), insb. Nr. 7.

³ Schoelcher: Théorie générale des hélices. AFAS 1891.

⁴ K. Strubecker: Zur sphärischen Raumgeometrie. Mh. Math. Phys. 38, 275—290 (1931).

⁵ G. Holzmüller: Elementares über die Dupinschen Zyklen und die Grundlagen der Krümmungstheorie. Z. Math. Phys. 44, 194—213 (1899). — J. Haag: Étude du tore rapporté aux cercles d'Yvon Villarceau. Nouv. Ann. Math. 66, 115—130 (1907).

man scheint sich ja noch nicht einmal die Mühe genommen zu haben, eine brauchbare *Parameterdarstellung* zu entwickeln. Dies wird hiemit nachgetragen, wobei die drei Grundtypen des Torus, die sich durch die Realität der Knotenpunkte unterscheiden, getrennt behandelt werden.

Im Verlauf des Studiums treten dann auch etliche bemerkenswerte, bisher anscheinend nicht festgestellte *geometrische Eigenschaften* der Torusloxdromen zu Tage. So ist hervorzuheben, daß sämtliche Tangenten und Schmiegebahnen einer Torusloxdrome ein koachsiales Drehhyperboloid berühren. Eine solche „*Leitfläche*“ besitzt übrigens auch die *Planewolute* der Loxodrome, die überhaupt weitgehend ähnlichen Charakter zeigt. Ferner wurde bislang wohl vollkommen übersehen, daß die Loxodromen mit den „*D-Linien*“ des Torus identisch sind, nämlich jenen von G. Darboux eingeführten Flächenkurven, deren Schmiegrugeln die Fläche berühren. Besonders hingewiesen sei endlich auf eine hübsche *kinematische Erzeugung* der Ringloxdromen mittels eines *Bennetischen Isogramms*, die ein räumliches Seitenstück zur Erzeugung der ebenen Radlinien mittels eines rotierenden Gelenkparallelogramms darstellt.

Der darstellend-geometrischen Auswertung des behandelten Fragenkreises wurde, guter Wiener Tradition folgend, besonderes Augenmerk zugewandt.

1. Die Loxodromen des Spindeltorus.

Der den Beobachtungen zugrundeliegende *Torus* Φ sei stets durch den Mittenkreisradius a und den Meridiankreisradius b festgelegt. Zur analytischen Beschreibung wird ein kartesisches Normalkoordinatensystem x, y, z verwendet, dessen Nullpunkt das Flächenzentrum O ist und dessen z -Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt. Die Normalprojektion auf die xy -Ebene wird stets als „Grundriß“ angesprochen.

Unter der Voraussetzung $a < b$ treten auf der Achse zwei *reelle konische Knotenpunkte* I, J auf, deren Zentralabstand $\pm c$ sich aus

$$(1.1) \quad c^2 = b^2 - a^2$$

ergibt. Wird einer der beiden Knoten, etwa $I(0, 0, c)$, zum Zentrum einer *Inversion* \mathfrak{S} gemacht, so verwandelt dieselbe den Torus Φ in einen koachsialen *Drehkegel* Φ_0 mit dem halben Öffnungswinkel

$$(1.2) \quad \alpha = \arccos \frac{a}{b} = \arcsin \frac{c}{b}$$

Den Meridiankreisen des Torus entsprechen dabei die Erzeugenden des Kegels. Es ist bequem, die Inversionskugel I' durch $J(0, 0, -c)$ gehen zu lassen, weil dieser Punkt dann festbleibt und Φ_0 mit dem Tangentialkegel des Knotens J zusammenfällt (Abb. 1).

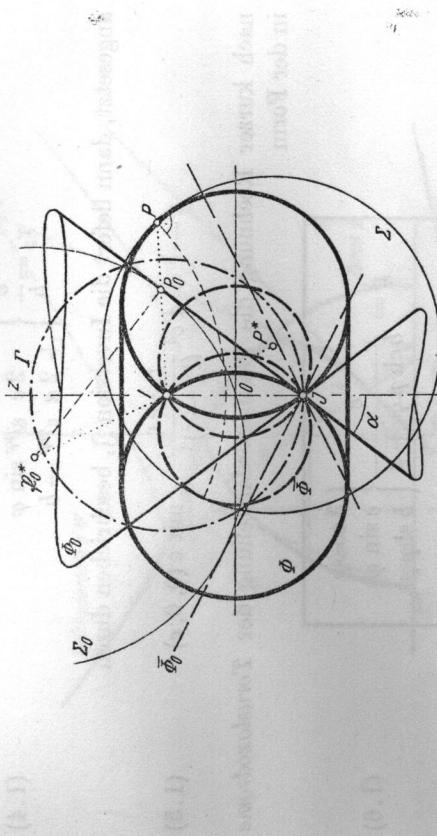


Abb. 1.

Auf Grund der Winkelstreue der Inversion können die *Loxdromen* des Torus Φ nun unmittelbar aus den Loxodromen des Drehkegels Φ_0 abgeleitet werden, die ihrerseits wohlbekannt sind: Es handelt sich um die sogenannten „*zylindro-konischen Spiralen*“, Böschungslinien, die als *Bahnkurven eingliederiger Ähnlichkeitsgruppen* aufgefaßt werden können⁶. Eine solche Kurve k_0 geht bei Verebnung des Kegelmantels in eine logarithmische Spirale über, deren Schnittwinkel σ mit dem vorgeschriebenen Meridianschnittwinkel der zugehörigen Torusloxdrome k übereinstimmt. Sämtliche Bahnkurven der k_0 erzeugenden Ähnlichkeitssuppe („*Spiralung*“) erscheinen im *Grundriß* als kongruente und konzentrische *logarithmische Spiralen*, deren Schnittwinkel ϑ durch

$$(1.3) \quad p = \operatorname{ctg} \vartheta = \sin \alpha \operatorname{ctg} \sigma = \frac{c}{b} \operatorname{ctg} \sigma$$

bestimmt ist.

⁶ Enz. math. Wiss. III D 4, 252f. — Hinsichtlich der konstruktiven Behandlung vgl. W. Wunderlich: Darstellende Geometrie der *Spiralfächen*. MH. Math. Phys. 46, 248—265 (1938).

Wird der laufende Ortsvektor $\xi_0(x_0, y_0, z_0)$ der *Kegelloxodrome* unter Benützung des Polarwinkels φ als Parameter und der eingeführten Konstanten a, b, c und p — ohne Einschränkung der Allgemeinheit — nunmehr durch

$$\xi_0 = \frac{c}{b} \begin{cases} 2c e^{p\varphi} \cos \varphi \\ 2c e^{p\varphi} \sin \varphi \\ \pm 2a e^{p\varphi} - b \end{cases} \quad (1.4)$$

angesetzt, dann liefert die Inversion J , beschrieben durch

$$\xi - c = 4c^2 \frac{\xi_0 - c}{(\xi_0 - c)^2} \quad \text{mit } c(0, 0, c) \quad (1.5)$$

nach kurzer Rechnung die Parameterdarstellung der *Torusloxodrome* in der Form

$$\boxed{\xi = \frac{c}{b \operatorname{ch} p\varphi \mp a} \begin{cases} c \cos \varphi \\ c \sin \varphi \\ b \operatorname{sh} p\varphi \end{cases}} \quad (1.6)$$

Die dargestellte Loxodrome verläuft, wenn bei a das obere Vorzeichen genommen wird, auf dem apfelförmigen Außenmantel des Torus (der von der oberen Kegelhälfte herrührt), andernfalls auf dem spindelförmigen Innenteil (herührend von der unteren Kegelhälfte). Die Loxodrome liegt beidemal symmetrisch zur x -Achse ($\varphi \leftrightarrow -\varphi$) und nähert sich mit $\varphi \rightarrow \pm \infty$ asymptotisch den beiden Knotenpunkten I und J , was ihren transzendenten Charakter deutlich macht. Entsprechend der Spiegelung an der Ebene $z_0 = -c$, die die beiden Kegelhälften miteinander vertauscht, gehen die beiden Loxodromenarten durch Inversion an der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ ineinander über.

