Dagli «Atti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana» Taormina 25-31 Ott. 1951

SUR LES LIGNES D DES QUADRIQUES

PAR WALTER WUNDERLICH

On appelle « *lignes D* » — d'après DARBOUX, qui les a considérées pour la première fois (1) — les courbes, tracées sur une surface donnée, et dont les sphères osculatrices sont tangentes à la surface. Ces courbes, offrant un intérêt particulier pour le domaine de la géométrie conforme, jusqu'à présent ont été traitées exclusivement par la méthode analytique. Dans quelques travaux récents l'auteur s'est servi avec succès de considérations synthétiques et a pu signaler un nombre de nouvelles propriétés remarquables des lignes D des *surfaces du second ordre* (2).

Soit l une *ligne D* d'une surface Q quelconque (supposée analytique), T un point courant, t la tangente, τ le plan osculateur, et S la sphère osculatrice de l. L'intersection QS est une courbe h, ayant en commun avec l quatre points confondus en T. Lorsque T est un point double de h, l traverse l'une des branches de h simplement, l'autre en l'osculant. Chaque section plane de Q, menée par t, a $2+1=3$ points unis en commun avec h (au moins), et son cercle de courbure est donc situé sur la sphère S, que l'on reconnaît comme étant la *sphère de Meusnier* de l'élément linéaire (T, t). Parmi les plans passant par t, le plan osculateur τ de h est distingué: Toutes les courbes tracées sur la surface donnée, et contenant l'élément (T, t, τ) ou l'élément analogue de l'autre branche de h — et seulement celles-ci — rencontreront h en $3+1=4$ points confondus (au moins) et possèdent donc S comme *sphère osculatrice*. Lorsque tout élément linéaire (T, t) de Q, moyennant la sphère de MEUSNIER et

(1) C. R. 73 (1871), 732-736.

(2) Mh. Math. 55 (1951), 76-81, Mat. Tidsskr. 1951, 9-26. Un mémoire détaillé « Euklidische und nichteuklidische D-Linien auf Quadriken », déjà sous presse, paraîtra dans les Annali di matematica [33 (1952), 145-164].

son intersection h avec Q, détermine un seul élément du second ordre (T, t, τ), il y en a aussi ∞^3 au total, et l'on trouvera les lignes D de Q en intégrant le système des éléments (T, t, τ), ce qui demande la résolution d'une équation différentielle du second ordre.

Tenant compte du fait que le cercle de courbure $S\tau$ de l rencontre la courbe h et par conséquent la surface Q en quatre points confondus, on peut caractériser les lignes D aussi par la propriété que leurs cercles de courbure *surosculent* la surface supportante.

Supposons maintenant que la surface donnée Q soit une *quadrique.* Les courbes auxiliaires h, fournies par les sphères tangentes S de Q, sont des *quartiques unicursales*, contenant les quatre *points cycliques* I_1, I_2, I_3, I_4 de Q. Si l'on projette une telle courbe à partir de son point double T, on obtient un *cône* C du second ordre, possédant les deux tangentes t en T comme génératrices, et les plans osculateurs τ comme plans tangents le long de ces génératrices. Puisque tous les ∞^3 cônes C passent par les quatre points cycliques I_n, leurs courbes à l'infini, c, remplissent seulement le *faisceau de coniques* qui est défini par les points fondamentaux I_n. Désignons par L la *surface développable* engendrée par les tangentes t d'une ligne D de Q, appelée l. Puisque les plans osculateurs τ de l, et par conséquent les cônes associés C, sont tangents à la surface L le long des génératrices, la courbe à l'infini de L aura en chacun de ses points un contact avec une des coniques c du faisceau $I_1 I_2 I_3 I_4$: On conclut immédiatement que la courbe à l'infini de L est nécessairement identique avec une de ces coniques. Réciproquement, chaque courbe sur Q dont les tangentes rencontrent une certaine des coniques c — ce qui signifie qu'elles sont parallèles aux génératrices d'un cône du second ordre et *concyclique* avec la quadrique Q — est une *ligne* D de Q.

