

Die Bahnkurve eines allgemeinen Punktes der Mittelebene  $\Gamma$  liegt ganz in dieser Ebene und ist, wieder wegen der Winkeltreue, eine Isogonaltrajektorie des Strahlbüschels ( $O\Gamma$ ), also eine logarithmische Spirale. Projektieren wir diese Kurve aus  $U$ , so erhalten wir einen offenbar invarianten „Spiralzyylinder“  $\Lambda$ . Es gibt  $\infty^1$  solcher Zylinder und sie gehen durch Drehung um  $z$  auseinander hervor.

Die Bahnkurve eines allgemeinen Raumpunktes liegt ganz auf einem Fixkegel  $\Sigma$  und einem Spiralzyylinder  $\Lambda$ . Wegen des letzteren Umstandes erscheint sie im Normalriss auf einer zur Achse senkrechten Ebene als logarithmische Spirale. Infolge der Winkeltreue ist sie gleichzeitig Isogonaltrajektorie der Erzeugendenscharen beider Flächen. Die Kurve war der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen<sup>2)</sup>.

Eine Ähnlichkeit  $\mathcal{E}$  unserer Gruppe verdreht die Ebenen des Büschels  $z$  alle um denselben Winkel  $\sigma$ ; wenden wir auf die Punkte des Raumes an Stelle von  $\mathcal{E}$  die Drehung um  $z$  mit dem Winkel  $\sigma$  an, so erreichen sie, auf den Parallelkreisen der Fixkegel wandernd, gerade jene Erzeugenden, auf denen sich auch ihre durch  $\mathcal{E}$  erzeugten Endlagen befinden. Mit diesen Endlagen hängen sie jetzt nach erfolgter Drehung nur mehr durch eine zentrische Ähnlichkeit zusammen.  $\mathcal{E}$  läßt sich mithin aus einer Drehung um  $z$  und einer Streckung von  $O$  aus zusammensetzen, wobei die Reihenfolge gleichgültig ist<sup>3)</sup>. Das Gleichungssystem der Drehungsgruppe (in Zylinderkoordinaten  $\varphi, r, z$ )

$$(1) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \sigma \\ r &= r_0 \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

liefert zusammen mit dem der Streckungsgruppe

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \\ r &= e^{p\sigma} r_0 \\ z &= e^{p\sigma} \cdot z_0 \end{aligned}$$

das Gleichungssystem der Spiralung

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \sigma \\ r &= e^{p\sigma} \cdot r_0 \\ z &= e^{p\sigma} \cdot z_0 \end{aligned}$$

Dasselbe in kartesischen Koordinaten  $x, y, z$ <sup>3)</sup>:

<sup>2)</sup> G. Scheffers, Besondere transzendente Kurven. Enzykl. d. math. Wiss., III D 4, Nr. 34.

<sup>3)</sup> G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. I, S. 146 ff. Monatsh. für Mathematik und Physik, 46. Band.

## Darstellende Geometrie der Spiralfächen.

Von Walter Wunderlich in Wien.

Mit 3 Figuren im Text.

**I. Die Spiralung.** Als „Spiralung“ wird die allgemeine eingliedrige kontinuierliche Ähnlichkeitsgruppe des dreidimensionalen euklidischen Raumes bezeichnet<sup>1)</sup>. Vom projektiven Standpunkt aus gesehen ist eine Ähnlichkeit eine automorphe Kollineation des absoluten Kugelkreises, welche genau einen endlichen Fixpunkt  $O$  besitzt. Durch eine solche Raumtransformation werden die Punkte des Kugelkreises in projektiver Weise vertauscht; die beiden (konjugiert komplexen) Doppelpunkte  $I_1, I_2$  dieser Projektivität sind samt dem (reellen) Schnittpunkt  $U$  ihrer Tangenten die drei weiteren Festpunkte der betrachteten (reellen) Ähnlichkeit sowie der über denselben errichteten eingliedrigen Gruppe. Die Gerade  $z = [OU]$ , die wir uns stets lotrecht denken, bleibt daher im Verlauf der Spiralung als ganzes fest und heißt deren „Achse“. Die zweite reelle Fixgerade der Spiralung ist  $u = [I_1, I_2]$ , die Ferngerade der waagrechten Stellung. Fixebenen sind die Seitenflächen des Doppelwürfels  $OUI_1I_2$ , also die Fernebene, die Horizontalebene  $\Gamma$  durch  $O$ , kurz „Mittelebene“ genannt, sowie die Minimalebenen durch die Achse.

Wegen ihrer grundlegenden Bedeutung sei die Winkeltreue der Spiralung besonders hervorgehoben, eine Folge der Invarianz des absoluten Kugelkreises, auf den sich die euklidische Winkelmetrik gründet.

So bleibt im Verlauf der Spiralung etwa jener Winkel ungeändert, den ein Strahl des Bündels  $O$  mit der Achse  $z$  einschließt; dieser Strahl beschreibt infolgedessen einen Drehkegel mit der Achse  $z$  und dem Scheitel  $O$ . Es gibt  $\infty^1$  solcher Kegel  $\Sigma$ , die invariant sind und deshalb kurz als „Fixkegel“ bezeichnet werden; sie schneiden die Fernebene nach einer Büschelschar von  $\infty^1$  „Fixkegelschnitten“  $s_u$ , die alle den absoluten Kreis in  $I_1$  und  $I_2$  berühren.

<sup>1)</sup> Lie-Scheffers, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen (Leipzig 1891), S. 243, 260. — Beziüglich weiterer Literaturhinweise vgl. R. v. Lilienthal, Besondere Flächen, Enzykl. d. math. Wissenschaften, III D 5, Nr. 7.

$$(3') \quad \begin{aligned} x &= e^{p\sigma}(x_0 \cos \sigma - y_0 \sin \sigma) \\ y &= e^{p\sigma}(x_0 \sin \sigma + y_0 \cos \sigma) \\ z &= e^{p\sigma} \cdot z_0. \end{aligned}$$

Die hierin auftretende Zahlengröße  $p$  mag der „Parameter“ der Spiralführung genannt werden.

(3) gibt bei festem  $\varphi_0, r_0, z_0$  und veränderlichem  $\sigma$  die Parameterdarstellung der Bahnkurve des Punktes  $(\varphi_0, r_0, z_0)$  in Zylinderkoordinaten; ihr Grundriß lautet in Polarkoordinaten  $\varphi, r$

$$(4) \quad r = r_0 \cdot e^{p(\varphi - \varphi_0)}.$$

Der konstante, für alle Bahnkurven gleiche Schnittwinkel  $\alpha$  dieser logarithmischen Spirale mit den Radiusvektoren ergibt sich aus

$$(5) \quad \operatorname{ctg} \alpha = r' : r = p,$$

womit der Parameter geometrisch gedeutet ist.

Jede Bahnkurve der Spiralführung gestattet die folgende diskontinuierliche Gruppe zentrischer Ähnlichkeiten:

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= x_0 \cdot e^{2p\pi\lambda} \\ y &= y_0 \cdot e^{2p\pi\lambda} \\ z &= z_0 \cdot e^{2p\pi\lambda} \end{aligned} \quad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Jede Parallelprojektion einer Bahnkurve ist somit eine sog. „abnehmende Laufmusterkurve“<sup>4)</sup>; so heißen nämlich die ebenen Kurven, welche eine Streckungsgruppe vertragen.