Der *Grundriß* der Loxodrome hat die Polargleichung $r(b \operatorname{ch} p\varphi \mp a) = c^2$ und kann als i/p -fach um einen Brennpunkt winkelgestreckte Hyperbel aufgefaßt werden. Der *Zentralriß* aus der Torusmitte O auf eine achsennormale Ebene — etwa $z=b$ — hat die Polargleichung $r \operatorname{sh} p\varphi = c$ und ist das namenlose Seitenstück der sogenannten *Poincaré'schen Spirale*

$$r \operatorname{ch} p\varphi = \text{const.}$$

Die *konstruktive Behandlung* der Loxodrome des Spindeltorus wird am besten auf jene der zylindro-konischen Spiralen zurückgeführt⁶. Es ist aber weiteres möglich, auch direkt aus zwei gegebenen Loxodromenpunkten ohne weiteres zu konstruieren: Man ermittle zunächst die den P, Q beliebig viele weitere zu konstruieren: Man ermittle zunächst die den P, Q orthogonal schneidende Kugel, invertiere P Bogensegment des Parallelkreises von Q längs des

an derselben und spiegeln den so gewonnenen Punkt an der Meridianebene von Q ; der so gefundene Punkt R gehört sicherlich dem Torus an, der bei beiden Transformationen erhalten bleibt, und liegt auch auf der Loxodrome PQ , welche durch die (winkelreine) Produkttransformation in sich übergeführt wird, weil

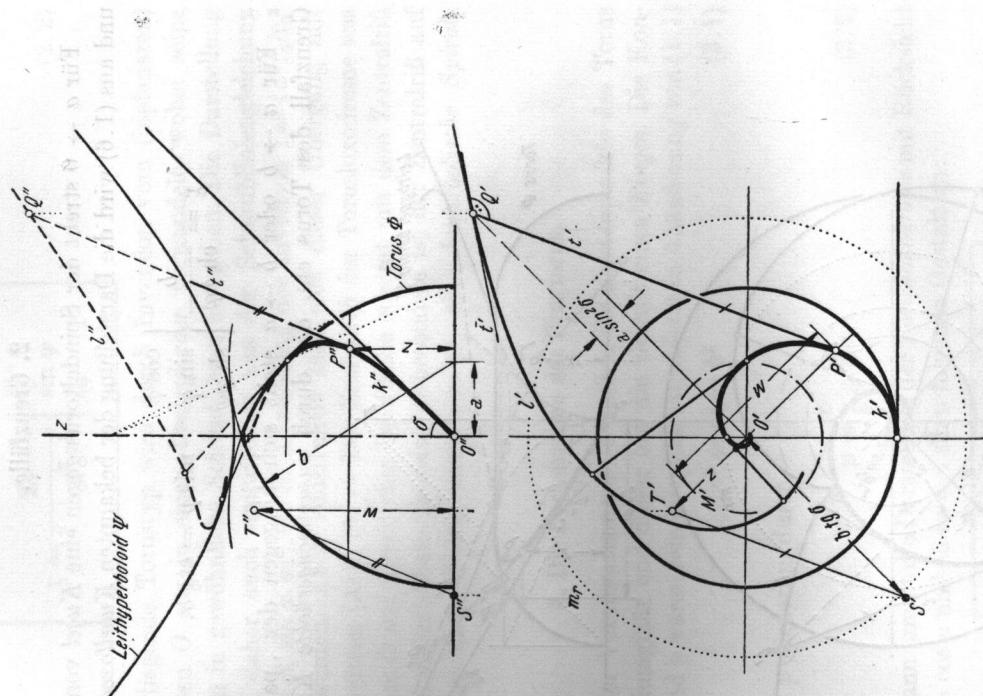


Abb. 2. Loxodrome des Spindeltorus in Grund- und Aufriss ($a = 1, b = 3, \sigma = 45^\circ$)

dies für ihr Element Q gilt. Durch wiederholte Anwendung solcher Operationen läßt sich eine unendliche Punktfolge gewinnen, die durch entsprechende Abwandlung der Vorschrift noch beliebig verdichtet werden kann: So wie es möglich ist, aus P und R den „Halbierungspunkt“ Q zu rekonstruieren, kann jedes Bogensegment des Parallelkreises von Q orthogonal schneidende Kugel, invertiere P

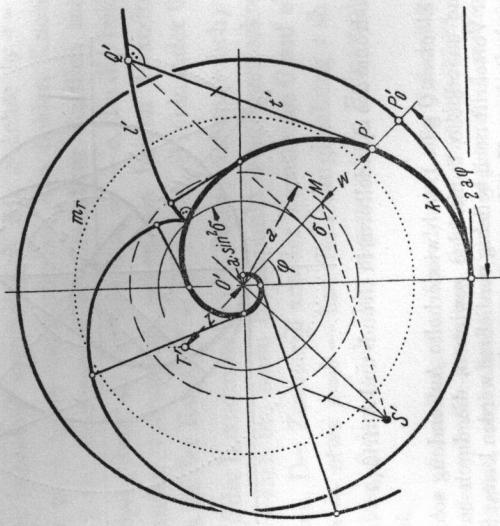
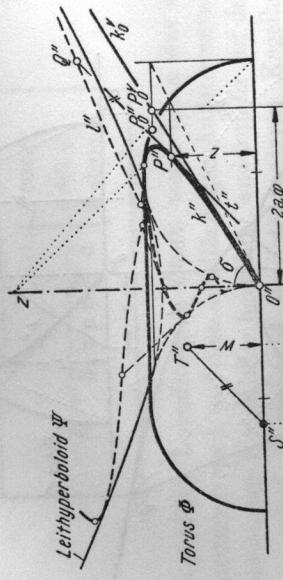
Lineal und Zirkel ausführbar. Hingegen ist die Bestimmung des zur Loxodrome PQ gehörigen Schnittwinkels σ eine transzendentale Aufgabe und hier nicht ohne Rechnung zu bewältigen; gleiches gilt für die umgekehrte Aufgabe, zu vor geschriebenem Schnittwinkel σ zwei Loxodromenpunkte anzugeben.

2. Grenzfälle.

Für $a \rightarrow 0$ strebt der Spindeltorus gegen eine Kugel vom Radius b , und aus (1.6) wird die Darstellung der bekannten *Kugelloxodrome*

$$\xi = \frac{b}{\operatorname{ch} p\varphi} \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \operatorname{sh} p\varphi \end{cases} \quad \text{mit } p = \operatorname{ctg} \sigma. \quad (2.1)$$

Für $a \rightarrow b$ oder $b \rightarrow a$ stellt sich hingegen der „parabolische“ Grenzfall des Torus ein, der durch *zusammengerückte Knotenpunkte*



$I = J = O$ gekennzeichnet ist. Mit c strebt auch p gegen Null, so zwar, daß zufolge (1.3) $\lim bp/c = \operatorname{ctg} \sigma = q$. Die Darstellung der *Torusloxodrome* nimmt dabei die folgende Gestalt an:

$$\xi = \frac{2a}{1 + q^2 \varphi^2} \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ qp \end{cases} \quad (2.2)$$

Der vorliegende Torustyp wird durch Inversion vom (biplanaren) Zentralknoten O aus in einen *Drehzyylinder* verwandelt, wobei seine Loxodromen in gewöhnliche Schraublinien übergehen. Die Darstellung (2.2) kann daher auch unmittelbar aus der Schraubliniengleichung $x_0 = 2a \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, qp)$ durch Anwendung der Inversion $\xi = 4a^2 x_0 / x_0^2$ abgeleitet werden. Auch konstruktiv läßt sich dieser Übergang mit Vorteil ausnützen (Abb. 3). — Der *Zentralriß* der Torusloxodrome aus dem Zentrum O auf irgend eine Bildfläche stimmt mit dem Zentralriß der inversen Schraublinie überein; insbesondere ist der Zentralriß auf eine achsennormale Ebene, etwa $z = qa$, eine *hyperbolische Spirale* $r = a/\varphi$.

