

Beitrag zur Kenntnis der Minimalschraubflächen

Von

Walter Wunderlich

Wien

§ 1. Die Frage nach der Bestimmung aller (reellen) *Minimalflächen*, die gleichzeitig *Schraubflächen* sind, hat schon H. F. Scherk gelöst¹⁾. Er gibt die Gleichung der Meridiankurve an, die infolge ihrer Unübersichtlichkeit allerdings zu keiner Diskussion verlockt, und hebt den Sonderfall der *Wendelfläche* und den Grenzfall des *Katenoids* (der Minimaldrehfläche) hervor. Eine glücklichere Parameterdarstellung verwendet dann O. Bonnet, der auch auf eine geometrische Erzeugung der Minimalschraubflächen hinweist²⁾. Seither finden sich dieselben als beliebtes Beispiel von Minimalflächen an vielen Stellen, ohne daß jedoch eine nähere Untersuchung angeschlossen würde³⁾.

Es muß ferner wundernehmen, daß die Frage der Minimalschraubflächen anscheinend niemals mit Lieschen Ideen behandelt worden ist. Nach der Auffassung von S. Lie ist bekanntlich jede Minimalfläche eine *Schiebfläche*, die durch Verschiebung einer *Minimalkurve* längs einer anderen entsteht; reelle Flächen kommen dabei im wesentlichen nur dann zustande, wenn die beiden Minimalkurven in einer Ausgangslage konjugiert-imaginär sind⁴⁾. Die fraglichen *Minimalschraubflächen* erscheinen damit im Rahmen der komplexen Geometrie nur als ein Spezialfall der *Schraub-schiebflächen*, deren reelle Spielart bereits eingehenderer Betrachtungen gewürdigt worden ist⁵⁾.

Dieser Gesichtspunkt liegt nun der vorliegenden Darstellung zu Grunde, die nicht nur mit geringstem Aufwand zu den reellen Minimalschraubflächen führt, sondern in der Folge auch noch einige unbekannte Eigenschaften dieser Flächen aufdeckt.

¹⁾ H. F. SCHERK [1].

²⁾ O. BONNET [2], insb. 224. — Vgl. auch U. DINI [3].

³⁾ Beispielsweise bei G. DARBOUX [4], 333; L. BIANCHI [5], 354; W. BLASCHKE [6], 132.

⁴⁾ S. LIE [7].

⁵⁾ L. BURMESTER [8]; E. MÜLLER [10].

§ 2. Sei also Φ eine *reelle Minimalschraubfläche*, deren Achse demnach eine reelle, eigentliche Gerade ist und als z -Achse des zu verwendenden Koordinatensystems dienen soll. Seien ferner l_0 und l zwei benachbarte *Minimalkurven* der gleichen Schar. Da Φ eine Schraubfläche ist, so existiert eine gewisse *Schraubung* \mathfrak{S} um z , die l_0 in l überführt; da Φ eine Minimalfläche ist, so existiert auch eine gewisse *Schiebung* \mathfrak{I} , die l_0 nach l bringt. Es gilt somit

$$l = \mathfrak{S} \cdot l_0 = \mathfrak{I} \cdot l_0 \text{ oder } l_0 = \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{I} \cdot l_0.$$

Es gibt mithin eine gewisse *Bewegung* $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{I}$, die die Kurve l_0 in sich transformiert. Mit Rücksicht darauf, daß sowohl \mathfrak{S} als auch \mathfrak{I} die z -Richtung festlassen und \mathfrak{U} vermöge \mathfrak{S}^{-1} einen echten rotatorischen Bestandteil enthält, handelt es sich bei \mathfrak{U} um eine Schraubung mit z -paralleler Achse. l_0 verträgt natürlich nicht nur die Schraubtransformation \mathfrak{U} , sondern die ganze, durch Umkehrung und Wiederholung erzeugte diskontinuierliche Schraubungsgruppe \mathfrak{U}^n (n ganz). Läßt man nun l im Rahmen der Minimalkurvenschar gegen das festgehaltene Individuum l_0 rücken, so unterscheidet sich \mathfrak{U} immer weniger von der Identität und \mathfrak{U}^n wird zu einer kontinuierlichen Schraubungsgruppe, die l_0 in sich überführt: Die Minimalkurve l_0 — und jede ihrer Neulagen l — ist demnach eine *Schraublinie mit z -paralleler Achse* ⁶⁾.

Gleiches gilt auch für die zweite, zur ersten konjugierte Minimalkurvenschar (\bar{l}) .

Umgekehrt ist klar, daß durch Verschraubung einer achsenparallelen Schraublinie stets eine Schiebfläche erzeugt wird.