Ainsi nous sommes arrivés sans peine à un résultat remarquable, caractérisant les lignes D des quadriques comme *hélices affines.* Si l'on fait usage maintenant d'une méthode simple que l'auteur a appliquée aux hélices ordinaires des quadriques (3), on a à regarder les *conjuguées* $\bar{t}$ des tangentes t de la ligne l: Commes polaires réciproques de t par rapport à la quadrique Q (supposée régulière maintenant) les $\bar{t}$ sont tangentes au *cône polaire* γ de la conique directrice c, rencontrée par les t. Projetant à partir du *centre* O de Q — qui est le sommet du cône γ et peut être à distance finie ou non — sur

(3) Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 155 (1947), 309-331.

un plan quelconque π, chaque couple $t, \bar{t}$ donne un couple de droites $t', \bar{t}'$, conjuguées par rapport au contour apparent q' de Q, ou « *normaux* » si l'on fait jouer à la conique q' le rôle de l'absolu d'une métrique (elliptique, hyperbolique ou parabolique) dans π. Lorsque les droites $\bar{t}'$ sont les tangentes d'une certaine conique γ', image et trace du cône γ, on peut dire que la *perspective* l' de la ligne D regardée l est une *développante de la conique* γ', au sens de la géométrie basée sur le contour apparent de la quadrique Q. Il serait du reste aisé à démontrer que l'intersection $Q\gamma$ représente une ligne de courbure de Q, qui porte les points de rebroussement de toutes les lignes D appartenant à la même conique directrice, et que les ∞^1 coniques γ' forment un système confocal (au sens de la géométrie susdite dans π).

Appelons X, Y, Z les points diagonaux du quadrangle $I_1 I_2 I_3 I_4$; ils indiquent, comme on sait, les directions des axes principaux de la quadrique Q (supposée à centre pour l'instant) et en outre de toutes les surfaces concycliques. Prenons, par exemple, pour tout point T d'une ligne D, le *faisceau concyclique* défini par Q et la sphère osculatrice S, et regardons dans ce faisceau encore le cône C (déjà utilisé) et un paraboloide P, ayant son contact avec le plan à l'infini soit en X. Le *bi-rapport* $\xi = (P\,Q\,S\,C)$ est déterminé également par les coniques à l'infini des quatre surfaces, et donc *constant* le long de la ligne D. Le même bi-rapport ξ est défini par les quatre plans polaires d'un point fixe, disons X: Ces plans étant le plan à l'infini, le plan principal $O\,Y\,Z$ de Q, et les plans parallèles passant par le point courant T et le centre T^* de la sphère osculatrice S, on reconnaît, en répétant la réflexion pour Y et Z, l'existence d'une certaine *affinité* reliant les points T et T^*. Cette affinité, conservant les plans principaux de la quadrique Q, transforme alors chacune des ∞^1 lignes D, définies par la même conique directrice c, en sa *courbe polaire*, qui est donc aussi une *hélice affine* sur une autre quadrique Q^* (mais non une ligne D elle-même, excepté le cas où la surface Q est de révolution).

Il est intéressant de constater que cette liaison affine entre les points et les centres correspondants des sphères osculatrices — qui reste valable aussi aux cas limites des quadriques sans centre ou singulières, pour le moment exclues — se montre comme *caractéristique* pour les lignes D des quadriques: Il n'y a point d'autres courbes gauches, affines à leurs propres polaires ([2]).

Finalement il serait à remarquer que la théorie euclidienne, ici esquissée, peut être généralisée sans grandes difficultés pour les *espaces elliptiques et hyperboliques* de CAYLEY et KLEIN. On trouve que les tangentes d'une ligne D non-euclidienne d'une quadrique Q touchent encore une seconde quadrique (« directrice »), concyclique avec Q (²). En appliquant une transformation bien connue de DARBOUX on parviendra enfin — par une voie purement géométrique — aux *lignes* D *euclidiennes des cyclides,* parmi lesquelles on retrouvera (comme exemples bien spéciaux) les *loxodromies du tore* et les *loxodromies polyconiques* de CESÀRO.

Gubbio - Soc. Tipografica "ODERISI„ - 1953