**II. Grundlagen der zeichnerischen Behandlung.** Wir wählen eine zur Mittellebene  $\Gamma$  ( $z = 0$ ) parallele Bildebene  $\Pi$ , auf welche wir einen Raumpunkt  $P$  einmal aus  $O$  und ein zweitesmal aus  $U$  projizieren. Auf diese Weise werden ihm zwei Bildpunkte, der Zentralriß  $P^o$  und der Grundriß  $P'$  zugeordnet, die stets an einem Strahl durch  $O = U^o$ , einen „Ordner“, gebunden sind.<sup>5)</sup>

Unsere Fixkegel  $\Sigma$  bzw. Spiralzylinder  $\Lambda$  sind projizierende Flächen für den Zentral- bzw. Grundriß. Die Bahnkurven der Spiralführung erscheinen im Zentralbild als Kreise um  $O'$ , während ihre Grundrisse eine Drehschar von logarithmischen Spiralen (4) bilden. Die Spiralführung erscheint bekanntlich aus dem Ursprung unter rechten Winkel.

<sup>4)</sup> G. Loria, Spezielle algebr. u. transz. Kurven, Bd. II, S. 215. Auf diese Weise könnte dort Fig. 43 entstanden sein, aber nicht, wie angegeben wird, durch Zentralprojektion einer gewöhnlichen Schraublinie.

<sup>5)</sup> Über die Ausnahmestellen dieses besonderen „linearen Zweibildersystems“ siehe Müller-Krappa, Vorlesungen über darst. Geometrie, Bd. I, „Die linearen Abbildungen“, Nr. 44.

des Raumes induziert im Zentralrißfeld eine Drehung um  $O'$ , im Grundrißfeld eine ebene Spiralführung mit den Bahnkurven (4).

Wir haben uns vor allem mit der Aufgabe zu befassen, die zu einem bestimmten Winkel  $\sigma$  gehörige Spiraltransformation (3) von bekanntem Parameter  $p$  auf einen Punkt  $P$  anzuwenden, der durch sein Bildpunktpaar  $P^o \cdot P'$  festgelegt ist.  $P^o$  beschreibt ursprüchlich einen Kreisbogen vom Zentralkinkel  $\sigma$  um  $O'$ , während  $P'$  — stets durch einen Ordner an  $P^o$  gekoppelt — sich auf einer der logarithmischen Spiralen (4) bewegt. Liegt eine dieser Spiralen gezeichnet vor<sup>6)</sup> und läßt man diese „Normspirale“ als Konstruktionsmittel zu, was sich insbesondere für kleinere Parameterwerte sehr gut bewährt, so erfordert die zeichnerische Lösung unserer Aufgabe bloß das Ziehen einer Parallele (Fig. 1):

$$P' \bar{P}' \parallel N' \bar{N}'.$$

Die nun folgenden Ausführungen sind analog zu bekannten Sätzen und Konstruktionen bei der euklidischen Schraubung<sup>7)</sup>. Bezeichnungen und Begriffsbildungen sind von dort entlehnt. Durch einen geeigneten Grenzübergang ließen sich aus den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung jene der Schraubung gewinnen.

Bevor wir an die Abbildung von Bahntangenten und Bahnschmiegen<sup>8)</sup> ebenen der Spiralführung schreiten, erinnern wir uns, daß jede Bahnkurve Isogonaltrajektorie der Erzeugendenschar eines (lotrechten) Spiralzylin-ders  $\Lambda$  ist, mithin zu den Böschungslinien gehört. Ihre Tangenten und Schmiegenbahn haben feste Neigung gegen die Mittellebene und erfüllen bzw. umhüllen eine Böschungsfläche, die wir Spiraltorse nennen wollen. Ihr Richtkegel ist ein Drehkegel mit lotrechter Achse, ihre Erzeugenden infolgedessen Falllinien.

**Satz 1.** Die Bahntangente  $t$  eines Raumpunktes  $T$  ist Falllinie seiner Bahnschmiegebene  $\tau$ .

Die Bilder der Bahntangenten  $t$  eines Raumpunktes  $T$  sind leicht gezeichnet (Fig. 1): Ihr Zentralriß  $t^o$  ist in  $T^o$  Tangente an den

<sup>6)</sup> Um die log. Spirale  $r = a \cdot e^{p\varphi}$  zu zeichnen, berechne man etwa  $r$  für  $\varphi = \pi$  und schalte nun konstruktiv zwischen die beiden bekannten Punkte  $(0, a)$  und  $(\pi, ae^{p\pi})$  nach Bedarf weitere durch Winkelhalbierung ein. Der den Winkel zweier Radiusvektoren halbirende Vektor ist gleich ihrem geometrischen Mittel. Der Tangentenwinkel  $\alpha$  ist aus (5) bekannt. Der Krümmungsradius hat die Länge  $r = r : \sin \alpha$ ; er erscheint bekanntlich aus dem Ursprung unter rechten Winkel.

<sup>7)</sup> Th. Schmid, Darstellende Geometrie (Sammlung Schubert 65), Bd. II, S. 215 ff. Ähnliche Grundsätze werden zur Behandlung anderer Flächengattungen verwendet von E. Müller, Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schieb- und Schraubflächen S.-B. d. Akad. d. Wiss. Wien, Bd. 120 (1911).

Kreis um  $O'$ , der ja das Zentralbild der Bahnkurve von  $T$  darstellt, während ihr Grundriß  $t'$  in  $T'$  den aus (5) bekannten Winkel  $\alpha$  mit dem Ordner einschließt.

Der zu  $t'$  parallele Ordner liefert auf  $t^e$  das Zentralbild des Fernpunktes  $T_u$  der Tangente  $t$ , also deren Fluchtpunkt  $T_u^e$ . Umgekehrt wird  $t'$  von dem zu  $t^e$  parallelen Ordner im Grundriß des Verschwindungspunktes  $T_0 = [t^e]$  getroffen, den wir, wie jedes Spurelement in der Mittelebene  $\Gamma$ , „Mittelspur“ (von  $t$ ) nennen wollen.

Nunmehr läßt sich auch die Bahnschmiegebene  $\tau$  von  $T$  geometrisch einfach festlegen: Ihre Mittelspur  $t_0 = [\tau \Gamma]$  ist wegen Satz 1 normal zu  $t$ , der Grundriß  $t_0$  somit in  $T_0^e$  normal auf  $t^e$ ; parallel hierzu durch  $T_u^e$  verläuft die Fluchtspur  $t_u^e$ , das ist das Zentralbild der Ferngeraden  $t_u$  von  $\tau$ .