3. Die Loxodromen des Ringtorus.

Unter der Voraussetzung $a > b$ werden die Knotenpunkte des Torus konjugiert-imaginär und dieser hat die Gestalt eines *Ringes*. Die Konstanten c und p wären rein imaginär; wird jetzt in Abänderung von (1.1)

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (3.1)$$

gesetzt und p wiederum durch

$$p = \frac{c}{b} \operatorname{ctg} \sigma \quad (3.2)$$

definiert, dann nimmt die Darstellung der *Torusloxodrome* mit Rücksicht auf $\operatorname{ch} iu = \cos u$ und $\operatorname{sh} iu = i \sin u$ folgende Gestalt an:

$$\xi = \frac{c}{a - b \cos p\varphi} \begin{cases} c \cos \varphi \\ c \sin \varphi \\ b \sin p\varphi \end{cases} \quad (3.3)$$

Zu $p = 1$ gehört wegen $y : z = c : b$ eine ebene *Loxodrome*, und zwar ein Kegelschnitt, wie aus der Grundrißprojektion $r(a - b \cos \varphi) = c^2$

Abb. 3. Zur gewöhnlichen Schraublinie inverse Torusloxodrome ($a = b$, $\sigma = 60^\circ$).

zu ersehen ist; es handelt sich offensichtlich um einen der *Villarceauschen Kreise*, die von den doppelt berührenden Ebenen der Ringfläche aus geschnitten werden⁷. Eine zweite Schar von Loxodromenkreisen gehört natürlich zur Annahme $p = -1$. Alle berühren das durch die Achse legbare Minimalebenenpaar.

Die Ringloxodromen sollen für $|p| > 1$, „stielgängig“, für $|p| < 1$, „flachgängig“ genannt werden.

Setzt man in der Loxodromengleichung (3.3) $p\varphi = \psi$, also $\varphi = \psi/p$, so unterscheidet sie sich von der Gleichung des *Villarceauschen Kreises* nur dadurch, daß der Polarwinkel mit dem konstanten Faktor $1/p$ multipliziert erscheint: Hierin steckt die Bemerkung von E. Müller⁸, wonach die zum Parameterwert p gehörige steil-, bzw. flachgängige Loxodrome aus dem Loxodromenkreis $p = 1$ durch $1/p$ -fache *achsiale Winkelstauchung*, bzw. -*streckung* gewonnen werden kann; Achsenabstand r und Höhenkote z bleiben bei dieser Punkttransformation unverändert.

Nach dem Gesagten ist der *Loxodromengrundriß*, dessen Polargleichung $r(a - b \cos p\varphi) = c^2$ lautet, eine um ihren Brennpunkt winkelgestauchte, bzw. -gestreckte Ellipse; für ganzzähliges p hat die Kurve den Namen „Kurve mit p Büchen“ erhalten⁹. Eine ähnliche Aussage gilt übrigens allgemeiner für jede *Zentralprojektion* aus einem Achsenpunkt auf eine achsennormale Ebene, denn der Zentralriß eines Loxodromenkreises ist stets ein *Kegelschnitt*, der einen Brennpunkt auf der Achse hat: Der Zentralriß der Loxodrome geht aber aus dem genannten Kegelschnitt durch $1/p$ -fache Winkelzerrung hervor. Eine Sonderstellung kommt hierbei noch dem Zentralriß aus der Torusmitte O zu, weil sich der Loxodromenkreis dabei als *Gerade* projiziert: Der Zentralriß der Loxodrome ist mithin eine „winkelgestreckte Gerade“, also eine *Ährenkurve*¹⁰, beschrieben etwa durch $r \sin p\varphi = c, z = b$.

Wird die *Zentralprojektion* aus der Torusmitte hingegen auf einen koaxialen *Dreizylinder* entworfen, etwa auf den Zylinder $r = c$, so ergibt sich eine durch $z = b \sin p\varphi$ gekennzeichnete Bildkurve; das ist eine *winkelgezerte Ellipse*, die bei Verebnung des *Zylindermantels* in eine

Sinuslinie übergeht (Abb. 4). Von dieser Art sind die Punktbahnen eines starren Systems, das gleichförmig um eine Achse rotiert und gleichzeitig eine harmonische Schwingung längs dieser Achse vollführt¹⁰. Allgemeiner stellen sich analoge Bildkurven auch bei beliebiger Lage des Projektionszentrums auf der Torusachse ein, weil auch dann noch die Zylinderprojektion eines Loxodromenkreises in zwei Ellipsen zerfällt.

Satz 1. *Zentralprojektion der Ringflächenloxodrome aus einem Achsenpunkt auf einen koaxialen Dreizylinder liefert Bildkurven, die bei Verebnung des Zylindermantels zu Sinuslinien werden.*

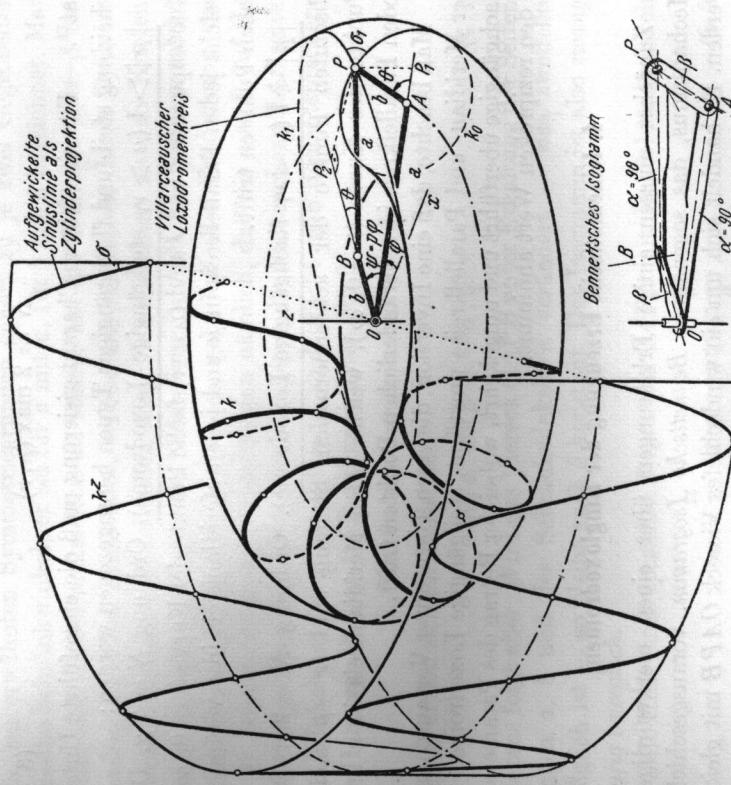


Abb. 4. Steilgängige Ringflächenloxodrome samt zentraler Zylinderprojektion in normalachsometrischer Darstellung ($a = 3, b = 1, p = 12$).