§ 3. Um also eine reelle Minimalschraubfläche zu erhalten, braucht man nur eine Minimalschraublinie l mit z -paralleler Achse (Schraublinie mit der Steigung i) herzunehmen und längs der konjugiert-imaginären Schraublinie \bar{l} zu verschieben. In bequemer Abänderung kann man auch zwei Punkte P, \bar{P} zwei kon-

⁶⁾ Bei der Anwendung derselben Überlegungen auf die *Schraubschiebflächen* allgemein ist zunächst noch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß die Verschraubung von l_0 aus der Schiebkurvenschar (l) herausführt. Es existieren dann außer der Schar (l) noch unendlich viele weitere Schiebkurvenscharen, die durch Schraubung untereinander vertauscht werden. Von den Flächen, die auf unendlich viele Arten als Schiebflächen aufgefaßt werden können und die seinerzeit von S. LIE eingehend untersucht worden sind, zählen allerdings nur die *Wendelfläche* und der *Drehzylinder* zu den Schraubflächen; bei der Wendelfläche tritt überdies keine Vertauschung der Schiebkurvenscharen ein. Erst nach Klärung dieses Sachverhalts darf sodann die Schlußweise aus § 1 angewandt werden, die natürlich gleichfalls achsenparallele Schraublinien als Schiebflächen liefert.

jugiert-imaginäre Minimalschraublinien m, \bar{m} durchlaufen lassen und den Ort der Mittelpunkte T der Punktepaare $P\bar{P}$ aufsuchen: Es ergibt sich eine Schiebfläche Φ , deren Schiebkurven vom Punkt T beschrieben werden, wenn entweder P oder \bar{P} festgehalten wird; sie entstehen aus den Grundkurven m, \bar{m} durch zentrisch ähnliche Verkleinerung 1 : 2 und sind also Minimalschraublinien wie diese. Die reellen Punkte der Fläche ergeben sich dabei, wenn P und \bar{P} konjugiert-imaginäre Lagen einnehmen.

Setzt man mithin die Gleichungen der *Minimalschraublinie* m — unter Verzicht auf überflüssige additive Konstanten, die nur eine Parallelverschiebung bewirken würden — in der Gestalt

$$(1) \quad X = r \cos \varphi, \quad Y = r \sin \varphi, \quad Z = -ri\varphi$$

an, so ergibt sich die Darstellung der zugehörigen Minimalfläche Φ nach dem Gesagten durch

$$(2) \quad x = \frac{1}{2}(X + \bar{X}), \quad y = \frac{1}{2}(Y + \bar{Y}), \quad z = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}).$$

Werden hierin die komplexen Konstanten r, \bar{r} und die komplexen Parameter $\varphi, \bar{\varphi}$ mittels ihrer Komponenten gemäß

$$(3) \quad r = a + ib, \quad \bar{r} = a - ib, \quad \varphi = \xi + i\eta, \quad \bar{\varphi} = \xi - i\eta$$

ausgedrückt, wobei im Laufe der Entwicklung von den Identitäten

$$\cos i\eta = \operatorname{ch} \eta, \quad \sin i\eta = i \operatorname{sh} \eta$$

Gebrauch zu machen ist, so erhält man schließlich die folgende reelle Parameterdarstellung der *Minimalschraubfläche*:

$$(4) \quad \begin{array}{l} x = a \cos \xi \operatorname{ch} \eta + b \sin \xi \operatorname{sh} \eta \\ y = a \sin \xi \operatorname{ch} \eta - b \cos \xi \operatorname{sh} \eta \\ z = b\xi + a\eta. \end{array}$$

§ 4. Eine vorläufige Betrachtung des Gleichungssystems (4) gestattet zunächst (unter der Voraussetzung $ab \neq 0$) folgende Feststellungen über die Parameterlinien:

Die ξ -Linien ($\eta = \text{const}$) sind gewöhnliche *Schraublinien* mit der Achse z ; sie liegen auf den koachsialen Drehzylindern $x^2 + y^2 = \text{const}$ und haben den gemeinsamen Schraubparameter b (Ganghöhe $2\pi b$), während ξ den Schraubwinkel bedeutet. Damit ist der Schraubcharakter der Fläche bestätigt.

Die η -Linien ($\xi = \text{const}$) können demgegenüber als „*Pseudo-schraublinien*“ mit der Achse z angesprochen werden. Da sie durch Verschraubung auseinander hervorgehen, sind sie untereinander

kongruent und es genügt etwa das Prototyp $\xi = 0$ zu betrachten:

$$(5) \quad x = a \operatorname{ch} \eta, \quad y = -b \operatorname{sh} \eta, \quad z = a\eta.$$

Diese Kurve verläuft auf dem hyperbolischen Zylinder $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ und ist Bahnkurve einer pseudoeuklidischen Bewegungsgruppe, die anstelle des gewöhnlichen Längenelements $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ das analoge $ds^2 = (dx/a)^2 - (dy/b)^2 \pm (dz/c)^2$ festläßt; als Schraubparameter wäre hierbei die Konstante a zu bezeichnen. Die Kurve ist übrigens auch gewöhnliche *Böschungslinie* für die Lotrichtung y , denn die Fortschreitungsrichtungen genügen der Beziehung $dx^2 + dz^2 = (a/b)^2 dy^2$; die Steigung beträgt mithin b/a . Der Normalriß auf die xz -Ebene ist eine Kettenlinie, die Normalprojektionen auf die Ebenen $x \pm z = 0$ sind Exponentialkurven⁷⁾. Infolge des (komplex-) affinen Zusammenhangs mit einer gewöhnlichen Schraublinie ist sicher auch die Pseudoschraublinie eine *Gewindekurve*, d.h. ihre Tangenten gehören einem gewissen linearen Strahlkomplex (Gewinde) an. Dies wird sich später (§ 9) noch von einem anderen Gesichtspunkt aus bestätigen.

Im ersten Grenzfall $a = 0$ degeneriert die Linie $\xi = 0$ zur y -Achse $x = z = 0$: Die von derselben erzeugte Schraubfläche ist die *Wendelfläche*, die zu den ältesten Minimalflächen zählt.