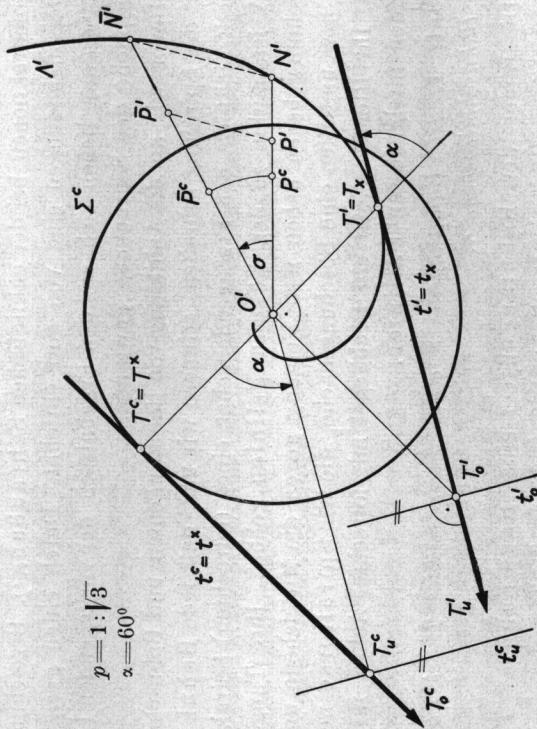


Fig. 1.

Bei Betrachtung von Fig. 1 erkennt man nun zwei wichtige, für alle Raumpunkte  $T$  gleichzeitig geltende Beziehungen:

- Das Linienelement  $(T_u^e t_u^e)$  geht aus  $(T^e t^e)$  durch eine Drehstreckung  $\mathfrak{U}(\alpha, \sec \alpha)$  um  $O'$  hervor.  $\mathfrak{U}$  besteht aus einer Drehung um den Winkel  $+\alpha$  und einer Streckung mit dem Vergrößerungsfaktor  $\sec \alpha$ .*
- Das Linienelement  $(T^e t^e)$  geht aus  $(T' t')$  durch eine Drehstreckung  $\mathfrak{B}(-90^\circ, \tg \alpha)$  um  $O'$  hervor.  $\mathfrak{B}$  besteht aus einer negativen*

Vierteldrehung und einer Streckung mit dem Abmischkeitsfaktor  $\tg \alpha = 1 : p$ .

Wir bezeichnen nun die aus den Fluchtelementen vermöge  $\mathfrak{U}^{-1}$  entstehenden Elemente als „Drehfluchten“ und markieren sie durch ein Kreuz oben, während wir die aus den Mittelspurgrundrissen durch  $\mathfrak{B}^{-1}$  erzeugten Elemente „Drehspuren“ nennen wollen und sie durch ein Kreuz unten kennzeichnen.

Jetzt lassen sich die letzten Ergebnisse, die zeigen, daß die konstruktiven Grundlagen der Schraubung in doppelter Weise<sup>8)</sup> auf die Spiralung verallgemeinert werden können, folgendermaßen zusammenfassen:

**Satz 2a** (Fig. 1): *Der Zentralriß  $T^e$  eines allgemeinen Raumpunktes  $T$  ist die Drehflucht  $T_X$  seiner Bahntangente  $t$ , deren Zentralriß  $t^e$  die Drehflucht  $t_X^e$  der Bahnschmiegebene  $\tau$ . Die Drehfluchten entstehen hiebei aus den gewöhnlichen Fluchten durch die Drehstreckung  $\mathfrak{U}^{-1}(-\alpha, \cos \alpha)^8)$ .*

**Satz 2b** (Fig. 1): *Der Grundriß  $T'$  eines allgemeinen Raumpunktes  $T$  ist die Drehspur  $T_X$  seiner Bahntangente  $t$ , deren Grundriß  $t'$  die Drehspur  $t_X'$  der Bahnschmiegebene  $\tau$ . Die Drehspuren entstehen hiebei aus den Mittelspurgrundrissen durch die Drehstreckung  $\mathfrak{B}^{-1}(90^\circ, p)$ .*

**III. Der tetraedrale Bahntangentenkomplex.** Man erhält sämtliche Bahntangenten der Spiralung, wenn man jeden Raumpunkt mit dem aus ihm durch eine infinitesimale Spiraltransformation entstandenen „benachbarten“ Punkten verbindet. Daraus erhellt, daß die Gesamtheit aller Bahntangenten einen tetraedralen Strahlkomplex bildet, der hier als Verbindungskomplex kollinearer (ähnlicher) Räume entsteht. Das Fixtetraeder  $O U_1 I_2$  der Spiraling ist Fundamentaltetraeder des Komplexes. Die Komplexkegel 2. Grades gehen durch die vier Ecken desselben, besitzen somit  $\Gamma$  als Kreisschnittebene; die Komplexkegelschmetter berühren die vier Seitenflächen und sind mithin Parabeln, die auch in unseren beiden Rissen wieder als Parabeln erscheinen und hier über dies  $O'$  zum Brennpunkt haben.

<sup>8)</sup> Für den praktischen Zeichner empfiehlt sich unter Umständen die folgende Variante: Man projiziere alle Fernelemente aus einem Nebenauge  $A$ , das sich auf  $\alpha$  in der Entfernung  $O II \cdot \cos \alpha$  über  $I$  befindet. Dann hängen die so erhaltenen Fluchten mit den Zentralbildern durch eine bloße Drehung um den Winkel  $\alpha$  zusammen.

Um den Komplexkegel eines Punktes  $P$  — also die Gesamtheit aller denselben enthaltenden Bahntangenten — zu ermitteln, denken wir uns durch  $P^e(P')$  einen beliebigen Strahl  $t^e(t')$  als Bild einer dieser Tangenten gezogen. Deren Drehflucht  $T^\times(T^\times)$  erhalten wir nach Fig. 1 als Fußpunkt des aus  $O'$  auf das Tangentenbild gefällten Lotes ( $\alpha$ -Lotes)<sup>9)</sup>. Dreht sich nun  $t^e$  um  $P^e(t'$  um  $P')$ , so durchläuft  $T^\times(T^\times)$  einen Kreis  $q^\times(q_\times)$ , die Drehflucht (Drehspur) des Komplexkegels, wodurch derselbe vollständig festgelegt ist.

Nach Satz 2 ist  $T^\times(T^\times)$  identisch mit dem Zentralriß (Grundriß) des Graptunktes  $T$  von  $t$ . Der Ort  $k$  aller Graptunkte erscheint also nach dem Gesagten im Zentralriß als Kreis  $k^e = q_\times$ , im Grundriß als Kreis  $k' = q_\times$ .  $k$  selbst erhalten wir im Schnitt des Verbindungskegels  $[O^eP]$  und des erstprojizierenden Zylinders  $[Uk]$ ; da beide Flächen die Achse  $z$  enthalten, bleibt für  $k$  eine Kurve 3. Ordnung durch  $O, U, I_1, I_2$ , also ein gerader kubischer Kreis übrig.

**Satz 3.** Die Drehflucht des Komplexkegels eines allgemeinen Punktes  $P$  ist ein Kreis  $q_\times$  mit dem Durchmesser  $O^eP^e$ , seine Drehspur ein Kreis  $q_\times$  durch  $O'$  und  $P'$ , auf welchem zu dem Bogen  $O^eP^e$  der Peripheriewinkel  $\alpha$  gehört.

Der Ort der Graptpunkte der Kegelerzeugenden ist ein gerader kubischer Kreis mit dem Zentralbild  $q_\times$  und dem Grundriß  $q_\times$ <sup>18)</sup>.