Mit dieser „Zylinderprojektion“ eröffnet sich ein neuer, recht bekannter und besonders anschaulicher Zugang zur darstellend-geometri-

⁷ Y. Villarceau: Note concernant un troisième système de sections circulaires qui admet le tore circulaire ordinaire. C. R. 27, 246 (1848). — Die Loxodromeneigenschaft dieser Kreise folgt einfach aus der Existenz der winkeltreuen Automorphismen des Torus, die ja auch kreistreu sind.

⁸ G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (Teubner 1910), Bd. I, 423. — Vgl. die Abbildungen bei K. Struvecker, a. a. O.⁴

⁹ G. Loria: Darbouxsche Umschreibungen (p = 1). — Vgl. auch J. Haug, a. a. O.⁵.

¹⁰ Diese bemerkenswerte Bewegung, die eine naheliegende Verallgemeinerung des „aufrechten Darbouxschen Umschreibungs“ (p = 1) mit lauter elliptischen

schen Behandlung der Ringloxodromen (Abb. 4).

Während die Ringloxodromen für irrationales p aus unendlich vielen kongruenten, periodisch aneinandergezogenen Bögen bestehen und transzendent sind, fallen sie für rationales p geschlossen und *algebraisch* aus. Wird in diesem Fall $p = \mu/\nu$ als gekürzter Bruch angeschrieben (der positiv vorausgesetzt werden kann, da Vorzeichenwechsel bei p nur eine Spiegelung der Loxodrome bewirkt), und $\exp(ip/\nu) = t$ als neuer Kurvenparameter eingeführt, dann treten in (3.3) nur die Potenzen $t^\mu, t^{-\mu}, t^\nu, t^{-\nu}$ und t^0 auf: Es liegt also eine *rationale Kurve* vor, deren Ordnung den Wert

$$(3.4) \quad N = 2 \max(\mu, \nu)$$

hat¹¹. — Für eine feinere Charakterisierung muß die eingeführte Unterscheidung steil- und flachgängiger Typen herangezogen werden:
 $|p| > 1$ ($\mu > \nu$, steilgängige Loxodrome). Ordnung $N = 2\mu$. Die Knotenpunkte I und J sind $(\mu - \nu)$ -fache Punkte der Kurve ($t = 0, \infty$), welche jeden Parallelkreis im μ und jeden Meridiankreis in ν veränderlichen Punkten trifft.

$|p| < 1$ ($\mu < \nu$, flachgängige Loxodrome). Ordnung $N = 2\nu$. Die absoluten Punkte der achsennormalen Stellung sind $(\nu - \mu)$ -fache Punkte der Kurve ($t = 0, \infty$), welche jeden Meridiankreis in ν und jeden Parallelkreis in μ veränderlichen Punkten trifft.

Man beachte, daß eine Inversion, die einen Torus unter Vertauschung der Meridian- und Parallelkreise umstülpt, steilgängige Loxodromen in flachgängige überführt und umgekehrt, wobei der Betrag des Parameters p den reziproken Wert annimmt.

4. Kinematische Erzeugung der Ringloxodromen.

Zunächst müssen einige Erklärungen über einen merkwürdigen Mechanismus, das sogenannte *Bennettsche Isogramm*, vorausgeschickt werden. Es handelt sich um ein windschiefes Viereck $OAPB$ mit gleich langen Gegenseiten $OA = BP = a$, $OB = AP = b$. Man kann sich Bahnkurven darstellt, wird derzeit von Herrn W. Kautny in einer Dissertationarbeit näher untersucht.

Daß die auf einem Drehzylinder aufgewickelten Sinuslinien für $|p| < 1$ kollinear sind zu den *geodätischen Linien eines Drehkegels*, erwähnte der Verfasser in seiner Abhandlung „*Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen*“, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, **158**, 75—105 (1950).

¹¹ Die Ordnungsformel, die A. Pucha, a. a. O.¹ mitteilt, ist falsch; deshalb entgingen dem Verfasser wohl auch die Loxodromenkreise.

ein solches „*windschiefs Parallelogramm*“ aus einem gewöhnlichen entstanden denken, das längs einer Diagonale geknickt wurde; damit wird die vorhandene *Achssymmetrie* bezüglich des Gemeinknoten der Diagonalen AB und OP unmittelbar klar. Gegenüberliegende Eckenwinkel sind danach jeweils gleich:

$$\measuredangle AOB = \measuredangle BPA = \varphi, \quad \measuredangle PAO = \measuredangle OBP = \pi - \theta$$

Die von je zwei Nachbarseiten aufgespannten Ebenen sollen „*Knotenebenen*“ heißen; der (vorzeichenbegabte) Winkel der beiden Knotenebenen, die eine bestimmte Seite enthalten, sei „*Schränkwinkel*“ genannt.

Aus den erwähnten Symmetriegründen gehört zu je zwei Gegenseiten derselbe Schrämkwinkel; er sei für a mit α , für b mit β bezeichnet. Man denke sich die Vierdecksseiten als starre, um die Winkel α bzw. β *verwundene Lamellen* ausgebildet, welche an den Enden durch Zylindergelenke miteinander verbunden sind, deren Achsen zu den Knotenebenen normal sind (vgl. die Nebenfigur in Abb. 4). Daß ein solches Gelenkviereck wirklich *beweglich* ist, geht auf eine Entdeckung von G. T. Bennett zurück¹². Beachtet man nämlich, daß die aus P auf OA und OB gefällten Lote PP_1 und PP_2 gegen die Knotenebene OAB unter den Winkeln α und β geneigt sind, und drückt man dementsprechend die Höhe von P über OAB auf zwei Arten durch

$$b \sin \theta \cdot \sin \alpha = -a \sin \theta \cdot \sin \beta$$

aus, so ergibt sich die Beziehung

$$\sin \alpha : \sin \beta = -a : b. \quad (4.1)$$

Hieraus folgt aber: Wird das Viereck $OAPB$ unter Erhaltung der Seitenlängen a , b und des Schrämkwinkels α verändert — was zweifellos möglich ist — so bleibt auch β konstant. Das Isogramm ist also *zwingendig beweglich*.

Mit Hilfe eines speziellen *Isogramms OAPB* mit den Schrämkwinkeln

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = -\arcsin \frac{b}{a} \quad (4.2)$$

läßt sich nun eine elementare und äußerst anschauliche Einsicht in das Wesen der Loxodromenkreise der Ringfläche gewinnen¹³. Wird nämlich die Knotenebene von O samt der zugehörigen Gelenkachse z festgehalten,

¹² G. T. Bennett: A new mechanism. Engineering **76**, 777—778 (1903). — The skew isogram mechanism. Proc. London Math. Soc. **13**, 151—173 (1914).
¹³ Einen Versuch in dieser Richtung, der jedoch noch nicht die äußerste Einfachheit aufweist, unternahm bereits R. Bricard: Démonstrations élémentaires de propriétés fondamentales du tore. Nouv. Ann. Math. **82**, 308—313 (1924).

so bildet das Isogramm einen Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden, weil sich die Arme OA und OB noch unabhängig voneinander drehen können. Die Bahnfläche Φ des Punktes P ist dabei offensichtlich eine Drehfläche mit der Achse z , und zwar ein *Torus*, da P bei festgehaltenem Arm OA einen Kreis k_0 um A durchläuft, dessen Ebene durch z geht (Abb. 4). Wird hingegen der Arm OB in irgendeiner Stellung festgehalten, so beschreibt P einen andersartigen Kreis k_1 auf Φ , der in der schräg-liegenden Knotenebene von B verläuft, und diese Ebene ist auf Grund von (4.2) eine den Torus doppelt berührende: Damit ist die Existenz der Villarceauschen Kreise überraschend einfach festgestellt. — Auch deren *Loxodromeigenschaft* ist höchst einfach einzusehen: Die Tangenten von k_0 und k_1 in P sind gegen die Knotenebene PAB unter den Schrämkwinkeln β bzw. $\alpha = \pi/2$ geneigt, bilden also miteinander den konstanten Winkel $|\sigma_1| = \frac{1}{2}\pi - |\beta|$.