Im zweiten Grenzfall $b = 0$ werden die ξ -Linien zu koachsialen Kreisen, während sich die Erzeugende $\xi = 0$ auf die in der xz -Ebene gelegene Kettenlinie $x/a = \operatorname{ch}(z/a)$ reduziert: Die sich einstellende Minimaldrehfläche ist das wohlbekannte *Katenoid*, auch *Kettenfläche* genannt.

§ 5. Eine tiefere Einsicht ergibt sich bei Heranziehung der *sphärischen Abbildung*. Ordnen wir also mit Gauss dem Flächenpunkt $T(\xi, \eta)$ jenen Punkt T^* der Einheitskugel zu, dessen Radius gleichsinnig parallel zu der in bestimmter Weise orientierten Flächennormale in T ist, und bilden wir zu diesem Zwecke die Matrix der partiellen Ableitungen von (4) nach ξ und η , oder bequemer von (2) nach φ und $\bar{\varphi}$ ($\varphi, \bar{\varphi}$ als unabhängige Parameter betrachtet),

$$(6) \quad \left\| \begin{array}{cc} -\sin \varphi \cos \varphi & -i \\ -\sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} & i \end{array} \right\| \cdot \begin{array}{l} r/2 \\ \bar{r}/2 \end{array}$$

⁷⁾ Vgl. diesbezüglich Fig. 1. — Die Pseudoschraublinien treten schon a.a.O. bei O. BONNET auf; außerhalb dieses Zusammenhanges diskutiert sie G. LORIA [12], 169.

dann legen deren Unterdeterminanten die Normalenrichtung fest:

$$\begin{aligned} x : y : z &= i(\cos \varphi + \cos \bar{\varphi}) : i(\sin \varphi + \sin \bar{\varphi}) : -\sin(\varphi - \bar{\varphi}) \\ &= \cos \xi : \sin \xi : -\operatorname{sh} \eta. \end{aligned}$$

Nunmehr bedarf es nur noch der Normierung zur Quadratsumme 1, um die Koordinaten des sphärischen Bildpunktes T^* zu erhalten:

$$(7) \quad x^* = \frac{\cos \xi}{\operatorname{ch} \eta}, \quad y^* = \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta}, \quad z^* = -\operatorname{th} \eta.$$

Aus diesen Formeln ist zu entnehmen, daß dem Parameterliniennetz der Minimalschraubfläche im sphärischen Bild das geographische Koordinatennetz der Einheitskugel entspricht. Im besonderen bilden sich die ξ -Linien auf die Parallelkreise und die η -Linien auf die Meridiane ab. Ersteres ist geometrisch einleuchtend, da die Neigung der Flächennormale längs einer Bahnschraublinie unveränderlich ist. Letzteres zeigt wiederum, daß sämtliche Tangentialebenen längs einer η -Linie parallel zur Achse des zugehörigen Meridiankreises sind, so daß bei Betrachtung in dieser Richtung die betreffende η -Linie die *Umrißkurve* der Fläche abgibt. Die den Umriß für die y -Richtung darstellende Kurve $\xi = 0$ läßt vermöge ihrer Gleichungen (5) erkennen, daß der längs einer η -Linie umschriebene Zylinder eine *Kettenlinie* als Normalschnitt besitzt. Damit ist eine bisher unbekannte, generelle und sehr einfache Erzeugung der Minimalschraubflächen gewonnen.

Satz 1. Wird ein „Kettenzylinder“ $x = a \cdot \operatorname{ch}(z/a)$ um die z -Achse verschraubt, so hüllt er stets eine Minimalschraubfläche ein⁸⁾.

Für $a \rightarrow 0$ artet der Kettenzylinder in das Ebenenbüschel um die y -Achse aus und hüllt dann die Wendelfläche ein, wogegen sich das Katenoid für $b \rightarrow 0$, also bei Rotation des Kettenzylinders einstellt.

§ 6. Die in Satz 1 festgehaltene Erzeugungsweise gibt auch eine brauchbare Grundlage für die *darstellend-geometrische Behandlung* der Minimalschraubflächen. Fig. 1 illustriert die Ent-

⁸⁾ Analog gilt etwas allgemeiner der gleichfalls noch nicht ausgesprochene Satz: Wird ein „Sinuszylinder“ $x = a \sin(z/c)$ um die z -Achse verschraubt, so hüllt er stets eine *Schraub-schiebfläche* ein. Auf diese Weise entstehen jedoch nicht die allgemeinsten Schraub-schiebflächen, sondern nur jene speziellen, deren Schiebkurven Schraublinien gleichen Anstiegs sind.

stehung von Grund- und Aufriß einer solchen Fläche, ausgehend von einer projizierenden Lage des erzeugenden Kettenzylinders. Der fehlende Grundriß der Berührungskurve kann folgendermaßen konstruiert werden: Sei e eine Erzeugende des Kettenzylinders und τ die zugehörige Tangentialebene (die sich sofort angeben läßt, da ihr Neigungswinkel ν gegen die z -Achse durch $\cos \nu = a/x$ festgelegt ist); die von τ bei der Verschraubung umhüllte Torse wird von τ längs einer zur Aufrißebene parallelen Erzeugenden f berührt, deren Abstand von der z -Achse den leicht angebbaren Be-