Um die Komplexkurve einer Ebene  $\varepsilon$  — also die Gesamtheit aller in ihr gelegenen Bahntangenten — zu ermitteln, denke man sich auf ihrer Drehflucht  $e^\times$  (Drehspur  $e_\times$ ) einen Punkt  $T^\times(T^\times)$  als Drehflucht (Drehspur) einer dieser Tangenten  $t$  angenommen. Deren Bild  $t^e(t')$  schließt nach Fig. 1 mit dem Strahl  $O^eT^\times(O^eT^\times)$  den Winkel  $90^\circ(\alpha)$  ein. Bewegt sich nun  $T^\times$  auf  $e^\times(T_\times$  auf  $e_\times)$ , so umhüllt  $t^e(t')$  eine Parabel  $r^e(r')$ , das Bild der Komplexparabel<sup>10)</sup>.

Nach Satz 2 ist  $T^\times(T^\times)$  identisch mit dem Zentralriß (Grundriß) des Graptunktes  $T$  von  $t$ . Der Ort aller Graptpunkte ist die Grattangente  $e$  von  $\varepsilon$ , für welche in der Tat  $e^e = e^\times$  und  $e' = e_\times$  gilt.

**Satz 4.** Der Zentralriß der Komplexparabel einer allgemeinen Ebene  $\varepsilon$  ist eine Parabel mit der Scheiteltangente  $e_\times$  und dem Brennpunkt  $e$ .

punkt  $O'$ ; die Grundrißparabel hat denselben Brennpunkt, berührt  $e_\times$  und ihre Achse schließt mit  $e_\times$  den Winkel  $\alpha$  ein.

Der Ort der Graptpunkte der Parabeltangenten ist die Grattangente von  $\varepsilon$ .

**IV. Fallinien.** Wird eine Raumkurve  $k$  der Spiralung unterworfen, so erzeugt sie eine Spiralfäche  $\Phi$ , vorausgesetzt, daß  $k$  nicht selbst eine Bahnkurve ist<sup>11)</sup>.

Die Tangentialebene  $\bar{\tau}$  eines allgemeinen Flächenpunktes  $T$  wird von seiner Bahntangente  $t$  und der Tangente  $s$  der erzeugenden Kurve  $k$  aufgespannt. Im Verlauf der Spiralung umhüllt  $\bar{\tau}$  eine Spira торse, die  $\Phi$  längs der Bahnkurve von  $T$  umschrieben ist. Die in  $\bar{\tau}$  gelegene Erzeugende  $\bar{t}$  der Torse ist die zu  $t$  konjugierte Flächentangente und nach Satz 1 Falllinie von  $\bar{\tau}$ . Die als Vereine der Linienelemente  $(T\bar{t})$  sich ergebenden Fallinien der Spiralfäche bilden somit die zur Schar der Bahnkurven konjugierte Schar. Da weiters die Torsen-erzeugenden  $\bar{t}$  dem Bahntangentenkomplex angehören, stellen die Falllinien neben den Bahnkurven die auf  $\Phi$  verlaufenden Komplexkurven dar. Nachdem die Fallinien durch die Spiralung ineinander transformiert werden, sind sie untereinander ähnlich, jene Fläche aufgenommen, auf der jede Falllinie in sich transformiert wird. In diesem Falle sind die Fallinien mit den Bahnkurven identisch, also zu sich selbst konjugiert und demnach Hauptbahntangentenkurven. Die Schichtlinien dieser Fläche ergeben sich als Orthogonaltrajektorien der Bahnspiralen; es sind logarithmische Spiralen mit dem Schnittwinkel  $\alpha - 90^\circ$ .

**Satz 5.** Die Fallinien einer Spiralfäche mit lotrechter Achse und die auf ihr gelegenen Bahnspiralen bilden zwei konjugierte Kurvensysteme. Beide Kurvenscharen gehören dem tetraedralen Bahntangentenkomplex an.

E. Müller hat für Schraubflächen zwei Fragen gestellt und beantwortet<sup>12)</sup>, die sich ohne weiteres auf Spiralfächen ausdehnen und ganz ähnlich erledigen lassen:

a) Spiralfächen mit ebenen Falllinien.

Da die Fallinien Komplexkurven sind, hat man einfach die Spiralung auf eine Komplexparabel (Satz 4) anzuwenden. Der Grap-punkt der Parabolebene beschreibt eine Rückkehrkante der Fläche.

<sup>11)</sup> Man kann so auf einfache Weise Spiralfächen erzeugen, die Schnecken-häusern außerordentlich ähnlich sehen; man nehme für  $k$  etwa einen geeigneten Kreis in einer Ebene des Büschels  $\alpha$  (Fig. 2).

<sup>12)</sup> Eine Abbildung krummer Flächen usw., S. 1797, 1809.

b) Spiralfächen, denen sich längs der Falllinien Kegel umschreiben lassen.  
Die einer Spiralfäche längs einer Falllinie  $f$  umschriebene Torse besteht nach Satz 5 aus den Bahntangentialen der Punkte von  $f$ . Soll diese Torse ein Kegel sein, so kommt hiefür nur ein Komplexkegel in Betracht und die Kurve längs welcher er die Spiralfäche berührt, ist der in Satz 3 angeführte kubische Kreis<sup>13)</sup>. Dieser erzeugt die gesuchte Fläche, die natürlich auch von dem Komplexkegel im Laufe der Spiralführung eingehüllt wird. Die Kegelspitze beschreibt eine Rückkehrkante der Fläche.

**V. Eigenschattengrenzen von Spiralfächen.** Mit Benützung der im II. Abschnitt auseinandergesetzten konstruktiven Grundlagen sind wir imstande, die Eigenschattengrenzen einer Spiralfäche  $\Phi$  für Parallelbeleuchtung und für ein in der Mittellebene  $\Gamma$  liegendes Lichtzentrum zu ermitteln. Deutet man die Lichtquelle als Projektionszentrum, so spielt die Eigenschattengrenze die Rolle des wahren Umrisses von  $\Phi$ , dessen Kenntnis bei der Herstellung von anschaulichen Bildern der Spiralfäche von Wichtigkeit ist.

Wir denken uns  $\Phi$  von einer beliebigen (aber nicht invarianten) Raumkurve  $k$  erzeugt, auf der wir einen Punkt  $T$  ins Auge fassen. Wir zeichnen die Drehflucht  $S^\times$  bzw. Drehspur  $S_\times$  der Kurventangente  $s$  in  $T$  und erhalten nach Satz 2 in  $\bar{t}_\times = [T^\circ S_\times]$  die Drehflucht bzw. in  $\bar{t}_\times = [T^\circ S_\times]$  die Drehspur der Tangentialebene  $\bar{\tau}$  von  $\Phi$ . Nun wenden wir auf das Flächenelement  $(T\bar{\tau})$  so lange die Spiralführung an, bis  $\bar{\tau}$  das Lichtzentrum enthält. Wie erinnerlich, äußert sich die Spiralführung im Zentralbild als Drehung um  $O'$ , im Grundriß als ebene Spiraling  $\mathcal{E}'$ .