Dreht sich bei festgehaltenem Arm OB der Arm OA mit konstanter Geschwindigkeit, so wird der Loxodromenkreis k_1 mit konstanter axialer Winkelgeschwindigkeit (bezüglich der z -Achse) durchlaufen; wird nun das ganze Isogramm noch einer zusätzlichen gleichförmigen Drehung um z unterworfen, so beschreibt P eine Bahnkurve k auf Φ , die aus k_1 durch eine Millersche Winkelstreckung (oder -stauchung) hervorgeht, also eine *Torusloxodrome*. Wir haben damit den bemerkenswerten

Satz 2. Werden bei einem Isogramm, dessen längeres Seitenpaar rechte Schrämkwinkel aufweist, zwei Nachbararme mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten um ihre gemeinsame, festgehaltene Gelenksachse angetrieben, so durchläuft der diesem Gelenk gegenüberliegende Knotenpunkt eine Ringflächenloxodrome.

Es liegt nahe, die auf analoge Weise von einem allgemeinen Isogramm erzeugten Bahnkurven zu betrachten, ferner die dabei herrschenden kinematischen Verhältnisse (Achsenflächen usw.) näher zu untersuchen; dies mag gelegentlich an anderer Stelle geschehen¹⁴.

Zur analytischen Darstellung der nach Satz 2 erzeugten Ringloxodrome wird noch der Zusammenhang zwischen den Isogramm-

winkeln ψ und θ benötigt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck OP_1P_2 (Abb. 4) ist abzulesen

$$\cos \psi = \frac{a \cos \theta + b}{a + b \cos \theta}, \quad \cos \theta = \frac{a \cos \psi - b}{a - b \cos \psi}. \quad (4.3)$$

Bezeichnet dann φ den von einer Durchschlagstellung des Isogramms aus gezählten Polarwinkel von OA und wird gemäß Satz 2

$$\psi = p\varphi \quad (4.4)$$

gesetzt, dann ergibt sich mit Benützung von (4.3) für die Zylinderkoordinaten r und z von P :

$$\begin{aligned} r &= a + b \cos \theta = \frac{c^2}{a - b \cos p\varphi} & \text{mit } c^2 = a^2 - b^2 \\ z &= b \sin \theta = \frac{bc \sin p\varphi}{a - b \cos p\varphi}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

in grundsätzlicher Übereinstimmung mit (3.3). Der Schnittwinkel σ ergibt sich gemäß (3.2) aus $\operatorname{ctg} \sigma = pb/c$.

Sieht man die Winkel φ und ψ als voneinander unabhängige Veränderliche an, so eignen sie sich für den vorliegenden Fragenkreis bestens als Flächenkoordinaten auf dem Ringtorus — viel besser jedenfalls als die üblichen Größen φ und θ . Die zugehörige Darstellung lautet

$$\xi = \frac{c}{a - b \cos \psi} \begin{cases} c \cos \varphi \\ c \sin \varphi \\ b \sin \psi \end{cases} \quad \text{mit } c^2 = a^2 - b^2 \quad (4.6)$$

Man überzeugt sich an Hand von Abb. 5 leicht, daß der den Parallelkreis festlegende Koordinatenwinkel ψ als Schnittwinkel der den Parallelkreis enthaltenden Orthogonalkugel des Torus mit der Mittellebene $z = 0$ gedeutet werden kann. Sämtliche Orthogonalkugeln bilden bekanntlich ein Büschel mit dem Grundkreis

$$x^2 + y^2 = c^2, z = 0.$$

Werden diese Flächenparameter φ, ψ — oder dazu proportionale Größen ξ, η — als kartesische Koordinaten in einer Bildebene angesehen, so ergibt sich damit eine (doppelperiodische) Abbildung der

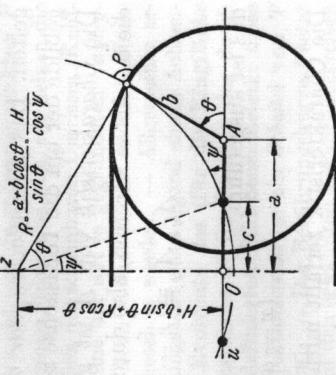


Abb. 5.

¹⁴ Hier sei vielleicht auf die bekannten ebenen Grenzfälle hingewiesen: Rotieren zwei Nachbarseiten eines *Parallelogramms*, bzw. *Antiparallelogramms* mit proportionalen Geschwindigkeiten um ihren gemeinsamen, festen Eckpunkt, so durchläuft die Gegenäcke eine *Radline* (G. Bellermann), *Epizykloiden* und *Hypozykloiden*; Diss. Jena 1867), bzw. die *Inversen* einer solchen (F. Morley, On adjustable cycloidal and trochoidal curves; Amer. J. Math. 16/1894).

Ringfläche auf einer Ebene, bei der sämtliche *Loxodromen* in *Gerade* übergehen. Sorgt man insbesondere dafür, daß die durch $\operatorname{ctg} \sigma = \pm i$, also $p = \pm ic/b$, gekennzeichneten *Minimalloxodromen* $\psi = p\varphi + \text{const}$ in *Minimalgeraden* $\eta = \pm i\xi + \text{const}$ übergeführt werden, was etwa durch

$$\xi = c\varphi, \eta = b\psi \quad (4.7)$$

bewerkstelligt wird, so liegt eine *konforme Abbildung* vor. Diese vielgenannte Abbildung wird durch die oben angeführte geometrische Interpretation der Koordinaten φ und ψ hiemit einer einfachen konstruktiven Behandlung zugänglich gemacht.

5. Tangentenleitflächen.

Fäßt man alle ∞^1 zu einem bestimmten (vorzeichenbegabten) Schnittwinkel σ gehörigen Loxodromen eines Torus Φ , die offensichtlich eine Drehsschar erfüllen, ins Auge, so erhält man in der Gesamtheit der ∞^2 zugehörigen Loxodromentangenten eine *rotationssymmetrische Strahlkongruenz* Σ . Diese Kongruenz kann im ∞^1 kongruente Regelscharen 2. Grades zerlegt werden, die sich durch Zusammenfassung der Loxodromentangenten längs der Meridiankreise des Torus ergeben und deren Trägerflächen *einschalige Drehhyperboloiden* A vom Öffnungswinkel $\pi - 2|\sigma|$ sind; dieselben berühren den Torus längs des betreffenden Meridiankreises, der gleichzeitig ihren Kehlkreis abgibt. Als Prototyp mag das zum Meridian $\varphi = 0$ gehörige Hyperboloid

$$A \equiv (x - a)^2 + z^2 - y^2 \operatorname{ctg}^2 \sigma - b^2 = 0 \quad (5.1)$$

gelten. Das *Brennflächenpaar* der Kongruenz Σ kann dann als Hüllgebilde der um die Torussachse z rotierenden Fläche A gefunden werden. Die Charakteristik von A ist gekennzeichnet durch Flächennormalen, die die Achse z treffen, also durch die Bedingung

$$A_x : A_y \equiv (x - a) : -y \operatorname{ctg}^2 \sigma = x : y, \quad (5.2)$$

das ist ausgeführt

$$(x - a \sin^2 \sigma) y = 0.$$

Die Charakteristik zerfällt mithin — wie vorauszusehen war — in den *Meridiankreis* $y = 0$ und eine *Hyperbel* in der Ebene $x = a \sin^2 \sigma$, so daß neben dem *Torus* Φ als zweite Brennfläche von Σ ein koachsiales *Drehhyperboloid* Ψ

$$(x^2 + y^2) \operatorname{ctg}^2 \sigma - z^2 = a^2 \cos^2 \sigma - b^2 \quad (5.3)$$

auftritt. Dieses Hyperboloid ist für den Spindeltorus und seinen Grenzfall ($a \leq b$) stets zweischalig, während es beim Ringtorus ($a > b$) einschalig oder zweischalig ausfällt, je nachdem ob steilgängige ($p^2 > 1$) oder flachgängige ($p^2 < 1$) Loxodromen vorliegen. — Die beiden Brennflächen Φ und Ψ berühren einander längs jener beiden Parallelkreise, die von dem gemeinsamen Punktpaar der beiden Bestandteile der Charakteristik von A herrühren; sie haben den gemeinsamen Radius $a \sin^2 \sigma$ und liegen in den Ebenen $z^2 = b^2 - a^2 \cos^4 \sigma$, brauchen daher beim Ringtorus nicht unbedingt reell zu sein.