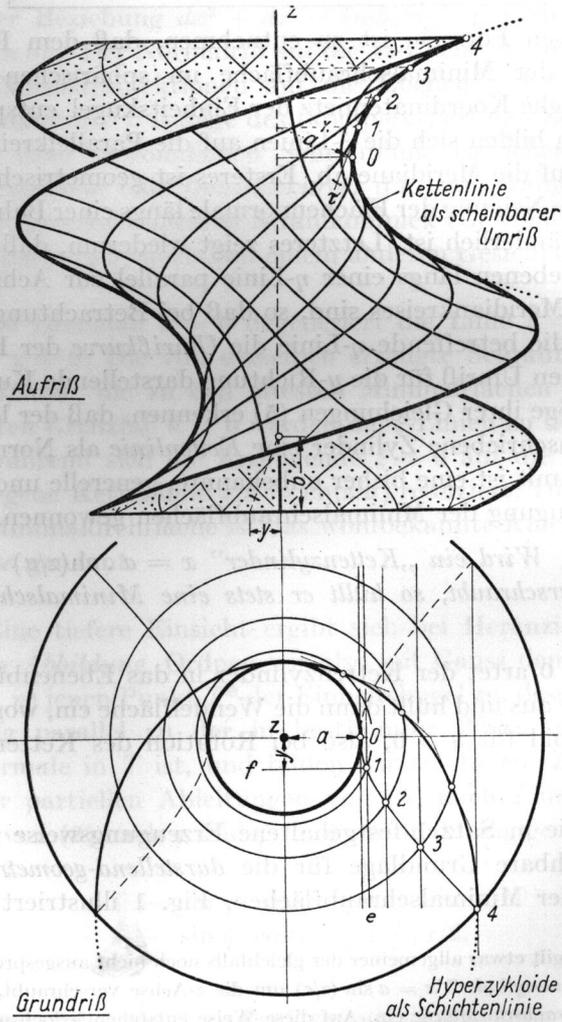


Fig. 1. Darstellung einer Minimalschraubfläche in Auf- und Grundriß
 ($a : b = 1 : 1$).

trag $y = b \operatorname{tg} \nu$ hat, wobei b den Schraubparameter bezeichnet. Im Schnitt von e und f hat man dann einen Punkt der Berührungskurve. Auch auf diese Weise läßt sich folgern, was auf Grund von (5) bereits bekannt ist, daß die Berührungskurve im Grundriß als Hyperbel erscheint.

§ 7. Um für die Minimalschraubfläche eine der (untereinander kongruenten) Schichtenlinien $z = \text{const}$ zu finden, setze man in (4) etwa $z = 0$. Die daraus fließende Parameterbedingung $\xi : \eta = -a : b$ läßt sich mittels eines Hilfsparameter θ durch $\xi = a\theta$, $\eta = -b\theta$ erfüllen und liefert damit die Darstellung

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= a \cos a\theta \operatorname{ch} b\theta - b \sin a\theta \operatorname{sh} b\theta \\ y &= a \sin a\theta \operatorname{ch} b\theta + b \cos a\theta \operatorname{sh} b\theta. \end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um eine sogenannte *Hyperzykloide*⁹⁾ — eine jener merkwürdigen Rollkurven, die als reelle Bahn eines Umfangspunktes eines komplexen Kreises ($R' = \bar{r}/2$) angesehen werden kann, wenn dieser auf einem nullteiligen Kreis ($R = ib$) rollt. Diese Feststellung steht in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die Schichtenlinien der Schraubflächen stets *Radlinien* sind, und zwar im allgemeinen Trochoiden, im Spezialfall gleich steiler Schiebkurven (vgl. Fußnote 8) jedoch Zykloiden.

Durchsichtiger gestaltet sich der Sachverhalt bei Verwendung des in Fig. 1 auch konstruktiv ausgewerteten Gedankens, die Mantelstrahlen e des die Schraubfläche erzeugenden Kettenzylinders $x = a \operatorname{ch}(z/a)$ jeweils in die Grundebene $z = 0$ zu verschrauben, wo sie dann die Schichtenlinie einhüllen. Der Schraubwinkel beträgt $\sigma = z/b$ und der Achsabstand $h = x$ bleibt unverändert, so daß sich die Schichtenliniengleichung in polaren Speerkoordinaten h, σ sofort hinschreiben läßt:

$$(9) \quad h = a \operatorname{ch} \frac{b\sigma}{a}.$$

Diese Gleichung kennzeichnet bekanntlich eine Hyperzykloide mit dem Scheitelradius $R + 2R' = a$ und dem Spitzenradius $R = ib$.

Es gilt mithin der ebenfalls noch nirgends genannte

Satz 2. *Eine Minimalschraubfläche kann stets durch Verschraubung einer Hyperzykloide um die im Mittelpunkt auf die Ebene errichtete Normale erzeugt werden, wenn der Schraubparameter gleich dem i -fachen des Spitzenabstandes gewählt wird.*

Die Spitze beschreibt dann eine Minimalschraublinie.

⁹⁾ H. WIELEITNER [13], 212.