Im Falle der Parallelbeleuchtung (Lichtrichtung  $L_u$ ) wird man demnach die Drehflucht  $\bar{t}_\times$  um  $O'$  drehen, bis sie durch den Punkt  $L_\times = \mathfrak{A}^{-1} \cdot L_u^\circ$  geht, was i. a. auf zwei wesentlich verschiedene Lagen führt<sup>14)</sup>. Der mitgedrehte Punkt  $T^\circ$  ist zum Centralriß eines Eigen-

<sup>13)</sup> Dieser kubische Kreis ist, wie wir nun nachträglich feststellen, Falllinie des zugehörigen Komplexkegels und Komplexkurve.

<sup>14)</sup> Diese Drehung kann zweckmäßig mittels eines durchsichtigen Pauspapiers durchgeführt werden. In Fig. 2 wurde das auseinandergesetzte Verfahren zur Ermittlung des Umrisses eines Schneckenhauses (vgl. Fußn. 11;  $k$  in  $[yz]$ ) in normaler Axonometrie angewendet.  $p = -0'1$ .  $\Pi = [xy]$ . Die Drehflucht  $L_\times$  der Sehstrahlen wurde mittels des Nebenauges  $A$  (Fußn. 8) gefunden, ebenso die Bahntangente von  $P$  und die Umrißtangente in  $(T)$ .

schattenpunktes geworden, dessen Grundriß leicht mit Hilfe der Normspirale (S. 251) hinzugefügt werden kann.

Weniger einfach, aber für den praktischen Zeichner auch von geringerer Bedeutung, ist der Fall eines endlichen Lichtzentrums  $L_0$  in

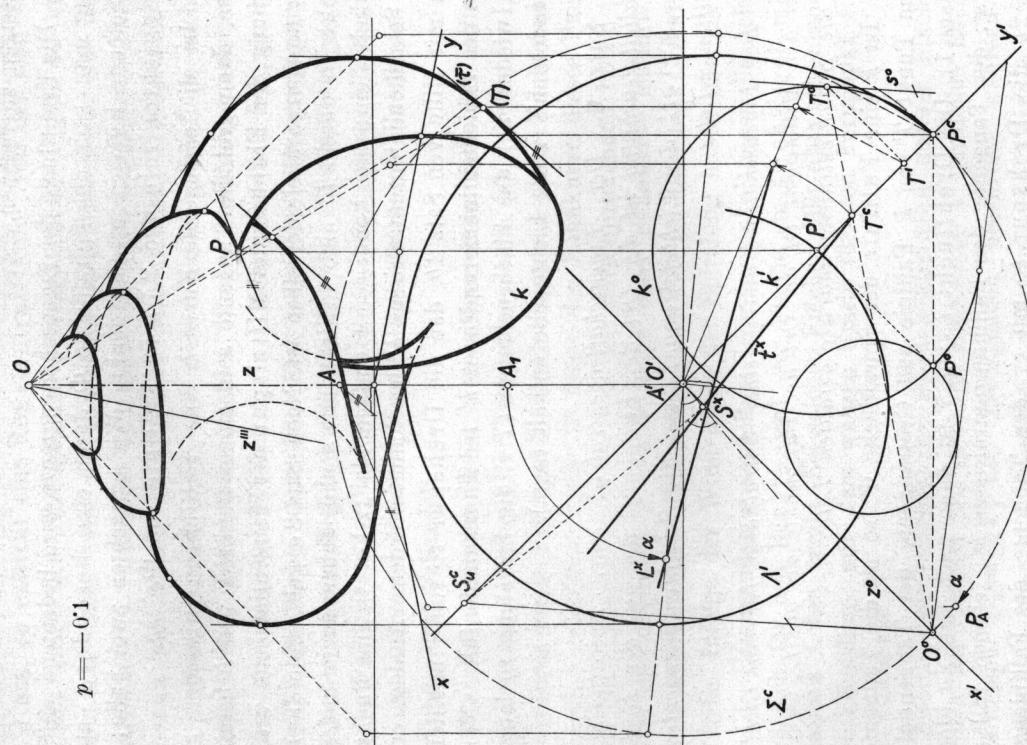


Fig. 2.

I. Hier hat man auf die Drehspur  $\bar{t}_\times$  eine Ähnlichkeit der Gruppe  $\mathfrak{E}'$  auszuüben, bis sie durch den Punkt  $L_\times = \mathfrak{B}^{-1} \cdot L'_0$  geht. Zu diesem Zwecke zeichne man etwa die Normspirale durch  $L_\times$ ; sie schneidet

die Ausgangslage von  $\bar{t}_X$  in unendlich vielen Punkten  $N_i$ , welche unmittelbar die Winkel  $\sigma_i = \chi N_i O L_X$  der erforderlichen Spiraltransformationen, welche  $T$  zu einem Eigenschattenpunkt machen, angeben. Auch diese Konstruktion ist bei vorgezeichneter Normspirale zu den zulässigen zu rechnen.

Die Ermittlung der Eigenschattengrenze wird bedeutend einfacher, wenn man sich die Spiralfäche  $\Phi$  durch eine besondere, auf ihr verlaufende Kurve  $k$  erzeugt denkt. Wir betrachten zwei Fälle: 1.)  $k$  ist Schichtenlinie und 2.)  $k$  ist Falllinie von  $\Phi$ .

Ist die erzeugende Kurve  $k$  eine Schichtenlinie der Spiralfäche, dann gibt die Tangente  $s$  in einem Punkt  $T$  von  $k$  bereits die Richtung der Flucht- und Mittelpunkt der Tangentialebene  $\bar{\tau}$  an, da sie eine Spurparallele derselben ist. Nach Satz 2a geht dann die Drehflucht  $\bar{\tau}^X$  durch  $T^e$  und schließt mit  $s^e$  den Winkel  $\alpha$  ein; sie kann somit einfach als „ $\alpha$ -Lot“<sup>15)</sup> im Punkte  $T^e$  des Schichtenlinienzentralkrisses  $k^e$  bezeichnet werden. Analog erkennt man mit Hilfe von Satz 2b, daß die Drehspur  $\bar{t}_X$  von  $\bar{\tau}$  mit der Normale des Schichtenlinienzentralkrisses  $k'$  in  $T'$  zusammenfällt. Nun hat man wieder auf das Flächenelement  $(T\bar{\tau})$  die Spiralung so lange anzuwenden, bis  $\bar{\tau}$  die Lichtquelle enthält (s. o.).

**Satz 6.** Der Eigenschattenzentralkriff einer Spiralfäche für Parallelbeleuchtung ist der Ort der Fußpunkte der aus der Drehflucht  $L_X = \mathfrak{N}^{-1} \cdot L_u^e$  der Lichtrichtung  $L_u$  auf die Schichtenlinienzentralrisse gefällten  $\alpha$ -Lote.

Der Eigenschattenzentralkriff einer Spiralfäche für eine Lichtquelle  $L_0$  in der Mittelebene ist der Ort der Fußpunkte der aus  $L_X = \mathfrak{B}^{-1} \cdot L_0'$  auf die Schichtenlinienzentralkrisse gefällten Lote.