Das festgestellte Brennhyperboloid Ψ wird von allen Tangenten — und mithin auch von allen Schmiegebenen — jeder σ -Loxodrome von Φ berührt; Ψ soll daher kurz als „*Leitfläche*“ angesprochen werden. Zusammenfassend gilt

Satz 3. *Sämtliche Tangenten und Schmiegebenen einer Torusloxodrome berühren ein koachsiales Drehhyperboloid, das dem Torus längs zweier Parallelkreise angeschrieben ist.*

Die *Berührungsstrecke* l der Tangentenfläche der Ringloxodrome k (3.3) mit ihrem Leithyperboloid Ψ (5.3) wird beschrieben durch

$$l = \frac{\sin^2 \sigma}{p \sin p\varphi} \begin{cases} ap \sin p\varphi \cos \varphi - (a \cos p\varphi + b \cdot p^2 - 1) \sin \varphi \\ ap \sin p\varphi \sin \varphi + (a \cos p\varphi + b \cdot p^2 - 1) \cos \varphi \end{cases} \quad (5.4)$$

wobei $\operatorname{ctg} \sigma = bp/c$ und $c^2 = a^2 - b^2$.

Die *Konstruktion* dieser Kurve l wird durch die Abbildungen 2 und 3 zur Genüge illustriert: Man hat bloß jede einzelne Tangente t der Loxodrome k mit jener im Abstand $a \sin^2 \sigma$ parallel zur Achse verlaufenden Hilfsellipse zu schneiden, die zur Meridianebene des betrachteten Loxodromenpunktes P normal ist. Da die Tangente t' von l die reziproke Polare von t ist, erscheinen die Grundrissgeraden t' und \bar{t}' konjugiert bezüglich des scheinbaren Umrisses (Kehlkreises) m von Ψ , also „orthogonal“ im Sinne der auf m gegründeten *Cayley-Kleinischen Metrik*: Die *Grundlinie* l' kann demnach als *nichteuklidische Evolute des Loxodromengrundrisses* k' angesehen werden. — Allgemeiner erscheint die *Zentralprojektion* l'' der Berührungsstrecke aus irgend einem Achsenpunkt auf eine achsennormale Ebene als Evolvente des (für die Ringfläche im Abschn. 3 gekennzeichneten) Loxodromenrisses k'' im Rahmen der durch den scheinbaren Umriß der Leitfläche Ψ definierten Bildebenenmetrik; diese ist im besonderen *euklidisch*, wenn als Projektionszentrum ein *Scheitel* von Ψ genommen wird (stereographische Projektion). — Die Berührungsstrecke l setzt auf der Loxodrome k mit *Spitzen* auf, was auf den erwähnten Berührungs Kreisen von Φ und Ψ geschieht (vgl. Abb. 3).

Ein Wort noch über die in den Abbildungen angewandte *Tangentialkonstruktion* der Torusloxodromen, der die Vorstellung des Hilfshyperboloids A und dessen Erzeugendenrichtkegels zu Grunde liegt: Man erhält die *Richtung* der zu einem Punkt P gehörigen Loxodromentangente t , wenn man P einer

Viertelschwenkung auf dem Meridiankreis unterwirft und den so (durch einfache Vertauschung der Horizontal- und Vertikalketten $w = MP'$ und $z = P'P$) gewonnenen Punkt T' mit jenem Punkt S der Meridiankreissachse verbindet, der von der Meridiankreismitte M den Abstand $MS = b \operatorname{tg} \sigma$ hat; es ist dabei bequem — wie dies in Abb. 2 u. 3 geschah — auf S und T' noch die Parallelverschiebung um den Vektor MO auszuführen.

6. Nichteuklidische Deutungen.

1. Wird mit K. Strubecker⁴ die die Knotenpunkte I, J enthaltende Kugel Ω ($x^2 + y^2 + z^2 = b^2 - a^2 = \pm c^2$) als *Grundkugel* des sogenannten *konformen Modells eines nichteuklidischen Raumes* aufgefaßt, dessen „Geraden“ und „Ebenen“ in bekannter Weise durch die Orthogonalkreise, bzw. -kugeln von Ω dargestellt werden und dessen Winkelmetrik mit der gewöhnlichen übereinstimmt, dann kann der *Torus* Φ als *Abstandsfläche* der Achse z und in diesem Sinne als (Clifford'scher) „Dreizylinder“ angesprochen werden. Die Metrik ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ ist; Ω ist dementsprechend eine reelle, singuläre, bzw. nullteilige Kugel¹⁵. Die Inversionen an den Orthogonalkugeln von Ω — einschließlich der Spiegelungen an den Durchmesserebenen von Ω — sind als nichteuklidische „Spiegelungen“ anzusehen, während jede aus zwei solchen „Spiegelungen“, zusammengesetzte gleichsinnig-konforme Automorphie von Ω als „Drehung“ zu bezeichnen ist, deren „Achse“ die punktweise festbleibende Schnittlinie der beiden Spiegelebenen ist. Die Abstandsfläche Φ verträgt naturgemäß zwei Arten von Drehungen: Solche um die Achse z (die mit den euklidischen Drehungen um z übereinstimmen), und solche um die Achse des Büschels der „Normalebenen“ von z , repräsentiert durch den Kreis u ($x^2 + y^2 = a^2 - b^2 = \mp c^2$, $z = 0$). Die aus zwei Drehungen verschiedener Art zusammen gesetzte Transformation kann dann als „Schraubung“ um das Achsenpaar z, u bezeichnet werden, wenngleich man diesen Namen besser der durch Iteration und infinitesimale Verdichtung daraus hervorgehenden eingliedrigen kontinuierlichen Gruppe vorbehalten wird, wie dies auch im Euklidischen üblich ist. Die „Schraublinien“, also die Bahnkurven einer solchen Gruppe im Sinne von S. Lie, verlaufen nach allem auf den ∞^1 Abstandsflächen Φ von z (und u) und durchsetzen das invariante Meridiansomstystem

einer solchen Fläche unter *konstantem Schnittwinkel*, sind also identisch mit den *Torusloxodromen*.

Satz 4. *Im Rahmen der bekannten konformen Modelle nichteuklidischer Räume können die Loxodromen des Spindel-, bzw. Ringtorus als hyperbolische, bzw. elliptische Schraublinien aufgefaßt werden, wenn als absolutes Gebilde die konzentrische, die Torusknoten enthaltende Kugel gewählt wird.*

Der in Abschnitt 1, bzw. 3 eingeführte „Parameterwert“ p spielt jetzt die Rolle des *Schraubparameters*: Er stellt den konstanten Quotienten zwischen der Schiebstrecke längs der Schraubachse z (= Drehwinkel φ um u im elliptischen Fall) und dem Drehwinkel φ um z dar. — Die im elliptischen Fall zu $p = \pm 1$ gehörigen *Loxodromenkreise* sind übrigens Orthogonalkreise von Ω , also im Sinne der Modellgeometrie als *Gerade* anzusehen; diese (bei K. Strubecker im Vordergrunde stehenden) speziellen Schraubungen sind als *Cliffordsche Schiebungen* anzusprechen.