§ 8. Für die Umrißkonstruktion bei geneigter Aufstellung (wie etwa in Fig. 2) wird die Berührungskurve des der Fläche umschriebenen und zur Blickrichtung parallelen Zylinders benötigt; werden die Sehstrahlen durch Lichtstrahlen ersetzt, so wird die Berührungskurve zur *Eigenschattengrenze*. Für die Gestaltsuntersuchung derselben bedeutet es offenbar keine Einschränkung, wenn die Lichtrichtung parallel zur xz -Ebene vorausgesetzt und dann durch den Ursprungsstrahl

$$(10) \quad x : y : z = m : 0 : 1$$

repräsentiert wird. Der der Eigenschattengrenze in der sphärischen Abbildung entsprechende Eigenschattengroßkreis der Bildkugel liegt in der zur Lichtrichtung normalen Durchmesserenebene

$$mx^* + z^* = 0.$$

Gemäß (7) fließt daraus unmittelbar die Gleichung der gesuchten Eigenschattengrenze in Flächenkoordinaten

$$(11) \quad m \cos \xi = \operatorname{sh} \eta.$$

Werden ξ und η aus (11) und den ersten zwei Gleichungen (4) eliminiert, so ergibt sich als *Grundriß* der transzendenten Eigenschattengrenze die algebraische *Kurve 4. Ordnung*

$$(12) \quad (x^2 + y^2 - a^2)[x^2 + (y + mb)^2] = m^2(a^2 + b^2)x^2.$$

Dieselbe ist bizirkular und symmetrisch zur y -Achse und weist in $L(0, -mb)$ einen Doppelpunkt auf; sie ist demnach die Inverse oder auch Fußpunktskurve eines Kegelschnitts. Darstellend-geometrisch ergibt sie sich als Ort der Fußpunkte der aus dem festen Punkt L auf die sich um den Mittelpunkt O drehende Schichtenlinie (9) gefällten Lote¹⁰.

§ 9. Die in § 5 eingeführte *sphärische Abbildung* ist — wie für jede Minimalfläche — *winkeltreu* (konform). Geometrisch beruht diese Tatsache darauf, daß einander die Minimalkurven entsprechen. In der Tat: Die Tangentialebenen einer Minimalfläche Φ in den Punkten einer Schiebkurve sind parallel zu einer isotropen Schiebrichtung, und die dazu parallelen Tangentialebenen der Bildkugel Φ^* berühren in den Punkten der beiden zur Schiebrichtung parallelen Erzeugenden, von denen auf Grund der Orien-

¹⁰) Vgl. diesbezüglich, insbesondere auch hinsichtlich der Schraub-schiebflächen, L. BURMESTER [9]. Ferner H. WIELEITNER [13], 210.

tierung die eine ausscheidet; jedenfalls sind einander aber die beiden Minimalkurvensysteme, bestehend aus den Schiebkurven von Φ und den Erzeugenden von Φ^* , zugeordnet, und damit folgt mittels der Laguerreschen Formel und der bei jeder topologischen Abbildung vorhandenen Doppelverhältnistreue hinsichtlich der Fortschreitungsrichtungen in entsprechenden Flächenelementen die Winkeltreue.

Das (ξ, η) -Netz im vorliegenden Fall ist demnach ebenso wie auf der Kugel auch auf der Minimalschraubfläche *orthogonal*. Die *Pseudoschraublinien* $\xi = \text{const}$ sind als Orthogonaltrajektorien der Bahnschraublinien $\eta = \text{const}$ *Gewindekurven*, denn ihre Tangenten gehören dem Bahnnormalengewinde der Schraubung an. Damit ist eine Aussage aus § 4 bestätigt und präzisiert. Nun ist aber bekannt, daß solche Kurven *geodätische Linien* der Schraubfläche abgeben, weil ihre Schmiegeebenen mit den Nullebenen der Kurvenpunkte (für das mit dem Gewinde verknüpfte lineare Nullsystem) zusammenfallen und daher die jeweiligen Flächennormalen enthalten. Diese speziellen Geodätischen einer Schraubfläche wurden von E. Müller „Hauptgeodätische“ genannt ¹¹⁾.

§ 10. Schreibt man in (1)

$$(13) \quad r = c \cdot e^{i\lambda} \quad (c > 0)$$

und läßt man r unter Festhaltung des absoluten Betrages c variieren, indem man λ das Intervall von 0 bis 2π durchlaufen läßt, so erhält man eine einparametrische Serie von Minimalschraubflächen, die durch *Biegung* auseinander hervorgehen. Zum Nachweis berechne man mit Benützung von (6) das *Bogenelement*

$$(14) \quad ds^2 = \frac{1}{4} r \bar{r} [\cos(\varphi - \bar{\varphi}) + 1] d\varphi d\bar{\varphi} = \frac{1}{2} c^2 \cdot \text{ch}^2 \eta (d\xi^2 + d\eta^2),$$

das sich als unabhängig von λ erweist. — Durchläuft λ das genannte Intervall, so ändern sich die Koeffizienten der Flächengleichung (4) gemäß

$$(15) \quad a = c \cdot \cos \lambda, \quad b = c \cdot \sin \lambda,$$

und die Minimalfläche verbiegt sich kontinuierlich vom *Katenoid* $\lambda = 0$ als Ausgangsform zu einer rechtsgängigen *Wendelfläche* $\lambda = \pi/2$, hierbei allgemeine Zwischenformen von Minimalschraubflächen durchlaufend (Fig. 2); dann weiter zum umgestülpten *Katenoid* $\lambda = \pi$, zu einer linksgängigen *Wendelfläche* $\lambda = 3\pi/2$ und schließlich zur *Urform* $\lambda = 2\pi$.