Ist  $k$  eine Falllinie der Spiralfäche  $\Phi$ , so ist die Tangente  $s$  in einem Punkt  $T$  von  $k$  Falllinie und Gratttangente der Tangentialebene  $\bar{\tau}$  (Satz 1). Die Drehflucht  $\bar{t}^X$  von  $\bar{\tau}$  ist dann nach Satz 2a identisch mit  $s^e$ , der Tangente des Falllinienzentralkrisses  $k^e$ ; ebenso fällt nach Satz 2b die Drehspur  $\bar{t}_X$  mit  $s'$ , der Tangente des Falllinienzentralkrisses  $k'$  zusammen:

**Satz 7.** Der Eigenschattenzentralkriff einer Spiralfäche mit lotrechter Achse ist bei Parallelbeleuchtung der Ort der Berührungs punkte der aus  $L_X$  (s. Satz 6) an die Falllinienzentralrisse gezogenen Tangenten.

Der Eigenschattenzentralkriff für eine Lichtquelle  $L_0$  in der Mittelebene ist der Ort der Berührungs punkte der aus  $L_X$  (s. Satz 6) an die Falllinienzentralkrisse gezogenen Tangenten.

**VI. Regelspiralfächen.** Übt man die Spiralung auf eine Gerade  $g$  aus, so entsteht eine Regelspiralfäche, von der man — je nach der Lage der Erzeugenden — verschiedene Typen zu unterscheiden hat. Man kann die Einteilung nach dem Muster der Regelschraubflächen<sup>16)</sup> vornehmen und nennt dann die Regelspiralfäche geschlossen oder offen, je nachdem ihre (reellen) Erzeugenden die Achse  $z$  schneiden oder nicht, und gerade oder schief, je nachdem die Erzeugenden mit  $z$  einen rechten Winkel einschließen oder nicht. Von den trivialen Sonderfällen ( $g$  in  $\Gamma$  oder unendlich fern,  $g$  durch  $O$  oder  $U$ ) wird hiebei abgesehen. Eine besondere Stellung nimmt unter den schiefen, offenen Regelspiralfächen die von einer Balntangente erzeugte Spiraltorse ein. Die gerade, geschlossene Regelspiralfäche wird unter dem kürzeren Namen „Wendelspiralfäche“ im letzten Abschnitt gesondert behandelt.

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall der schiefen, offenen Regelspiralfäche. Die Verbindungs ebene  $[Og]$  hüllt im Laufe der Spiralung einen Fixkegel  $\Sigma$  ein, der von  $g$  in einem Punkt und von der durch  $g$  erzeugten Fläche  $\Phi$  längs der Bahnkurve dieses Punktes berührt wird. Ebenso wird der von der erstprojizierenden Ebene  $[Ug]$  umhüllte Spiralyylinder  $\Lambda$  von  $\Phi$  längs einer Bahnkurve berührt, die übrigens eine besondere Bedeutung hat: Sie ist die Striktionslinie der Fläche. Infolge der Winkel treue der Spiralung haben nämlich alle Lagen der Erzeugenden  $g$  denselben Neigungswinkel gegen die Achse  $z$ , so daß sich für den Richtkegel der Fläche ein Drehkegel mit zu  $z$  paralleler Achse ergibt. Bei solchen Flächen fällt aber bekanntlich<sup>16)</sup> die Striktionslinie mit dem wahren Umriss für den Fernpunkt  $U$  der Achse zusammen.

Zwecks Untersuchung der Schichtenlinien unserer Fläche  $\Phi$  schneiden wir dieselbe mit einer zur Mittelebene  $\Gamma$  parallelen Ebene  $\xi$ . Die Mittelpur  $G_0 = [g\Gamma]$  der Erzeugenden beschreibt während der Spiralung eine ganz in  $\Gamma$  liegende logarithmische Spirale  $\lambda$ , während der Ort der Punkte  $G_1 = [g\xi]$  die gesuchte Schichtenlinie darstellt. Nun ist wegen der gleichen Neigung der Erzeugenden das zwi-

<sup>15)</sup> E. Müller-E. Krupp, Lehrbuch der darst. Geom. (1936), S. 201.

<sup>16)</sup> Müller-Kramers, Vorlesungen über darst. Geom., Bd. III, „Konstruktive Behandlung d. Regelflächen“, S. 136.

sehen  $\Gamma$  und  $\varepsilon$  gelegene Stück  $G_0 G_1$  von  $g$  von konstanter Länge und demzufolge auch dessen Normalprojektion  $G'_0 G'_1$  auf  $\Gamma$ . Wegen der Winkeltreue der Spiraalung bleibt der Winkel, den die Strecke  $G'_0 G'_1$  mit der Normalen  $n$  von  $l$  einschließt, unverändert; bedenken wir noch, daß beim Durchlaufen der Kurve  $n$  auf der Evolute  $\ell^*$  von  $l$  abrollt ( $\ell^*$  und  $l$  sind bekanntlich kongruent), so ist damit ein einfaches kinematisches Entstehungsgebot der Schichtenlinie gefunden:

*Die Schichtenlinie einer allgemeinen Regelspiralfäche entsteht als Bahnkurve eines Punktes, der mit einer auf einer logarithmischen Spirale abrollenden Geraden fest verbunden ist<sup>17)</sup>.*

Diese Kurven, die transzendent sind, nähern sich einerseits asymptotisch einem Kreis und verschwinden andererseits nach Art der logarithmischen Spiralen ins Unendliche.

Die Schichtenlinien sind, der Natur der Fläche entsprechend, untereinander ähnlich. Allerdings hängen bloß solche durch eine reelle Ähnlichkeit zusammen, die sich auf derselben Seite der Mittelebene befinden; Schichtenlinien, die durch  $\Gamma$  getrennt sind, haben rein äußerlich verschiedene Gestalt und sind komplex ähnlich. Den Übergang von einer Kurvenart zur anderen vermittelt die Schichtenlinie in  $\Gamma$ , die oben benützte logarithmische Spirale  $l$ .

In besonderen Fällen ergeben sich bekanntere Formen der besprochenen Kurve:

Bei der Spiraltorse liegt die Strecke  $G'_0 G'_1$  auf der Normalen  $n$ , so daß die Schichtenlinien als Evolventen der logarithmischen Spirale  $\ell^*$  oder als Parallelkurven der Spirale  $l$  entstehen. Dies kann auch direkt aus der Tatsache, daß die Spiraltorse Böschungsfläche ist, gefolgt werden.

Bei der schiefen, geschlossenen Regelspiralfäche geht die Verlängerung der Strecke  $G'_0 G'_1$  stets durch  $O$ , so daß die Schichtenlinie als Mittelpunktskonchoide der Spirale  $l$  aufgefaßt werden kann; Naumann nannte diese Kurve „Konchospirale“<sup>18)</sup>.

Die Schichtenlinien könnten nach Satz 6 zur Bestimmung der Eigenschattengrenze verwendet werden, doch empfiehlt sich bei den Regelspiralfächeln ein eigenes Verfahren, das für den Fall der Parallelbeleuchtung auseinandergesetzt werden soll.

Wir benötigen hierbei bloß den Zentralriff  $g^e$  der Erzeugenden  $g$  und auf diesem den Fluchtpunkt  $G'_u$ , aus welchem sich vermittels der Drehstreckung  $\mathfrak{A}^{-1}(-\alpha, \cos \alpha)$  die Drehflucht  $G^{\times}$  ergibt. Während der Spiralfaltung — die sich, wie erinnerlich, im Zentralbild  $O'$  äußert — umhüllt  $g^e$  einen Kreis  $\Sigma^e$ , den scheinbaren Zentralumriß der Fläche;  $G'_u$  und  $G^{\times}$  bewegen sich dabei auf zwei hierzu konzentrischen Kreisen  $s_u^e$  und  $s^{\times}$  (Fig. 3).