2. Wird, im Gegensatz zur ersten Auffassung, die Kugel Ω^* ($x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2 = \mp c^2$) zur Grundkugel eines konformen nichteuklidischen Raummodells erklärt, dann hat der Torus Φ , „gerade“ Meridiane und kann demnach als „Drehkegel“ mit der Achse z angeprochen werden¹⁶. Hierfür könnte übrigens an Stelle von Ω^* jede andere Orthogonalkugel von Φ treten. Jedenfalls gilt

Satz 5. *Die Loxodromen des Spindel- und Ringtorus können im Rahmen konformer Raummodelle als nichteuklidische Drehkegelloxodromen angeschaut werden, wenn als absolutes Gebilde irgend eine Orthogonalkugel des Torus gewählt wird.*

3. Mittels der wohlbekannten eindeutigen „Darbouxschen Transformation“, die jedem bezüglich Ω inversen Punktpaar den Pol seiner Symmetrieebene zuordnet, kann der Übergang vom konformen zum projektiven Modell eines nichteuklidischen Raumes im Sinne von A. Cayley und F. Klein vollzogen werden. Hier haben jetzt die Geraden und Ebenen wieder ihr gewohntes Aussehen, und die Metrik wird durch gewisse Doppelverhältnissebeziehungen gegenüber der „absoluten“ Maßfläche Ω erklärt; als kongruente Transformationen gelten nunmehr die automorphen Kollineationen von Ω . Die *Torusloxodromen* in ihrer Deutung gemäß Satz 4 werden nun durch die *Darbouxsche Transformation* in die von K. Strubecker und später auch vom Verfasser untersuchten *nichteuklidischen Schraublinien projektiven Charakters* über-

¹⁵ Eine eingehende konstruktive Behandlung dieser Raummodelle entwickelte E. Kruppa: Darstellende Geometrie im Kugelgebüsch. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 140, 369—397 (1931).

geführt, die sich als spezielle *W-Kurven* und *Gewindefluren* auf Flächen 2. Grades erweisen¹⁶.

4. Werden die Torusloxodromen hingegen in ihrer Deutung nach Satz 5 der Darbouxtransformation unterworfen, so gelangt man zu *nichteuklidischen Drehkegelloxodromen* im Rahmen des *Cayley-Kleinschen Raummodells*. Diese bisher anscheinend noch nicht beachteten Kurven sind durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß ihre Tangenten jeweils eine *konzyklische Drehfläche 2. Ordnung* berühren. Um dies einzusehen, bedenke man, daß die zu einem bestimmten Schnittwinkel σ gehörigen Loxodromentangenten in den Punkten einer Kegelerzeugenden einen in der Tangentialebene liegenden „Kreis“ einhüllen, durch dessen Rotation um die Kegelachse die genannte *Tangentenleitfläche entsteht*¹⁷.

Die speziell aus den Loxodromen der Ringfläche hervorgehenden hyperbolischen Loxodromen von Drehkegel mit uneigentlicher Spitze präsentieren sich in der hier auftretenden Form als *achsigial-winkelgezerrte Kegelschmitte* auf einem euklidischen Drehkegel, im besonderen als die in Satz 1 genannten, auf einen Drehzyylinder aufgewickelten Sinuslinien, da es sich ja um Zentralprojektionen der Torusloxodromen aus Achsenpunkten auf kochsiale Drehkegel oder -zyylinder handelt. Die zu $p = \pm 1$ gehörigen *Loxodromenkreise* eines nichteuklidischen Drehkegels verdienen besondere Beachtung.

7. Die Torusloxodromen als D-Linien.

Jene ∞^2 auf einer gegebenen Fläche verlaufenden Kurven, deren Schmiekgugeln die Fläche berühren, werden „*D-Linien*“ genannt, nach G. Darboux, der sie als erster betrachtete¹⁸. Auf Grund der Definition handelt es sich hierbei offenbar um einen der konformen Geometrie eigenen Begriff: Die D-Linien inverser Flächen entsprechen einander. Daß die D-Linien eines euklidischen *Drehzyinders* durch seine *Loxodromen*, also die auf ihm verlaufenden *Schraublinien* dargestellt werden, ist bekannt und liegt an deren achsialer Symmetrie bezüglich

¹⁶ K. Strubecker: Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 139, 421–450 (1930). — Über nichteuklidische Schraubungen. Mh. Math. Phys. 38, 63–84 (1931). — W. Wunderlich: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Mh. Math. Phys. 44, 249–279 (1936).

¹⁷ Auf derartige Drehkegelfluren, deren Tangentenleitflächen aber speziell kochsiale Kugeln sind, stieß der Verfasser bei den *pseudogeodätischen Linien des Drehkegels*; vgl. die in Fußnote 10 genannte Abhandlung.

¹⁸ G. Darboux: Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. C. R. 73, 732–736 (1871).

der Hauptnormalen. Dieser Sachverhalt gilt mit analoger Begründung auch noch in nichteuklidischer Erweiterung: *Jede nichteuklidische Schraublinie ist D-Kurve des sie tragenden Cliffordschen Drehzyinders*. Da im Rahmen eines konformen Raummodells die nichteuklidischen Kugeln durch euklidische Kugeln repräsentiert werden, folgt aus Satz 4 der

Satz 6. *Die Loxodromen des Torus sind mit seinen D-Linien identisch.*

Für diese vom Verfasser auf dem angedeuteten Weg schon früher festgestellte Tatsache¹⁹ soll hier noch ein direkter Beweis kurz auseinandergesetzt werden: Die beiden durch einen Toruspunkt P gehenden Loxodromen k und \bar{k} mit den Schnittwinkeln $+\sigma$ und $-\sigma$ werden sowohl durch die Spiegelung an der Meridianebene von P als auch durch die Inversion an der P enthaltenden Orthogonalkugel des Torus vertauscht; hierbei werden natürlich auch die Schmiekgugeln Σ und $\bar{\Sigma}$ in P miteinander vertauscht, was nur möglich ist, wenn sie zusammenfallen. Die gemeinsame Schmiekgugel $\Sigma = \bar{\Sigma}$ von k und \bar{k} wird dann aber den Torus in P berühren, was zu beweisen war. — Auf gleiche Weise lassen sich natürlich auch die Loxodromen des *Drehkegels* mit seinen D-Kurven identifizieren.

Die Frage nach dem *Ort der Schmiekgugelzentren* einer Torusloxodrome k , also ihrer *Planevolute*, ist im *nichteuklidischen Sinne* gemäß Abschn. 6, 1 leicht zu beantworten: Die Schmiekgugeln der „Schraublinie“ k gehen durch Schraubung auseinander hervor, daher erfüllen ihre nichteuklidischen Mittelpunkte selbst eine *Schraublinie*, d. i. ein Loxodromenpaar auf einem Torus, der mit der Trägerfläche von k gemeinsame Knotenpunkte hat. Unter dem nichteuklidischen „Mittelpunkt“ einer Kugel Σ ist dabei bekanntlich das allen „Normalen“ gemeinsame, also bezüglich Σ und der Grundkugel Ω inverse Punktpaar zu verstehen; es liegt auf dem gemeinsamen Durchmesser von Σ und Ω und gibt die Mitten der im Büschel $\Sigma\Omega$ enthaltenen Nullkugeln ab.