¹¹⁾ E. MÜLLER [11].

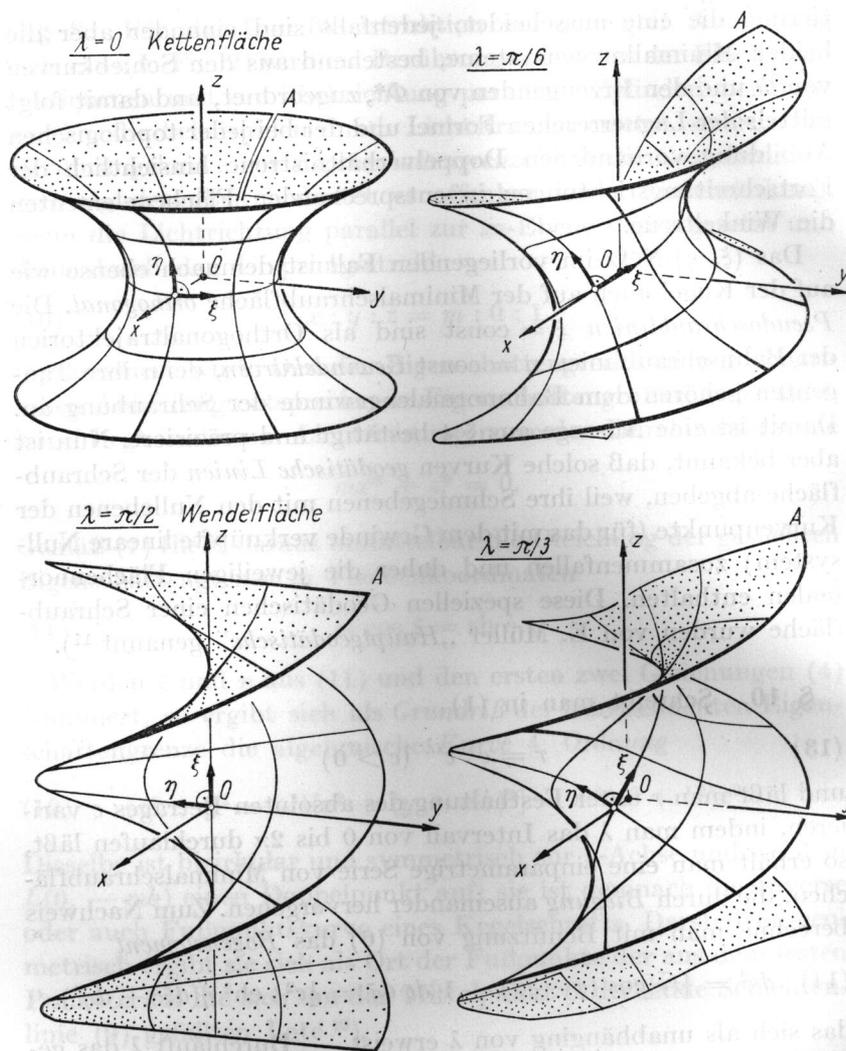


Fig. 2: Bonnetsche Verbiegung der Kettenfläche über allgemeine Minimalschraubflächen zur Wendelfläche.

Dieser geschlossene Biegungszyklus von Minimalflächen ist als *Bonnetsche Transformation* bekannt. Jeder Flächenpunkt beschreibt dabei eine *Ellipse* um den Ursprung, auf der die vier Stationen $\lambda = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ die Endpunkte konjugierter Durchmesser bilden¹²⁾. Jedes Flächenelement behält während der Bie-

¹²⁾ Diese Eigenschaft wurde zur Konstruktion der Zwischenformen in Fig. 2 ausgenutzt: Zunächst wurden die einfachen Grenzformen $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_1 = \pi/2$ in gleicher Weise axonometrisch abgebildet; anschließend wurden die beiden Lagen

gung seine Stellung unverändert bei — wie im vorliegenden Fall aus der Unabhängigkeit des sphärischen Bildes (7) vom Biegeparameter λ zu ersehen ist — und erfährt lediglich eine zu λ proportionale Drehung um die Flächennormale.

Daß die η -Linien *geodätisch* sind, leuchtet jetzt ein, denn diese ihre in den Sonderfällen $\lambda = 0$ oder $\pi/2$ evidente Eigenschaft kann während des Biegeprozesses nicht verloren gehen.

§ 11. Flächenkoordinaten von der Art des verwendeten (ξ, η) -Systems, die im sphärischen Bild auf Parallelkreise und Meridiane führen, lassen sich auf jeder Fläche einführen; sie überziehen dieselbe mit einem Raster aus Lichtgleichen (Isophoten) für z -parallele Beleuchtung und Eigenschattengrenzen für z -normale Lichtrichtungen. Dieses schon von O. Bonnet benützte Koordinatennetz fällt für *Minimalflächen* infolge der Winkel-treue der sphärischen Abbildung (bei beliebiger Aufstellung) orthogonal aus. Deutet man in diesem Fall die Bonnetschen Koordinaten ξ, η eines Flächenpunktes T als kartesische Koordinaten eines Bildpunktes \mathbb{T} in der Ebene, so erhält man eine zweite *konforme Abbildung* der Minimalfläche, diesmal auf eine Ebene. Für die Minimalschraubflächen ist dies ohne weiteres aus (14) abzulesen, der tiefere geometrische Grund liegt aber wieder darin, daß die Minimalkurven $\varphi, \bar{\varphi} = \text{const}$ der Fläche auf die Minimalgeraden $\xi \pm i\eta = \text{const}$ der Ebene abgebildet werden.