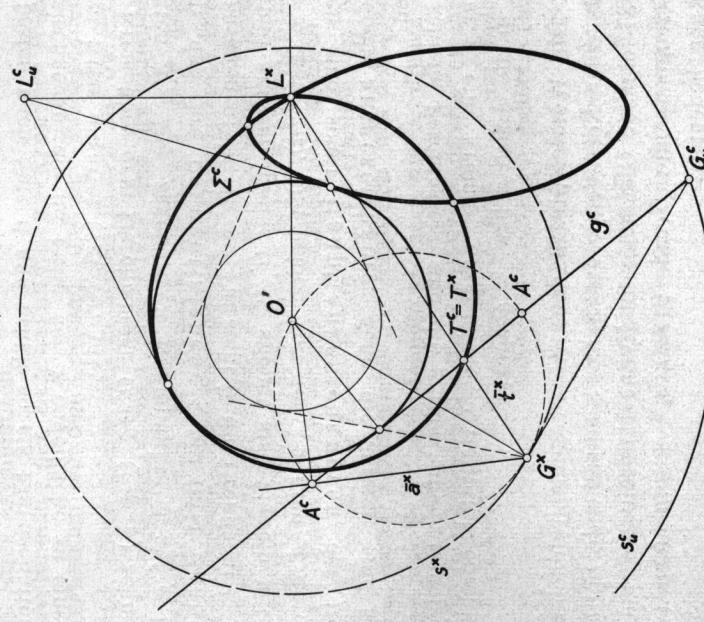


Fig. 3.

Die Tangentialebene  $\bar{\tau}$  eines Punktes  $T$  von  $g$  wird von der Bahn-tangente  $t$  und der Erzeugenden  $g$  aufgespannt; deren Drehfluchtpunkte  $T^{\times} = T^e$  (Satz 2a) und  $G^{\times}$  ergeben daher verbunden die Drehflucht  $\bar{t}^{\times}$  von  $\bar{\tau}$ . Durch Umkehrung erhält man die folgende Konstruktion (Fig. 3):

*Man verbinde die Drehflucht  $L^{\times}$  der Lichtrichtung mit einem Punkt  $G^{\times}$  des Kreises  $s^{\times}$ ; diese Gerade  $\bar{t}^{\times}$  schneidet auf dem Bild  $g^e$  der zu  $G^{\times}$  gehörenden Erzeugenden  $g$  das Bild  $T^e = T^{\times}$  des Eigen-schattenpunktes von  $g$  aus.*

<sup>17)</sup> Die Schichtenlinie einer allgemeinen Regelschraubfläche entsteht bekanntlich als Bahnkurve eines Punktes beim Abrollen einer Geraden auf einem Kreis. (Th. Schmid, Darstellende Geometrie, Bd. II, S. 267.)

<sup>18)</sup> G. Loria, Spez. algebr. u. transz. Kurven, Bd. II, S. 69.

Der von  $T^e$  durchlaufene Eigenschattenzentralläß ist i. a. eine rationale, zirkuläre Kurve 4. O. mit einem Doppelpunkt in  $L^\times$ . Die beiden anderen Doppelpunkte rücken im Falle der schiefen, geschlossenen Regelspiralfäche zu einer Selbstberührung in  $O'$  zusammen. Bei der Spiraltorse zerfällt die Kurve in den Kreis  $\Sigma^e$  (der der Gratlinie entspricht) und dessen zwei durch  $L^\times$  gehende Tangenten, die auf zwei Gruppen paralleler Eigenschatten erzeugenden führen. Die gerade, offene Regelspiralfäche behandelt man, da ihre Schichtenlinien gerade sind, am besten nach Satz 6 und erhält so als Eigenschattenzentralläß eine Pascalschnecke, die im Falle der Wendelfläche zu einem doppelt überdeckten Kreis ausartet (vgl. Nr. VII).

Der Kreis über dem Durchmesser  $O'G\times$  (Fig. 3) schneidet  $g^e$  in zwei Punkten  $A^e$ . Die zugehörigen Raumpunkte  $A$  auf  $g$  haben die Eigenschaft, daß ihre Tangentialebene  $\bar{z}$  mit ihrer Bahnschmiegeebene  $\alpha$  zusammenfällt. In der Tat steht ja die Drehflucht  $\bar{a}\times = [A^e G\times]$  von  $\bar{z}$  normal auf den Radius  $O'A^e$ , stimmt also überein mit der Drehflucht von  $\alpha$  (Satz 2a). Die beiden von den Punkten  $A$  durchlaufenden Bahnkurven sind somit Haupttangentenkurven der Regelspiralfäche, jedoch ausgezeichnete, denn die übrigen sind keineswegs Bahnkurven.

Die schiefe, geschlossene und die gerade, offene Regelspiralfäche besitzen nur je eine krumme ausgezeichnete Haupttangentenkurve; die andere ist in die Achse  $z$  bzw.  $u$  ausgearbeitet.

**VII. Die Wendelspiralfäche.** Als Wendelspiralfäche erklären wir die aus einer Normalen  $g$  der Achse  $z$  entstehende Spiralfäche  $\Phi$ . Ihre aus (3) folgende Gleichung in Zylinderkoordinaten lautet, wenn wir als Erzeugende die Gerade  $\varphi_0=0$ ,  $z_0=1$  annehmen (was keine Einschränkung bedeutet):

$$(7) \quad z = e^{p\varphi}$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$(8) \quad \ln z = p \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Sie gestattet die windschiefe harmonische Kollineation  $\mathfrak{W}$  mit den Achsen  $y=0$ ,  $z=1$  und  $x=0$ ,  $z=-1$ :

$$(9) \quad x' = \frac{x}{z}, \quad y' = -\frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Diese involutorische Kollineation vertauscht die Mittellebene mit der Fernebene, macht aus den Fixkegeln  $\Sigma$  Drehzyliner  $\Sigma'$  mit der

Achse  $z$  und aus den Bahnkurven  $[\Sigma^e]$  Linien  $[\Sigma^e \Phi]$ , in denen wir die Falllinien der Wendelfläche erkennen, da sie alle Erzeugenden senkrecht schneiden.

Bei der Abwicklung eines solchen Zylinders  $\Sigma$  ( $r=r_0$ ) wird aus der Falllinie eine Exponentialkurve

$$(10) \quad z = e^{p\varphi}, \quad \xi = r_0 \varphi.$$

$\xi$  ist liebei die Bogenlänge des Basiskreises von  $\Sigma$ ; die Falllinie nähert sich diesem Kreis asymptotisch.