Um Aussagen über die *euklidische Planevolute k^** zu gewinnen — die nach dem Gesagten jedenfalls dieselbe Zentralprojektion aus der Torusmitte O liefert, wie die nichteuklidische — beachte man zunächst, daß die Schmiekgugeln Σ der Loxodrome k neben dem Trägertorus Φ noch einen zweiten Torus $\bar{\Phi}$ mit denselben Knotenpunkten I und J berühren. Dies geht unmittelbar aus der Vorstellung der nichteuklidischen

¹⁹ W. Wunderlich: Euklidische und nichteuklidische D-Linien auf Quadriken. Ann. di mat. 33, 145–164 (1952).

dischen Schraubung hervor, kann aber auch durch Zurückgehen auf die Spinaulung mittels der in Abschn. 1 verwendeten Inversion \mathfrak{J} gefolgt werden (vgl. Abb. 1). Aus der Tatsache, daß die Kugeln Σ zwei koochiale Tori Φ und $\bar{\Phi}$ berühren, folgt dann weiter, daß ihre Mittelpunkte auf einer gewissen, durch Rotation eines *Kegelschnittes* erzeugten *Drehfläche*

4. Ordnung Φ^* liegen, die die Mittenkreise von Φ und $\bar{\Phi}$ zu Fokalkurven hat und gleichfalls in I und J Knoten aufweist. Sammelt man ferner die Normalebenen der Loxodromenelemente längs der Meridiankreise, so hüllen sie ∞^1 Drehkegel mit der Öffnung 2σ ein, die ihrerseits ein einschichtiges Drehhyperboloid Ψ^* vom Öffnungswinkel $\pi - 2\sigma$ einhüllen, das den Mittenkreis von Φ zur Fokalkurve hat, also durch

$$\frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \sigma} - \frac{z^2}{\sin^2 \sigma} = a^2 \quad (7.1)$$

beschrieben wird. Dieses Hyperboloid wird von allen Normalebenen und mithin auch von den Krümmungsachsen der σ -Loxodrome k berührt, stellt also eine *Tangentenleitfläche der Planevolute* k^* dar.

Nach allem bestehen somit zwischen den Torusloxodromen und ihren Planevolutonen weitgehende Analogien. Dies geht auch aus der Parameterdarstellung hervor, die hier nur für den Fall des Ringtorus wiedergegeben werden soll. Ausgehend von der Loxodromengleichung (3.3) bestimmt man durch Ableitung nach φ zunächst einen Tangentenvektor und damit die Gleichung der Normalebene ν

$$\begin{aligned} ex & [(a - b \cos p\varphi) \sin \varphi + bp \sin p\varphi \cos \varphi] \\ & - cy [(a - b \cos p\varphi) \cos \varphi - bp \sin p\varphi \sin \varphi] \\ & + bpz (b - a \cos p\varphi) = abcp \sin p\varphi. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Zweimalige Differentiation dieser Gleichung nach φ führt auf zwei weitere Ebenen $\dot{\nu}$ und $\ddot{\nu}$, die im Schnitt mit ν das zum Punkt $P(\varphi)$ gehörige *Schmiekgugelzentrum* P^* liefern; auf Grund von Satz 6 genügt es aber auch, $\dot{\nu}$ mit der Torusnormale in P zu schneiden. Nach langerer Rechnung stellt sich schließlich ein recht einfaches Resultat ein: Die Darstellung der *Planevolute* k^* lautet:

$$k^* = \frac{a}{b(p^2 - 1) + a \cos p\varphi} \begin{cases} bp^2 \cos \varphi \\ bp^2 \sin \varphi \\ -c \sin p\varphi \end{cases} \quad (7.3)$$

Der *Schmiekgugelradius* hat den Wert

$$R = \frac{b^2 p^2 + c^2}{b(p^2 - 1) + a \cos p\varphi}. \quad (7.4)$$

Diese Formel gestattet eine einfache Überprüfung, wenn man beachtet, daß die Schmiekgugel einer D-Line mit der *Meusnierkugel* des betreffenden Linienelementes identisch sein muß.

Der Vergleich der Formeln (7.3) und (7.4) zeigt, daß zwischen dem Schmiekgugelradius R und dem Achsenabstand r^* der Schmiekgugelmitte Proportionalität herrscht. Der *Proportionalitätsfaktor*

$$\varepsilon = \frac{R}{r^*} = \frac{b^2 p^2 + c^2}{abp^2} = \frac{b}{a \cos^2 \sigma} \quad (7.5)$$

gibt offenbar die *numerische Exzentrizität des Meridiankegelschnittes* der Trägerfläche Φ^* von k^* an. Dieser Meridian ist mithin eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem $\varepsilon \gtrless 1$, d. h. $\cos^2 \sigma \gtrless b/a$. Dementsprechend ist auch der Grundriß von k^* eine um ihren Brennpunkt O winkelgestreckte Hyperbel, Parabel, bzw. Ellipse.

Im *hyperbolischen Falles* ($\cos^2 \sigma < b/a$) existieren reelle uneigentliche Schmiekgugelzentren, die Loxodrome besitzt also stationäre Schmiegebene oder (in der Ausdrucksweise von K. Zindler) reelle „*Henkelpunkte*“. Diese Stellen liegen, wie leicht einzusehen ist, auf den beiden in Abschn. 5 erwähnten Berührungs Kreisen des Torus Φ mit dem Leit hyperboloid Ψ , und fallen mit den Spitzen der Berührungscurve l zusammen (vgl. Abb. 3). Die Loxodromentangenten sind hier Schmiegtangenten des Torus. — Im *parabolischen Falles* ($\cos^2 \sigma = b/a$) rücken je zwei Henkelpunkte in einem Kehlpunkt zusammen, wo die Loxodrome eine dreipunkig berührende *Wendetangente* aufweist.

Im *elliptischen Falles* ($\cos^2 \sigma > b/a$) ist die Planevolute k^* , wie ihre Gleichung zeigt, eine *affine Torusloxodrome* gleichen Parameters p . Hier kann man die Frage aufwerfen, ob k^* wohl zur Ausgangsloxodrome k selbst affin sein kann? In diesem Fall müßten die Nemerkoefizienten in (3.3) und (7.3) gleiches Betragverhältnis besitzen; die Bedingung $b(p^2 - 1) : a = \pm a : b$ führt nun einmal auf $\operatorname{ctg} \sigma = bp/c = \pm i$, also auf die *Minimalloxodromen*, die ja mit ihren Planevoluten sogar identisch sind, das andere Mal jedoch auf den nichttrivialen Wert $p^2 = 1 + (a/b)^2$.

Damit ergibt sich der bemerkenswerte

Satz 7. *Auf jedem Ringtorus gibt es reelle Loxodromen, die zu ihren Planevoluten affin sind. Ihr Meridianschnittswinkel σ steht zum Meridian-schnittswinkel σ_1 der Loxodromenkreise in der Beziehung $2 \sin^2 \sigma = \sin^2 \sigma_1$.*

Es muß betont werden, daß in der bestehenden Affinität keineswegs den Loxodromenpunkten die zugehörigen Schmiekgugelzentren zugeordnet werden. Dies würde auch im Widerspruch zu einer früheren Feststellung des Verfassers sein, wonach die einzigen reellen Raumkurven, deren Punkte mit den zugehörigen Schmiekgugelzentren durch eine Affinität gekoppelt sind, die D-Linien der Flächen 2. Ordnung sind²⁰. Der Zusammenhang zwischen der Torusloxodrome und ihrer affinen Planevolute ist vielmehr etwa von der Art, wie in der Ebene der Zusammenhang zwischen den Zykloiden und ihren ähnlichen Evoluten.

²⁰ W. Wunderlich: Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken. Mh. Math. **55**, 76—81 (1951).