Unter Zwischenschaltung der Bildkugel erweist sich die Bonnetsche Abbildung $T \rightarrow \mathbb{T}$ übrigens als Zusammensetzung der sphärischen Abbildung $T \rightarrow T^*$ mit der Mercator-„Projektion“ $T^* \rightarrow \mathbb{T}$.

§ 12. Die *Bewegungsgruppe* $\varphi' = \varphi + \delta$ der die Minimalschraubfläche bestimmenden Schraublinie m ist im Komplexen zweigliedrig und kann in ∞^1 *eingliedrige Untergruppen*

$$(16) \quad \varphi' = \varphi + \gamma t \quad (\gamma = \alpha + i\beta = \text{const}, t \text{ reell})$$

zerlegt werden. Unterliegt gleichzeitig \bar{m} der konjugierten Bewegung, so wird damit jeweils eine eingliedrige *Transformationsgruppe* \mathfrak{B} der Minimalfläche

$$(17) \quad \xi' = \xi + \alpha t, \quad \eta' = \eta + \beta t$$

T_0, T_1 eines Flächenpunktes (ξ, η) auf ein das verwendete Achsenkreuz $O(x, y, z)$ tragendes, durchsichtiges Pauspapier übertragen. Auf demselben wurde dann die Linearkombination $\vec{OT}_0 \cdot \cos \lambda + \vec{OT}_1 \cdot \sin \lambda = \vec{OT}$ gebildet — was bei geschickter Verwendung des Stechzirkels nur zwei Hilfslinien erfordert — und der so gewonnene Punkt T wurde schließlich auf ein mit dem gleichen Achsenkreuz $O(x, y, z)$ versehenes Zeichenpapier durchgestochen.

induziert. In der Bonnetschen Ebene (ξ, η) bilden sich diese Automorphismen \mathfrak{B} und ihre Bahnkurven auf die ∞^1 reellen Schiebungsgruppen und deren Bahngeraden ab.

Nachdem die ∞^1 Bahnkurven einer Automorphie \mathfrak{B} untereinander kongruent sind — sie gehen ja durch Schraubung auseinander hervor — genügt es, als Prototyp etwa die Bahn des Punktes $\xi = \eta = 0$ zu betrachten. Ihre Darstellung lautet auf Grund von (4)

$$(18) \quad \begin{cases} x = a \cos \alpha t \operatorname{ch} \beta t + b \sin \alpha t \operatorname{sh} \beta t \\ y = a \sin \alpha t \operatorname{ch} \beta t - b \cos \alpha t \operatorname{sh} \beta t \\ z = (\alpha b + \beta a)t. \end{cases}$$

Diese Kurve ist im allgemeinen transzendent und kann, da sie durch Zusammensetzung zweier komplexen Schraubungen erzeugt wird, in Anlehnung an eine von F. Hohenberg geprägte Bezeichnung¹³⁾ eine „Pseudohelikoide“ genannt werden; im Grundriß erscheint sie als *Pseudotrochoide*⁹⁾. Zu dieser Kurvenkategorie gehören beispielsweise die Schichtenlinien $z = \text{const}$ ($\alpha : \beta = -a : b$), ferner, wie sich zeigen wird, noch eine Reihe anderer wichtiger Flächenkurven, u.a. die Falllinien, Schmieglinien und Krümmungslinien.

Je zwei solche Kurvenscharen durchsetzen einander offenbar *isogonal*, wie es die zugeordneten Parallelenbüschel in der Bonnetschen Bildebene zeigen. Im sphärischen Bild würden die bekannten *Kugelloxodromen* erscheinen.

§ 13. Was zunächst die *Falllinien* betrifft, so sind diese als

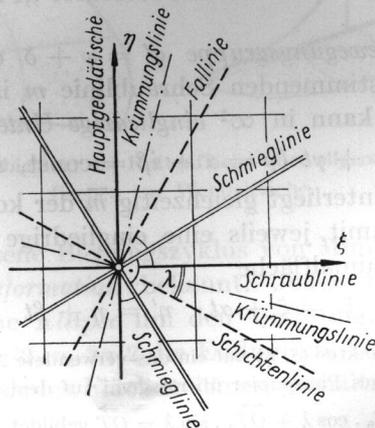


Fig. 3: Bonnetsches Bild einer Minimalschraubfläche.

¹³⁾ F. HOHENBERG [14].

Orthogonaltrajektorien der Schichtenlinien $\alpha : \beta = -a : b$ durch

$$(19) \quad \alpha : \beta = b : a$$

gekennzeichnet. Im Grundriß erscheinen sie als *Parazykloiden*, die die Drehschar der Hyperzykloiden (8) rechtwinklig durchsetzen, so daß deren Scheitelkreis und Spitzenkreis die Rollen tauschen.