Zur Bestimmung der Eigenschattengrenzen der Wendelspiralfäche  $\Phi$  verwenden wir den Umstand, daß ihre Erzeugenden Schichtlinien sind. Diese bilden sich in beiden Rissen auf die Strahlen des Büschels  $O'$  ab und Satz 6 lehrt unmittelbar, daß der Eigenschatten für ein Lichtzentrum  $L_0$  in  $\Gamma$  im Grundriß als Kreis über dem Durchmesser  $O'L_\times$  erscheint. Der über diesem Kreis errichtete Drehzyylinder  $\Sigma^*$  schneidet  $\Phi$  neben der Achse  $z$  nach der gesuchten Eigenschattengrenze, in der wir unschwer die Falllinie einer Wendelspiralfäche vom halben Parameter erkennen. Fällen wir nämlich aus ihren Punkten die Lote auf die Achse  $z^*$  von  $\Sigma^*$ , so erhalten wir eine Wendelfläche  $\Phi^*$ , deren Erzeugenden — verglichen mit den gleich hohen Erzeugenden von  $\Phi$  — sich doppelt so rasch um  $z^*$  drehen.

Die Eigenschattengrenze für Parallelbeleuchtung erscheint nach Satz 6 im Zentralriß als Kreis durch  $O'$  und  $L_\times$ , auf welchem zum Bogen  $L_\times O'$  der Peripheriewinkel  $\alpha = \operatorname{arctg} p$  gehört. Der Verbindungskegel  $\Sigma^*$  dieses Kreises mit dem Scheitel  $O$  liefert im Schnitt mit  $\Phi$  neben  $z$  die gesuchte Eigenschattengrenze; diese geht durch eine perspektive Affinität mit der Affinitätsebene  $\Gamma$ , welche  $\Sigma^*$  zu einem Drehzygel macht, in eine Bahnkurve der Spiralfaltung vom Parameter  $\frac{p}{2}$  über.

Die Eigenschattengrenzen der einen Gattung werden durch die oben erwähnte windschiefe Involution  $\mathfrak{W}$  (9) in jene der anderen Gattung übergeführt, da ja Zentralbeleuchtung aus einem Punkt von  $\Gamma$  in Parallelbeleuchtung transformiert wird und umgekehrt.

Da die Wendelspiralfäche neben  $\mathfrak{W}$  auch noch die axialen Streckungen

$$(11) \quad x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = z$$

verträgt, sind ihre Schlagschattenkurven auf Horizontalebenen für beide Lichtarten allesamt untereinander ähnlich. Wir beschränken uns also bei der Untersuchung etwa auf den Schlagschatten der Fläche (7)

auf die Mittelebene  $z=0$  für Licht, das unter  $45^\circ$  parallel zur Ebene  $y=0$  einfällt. Der Schlagschatten der Erzeugenden

$$(12) \quad y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad z = e^{p\varphi}$$

lautet dann

$$(13) \quad y = (x - e^{p\varphi}) \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Den Schlagschatten der Wendelspiralfäche findet man nun am einfachsten als Hüllkurve der Geraden (13). Es ergibt sich eine bekannte abnehmende Laufmusterkurve<sup>19)</sup>, die Logarithmoide von Köstlin<sup>19)</sup>:

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= e^{p\varphi} (1 + p \cdot \sin \varphi \cos \varphi) \\ y &= p e^{p\varphi} \cdot \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Zum Schlusse behandeln wir noch die Haupttangentenkurven der Wendelspiralfäche.

Um in einem Punkt  $T$  der Erzeugenden  $g$  einer Regelspiralfäche  $\Phi$  die von  $g$  verschiedene Haupttangente  $h$  zu konstruieren, denken wir uns der Fläche längs der Bahnkurve von  $T$  die Spiraltorse umgeschrieben. Deren Erzeugende  $\bar{t}$  ist konjugiert zur Bahnkurven  $t$  von  $T$  und wir erhalten nun  $h$  als den zu  $g$  bezüglich  $t, \bar{t}$  harmonischen Strahl. Wie  $\bar{t}$ , die Grat tangente der Tangentialebene  $\bar{\tau}$  von  $\Phi$  gefunden werden kann, sagt uns Satz 2: Ihr Grundriß (Zentralriß) fällt zusammen mit der Drehspur (Drehflucht) von  $\bar{\tau}$ .

Im besonderen Fall der Wendelfläche ergibt sich dabei — etwa im Grundriß — das folgende Bild: Der Bahntangentengrundriß  $t'$  in  $T'$  schließt mit  $g'$  den Winkel  $\alpha$  aus Formel (5) ein; die Mittelspur  $\bar{t}_0$  von  $\bar{\tau}$  verläuft parallel zu  $g'$ , die daraus durch  $\mathfrak{B}^{-1}(90^\circ, p)$  hervorgegangene Drehspur  $\bar{t}_{\times}$  ist mithin die in  $T'$  auf  $g'$  errichtete Normale. Der zu  $g'$  bezüglich  $t'$  und  $\bar{t} = \bar{t}_{\times}$  harmonische Haupttangentengrundriß  $h'$  schließt offenbar mit  $g'$  einen festen Winkel  $\beta$  ein, für den man leicht die Beziehung

$$(15) \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{p}{2}$$

ableitet. Als Vereine dieser Linienelemente ( $T' h$ ) ergeben sich Kurven, welche die Strahlen  $g'$  des Büschels  $O'$  unter konstantem Winkel  $\beta$  schneiden, also eine Drehschar von logarithmischen Spiralen

$$(16) \quad r = c \cdot e^{\frac{p}{2}\varphi},$$

womit der Grundriß der Haupttangentenkurven gefunden ist. Analog erhält man im Zentralriß eine Schar hiezu gegensinnig kongruenter Spiralen.

Für die Haupttangentenkurve selbst folgt aus (7) und (16) die Beziehung

$$(17) \quad r^2 = c^2 \cdot z,$$

die die Gleichung eines Drehparaboloides darstellt:

*Die Haupttangentenkurven der Wendelspiralfäche liegen auf Drehparaboloiden mit der Achse  $z$  und dem Scheitel  $O$ .*

Der tiefere Grund für diese Tatsache liegt darin, daß die Wendelspiralfäche auch als Wendelfläche einer hyperbolischen Schraubung<sup>20)</sup> angesehen werden kann. Für diese Schraubung sind die genannten Paraboloiden invariant und schneiden demzufolge die Wendelfläche nach Bahnkurven der Schraubung. Für euklidische und nichteuklidische Schraubwendelflächen gilt aber der Satz, daß ihre krummen Haupttangentenkurven Schraublinien sind. Als solche sind sie auch Gewindekurven, während die Bahnkurven der Spirahung keinem linearen Komplex angehören.

<sup>20)</sup> K. Strobecker, Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **38** (1931) S. 65.

(Eingegangen: 11. V. 1937.)

<sup>19)</sup> H. Wieleitner, Spez. ebene Kurven (SammL. Schubert, Bd. 56) S. 384 bis 388. Die Logarithmoide erinnert in mancher Hinsicht an die gemeine Zykloide, die als Schlagschatten bei der Schraubwendelfläche auftritt. Rein äußerlich, da sie aus unendlich vielen ähnlichen Bögen besteht, die in Spitzen aneinandersstoßen, aber auch durch ihre kinematische Erzeugung: Die Zykloide entsteht als Hüllkurve eines Durchmessers eines auf einer Geraden rollenden Kreises, die Logarithmoide beim Rollen einer log. Spirale auf einer Geraden als Hüllkurve eines Strahls durch den Mittelpunkt.