Bedenkt man weiterhin, daß die Minimalkurven l und \bar{l} als Schiebkurven ein *konjugiertes Netz* bilden, ebenso die Schichtenlinien $\alpha : \beta = -a : b = -\text{ctg } \lambda$ zusammen mit den Eigenschaftengrenzen für schichtenparalleles Licht, also den η -Linien, so beherrscht man in jedem Flächenpunkt die Involution der konjugierten Tangenten. Deren Doppelstrahlen, die Haupt- oder Schmiegtangenten, schließen demnach einen rechten Winkel ein und hälften die Winkel $\lambda \pm \pi/2$ zwischen den Tangenten der Schichtenlinien und der η -Linien. In Anbetracht des konformen Bonnetschen Bildes (Fig. 3) lassen sich dann aber die *Asymptoten-* oder *Schmieglinien* der Minimalschraubfläche einfach durch

$$(20) \quad \alpha : \beta = \text{ctg} \left(\pm \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2} \right)$$

kennzeichnen. In gleicher Weise hätte man übrigens auch das Netz der Falllinien und Schraublinien (ξ -Linien) heranziehen können, die auf jeder Schraubfläche ein konjugiertes Netz bilden.

Vermehrung der Richtungswinkel der Schmieglinien um $\pi/4$ (Fig. 3) führt schließlich auf das System der *Krümmungslinien*

$$(21) \quad \alpha : \beta = \text{tg} \frac{\lambda}{2}, \quad \text{bzw.} \quad -\text{ctg} \frac{\lambda}{2}.$$

Zusammenfassend gilt somit

Satz 3. *Die Schmieglinien und Krümmungslinien einer allgemeinen Minimalschraubfläche sind Pseudohelikoiden und erscheinen daher im Normalriß auf eine achsennormale Ebene als Pseudotrochoiden. Sie und die auf der Fläche verlaufenden Bahnschraublinien, Hauptgeodätischen, Schichtenlinien und Falllinien (für lotrechte Achsenlage) durchsetzen einander gegenseitig isogonal¹⁴⁾.*

Man macht sich leicht klar, daß die Minimalschraubflächen die einzigen Schraubflächen sind, deren Bahnschraublinien von den Schichten- oder Falllinien unter konstantem Winkel durchsetzt werden.

¹⁴⁾ Die Isogonalität findet sich zum Teil bereits bei U. DINI [3].

§ 14. Hinsichtlich der Verhältnisse auf den beiden Grenzformen der Minimalschraubflächen wären die nachstehenden Besonderheiten zu vermerken.

Die auf der *Kettenfläche* $\lambda = 0$ ($b = 0$) verlaufenden Pseudohelikoiden, repräsentiert durch das Prototyp

$$(22) \quad x = c \cdot \cos at \operatorname{ch} \beta t, \quad y = c \cdot \sin at \operatorname{ch} \beta t, \quad z = c \cdot \beta t,$$

werden auf Grund der Identität $x : y = \operatorname{ctg} (z\alpha/\beta c)$ durch koachsiale Wendelflächen mit dem Parameter $p = c\beta/\alpha$ ausgeschnitten und bilden sich im Grundriß als sogenannte „Summenspiralen“ mit der Polargleichung $r = c \cdot \operatorname{ch} (\varphi\beta/\alpha)$ ab. Dies gilt insbesondere für die Schmieglinien $\alpha : \beta = \pm 1$.

Demgegenüber werden die auf einer *Wendelfläche* $\lambda = \pi/2$ ($a = 0$) verlaufenden Pseudohelikoiden, vertreten durch

$$(23) \quad x = c \cdot \sin at \operatorname{sh} \beta t, \quad y = -c \cdot \cos at \operatorname{sh} \beta t, \quad z = c \cdot \alpha t,$$

durch koachsiale Drehflächen vom Typ $r = c \cdot \operatorname{sh} (z\beta/\alpha c)$ ausgeschnitten, und sie erscheinen im Grundriß als sogenannte „Differenzspiralen“ mit der Polargleichung $r = c \cdot \operatorname{sh} (\varphi\beta/\alpha)$. Dies gilt insbesondere für die Krümmungslinien $\alpha : \beta = \pm 1$.

SCHRIFTTUM

H. F. SCHERK.

- [1] Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *J. reine angew. Math.* **13**, 185—208 (1835).

O. BONNET.

- [2] Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des surfaces courbes. *J. Math. pur. appl.* (2) **5**, 153—266 (1860).

U. DINI.

- [3] Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante. *Ann. Mat. pura appl.* **7**, 5—18 (1865).

G. DARBOUX.

- [4] Leçons sur la théorie générale des surfaces I, Paris 1887.

L. BIANCHI.

- [5] Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1894.

W. BLASCHKE.

- [6] Einführung in die Differentialgeometrie, Berlin 1950.

S. LIE.

- [7] Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, *Math. Ann.* **14**, 331—416 (1878).

L. BURMESTER.

- [8] Kinematische Flächenerzeugung mittelst zylindrischer Rollung. Z. Math. Phys. **33**, 337—348 (1888).
- [9] Kinematisch-geometrische Konstruktionen der Parallelprojektion der Schraubflächen und insbesondere des Schattens derselben. Z. Math. Phys. **18**, 185—202 (1873).

E. MÜLLER.

- [10] Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., **118**, 1—11 (1909).
- [11] Schraubflächen und Strahlgewinde. Ibid. **125**, 921—965 (1916).

G. LORIA.

- [12] Curve sghembe speciali II, Bologna 1925.

H. WIELEITNER.

- [13] Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.

F. HOHENBERG.

- [14] Über die Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen. Monatsh. Math. **54**, 221—234 (1950).

(Oblatum 5-10-51).