

Überblick über die Krümmungsverhältnisse des Ellipsoids

Von W. Wunderlich

1. Einleitung.

Die örtliche Krümmung einer Fläche wird durch die beiden Hauptkrümmungsradien $1/\kappa_1, 1/\kappa_2$ ausreichend gekennzeichnet. Besonderes Interesse kommt aber auch gewissen Kombinationen zu, so vor allem dem biegungsinvarianten GAUSSschen Krümmungsmaß $K = \kappa_1 \kappa_2$ und der mittleren Krümmung $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$, die das gemeinsame Mittel der Normalkrümmungen für orthogonale Fortschreitungsrichtungen darstellt, ferner aber auch dem Hauptkrümmungsverhältnis $J = \kappa_1 : \kappa_2 = 1 - \varepsilon^2$, das durch die Exzentrizität ε Rückschlüsse auf die Gestalt der DUPINschen Indikatrix gestattet.

Zur Beurteilung der Verteilung dieser Größen auf einer Fläche können die Ortslinien dienen, auf welchen sich diese Größen nicht ändern. In der vorliegenden Note werden nun für das dreiaxige Ellipsoid die Kurven ermittelt, längs welchen K, J, κ_1 oder κ_2 konstant sind. Es ergeben sich der Reihe nach Kurven 4., 8., 12., bzw. 16. Ordnung, deren Verlauf für ein spezielles Beispiel auch im Bild festgehalten ist. Für die Kurven $K = \text{const}$ wird eine sehr anschauliche, elementare Behandlung dargelegt.

2. Kurven konstanten Krümmungsmaßes.

Der Untersuchung wird folgende Erklärung des GAUSSschen Krümmungsmaßes K zugrunde gelegt, die bei elliptischen Flächenpunkten anwendbar ist: Bezeichnet f den Inhalt des Ovals, das eine im Abstand h parallel zur Tangentialebene gelegte Ebene aus der Fläche herausschneidet, dann gilt

$$(1) \quad K = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi h}{f} \right)^2$$

Zum Beweis denke man sich die Fläche auf ein Normalkoordinatensystem bezogen, dessen Achsen X, Y, Z mit den Hauptkrümmungsrichtungen bzw. der Flächennormale zusammenfallen:

$$(2) \quad Z = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \text{Gl.h.O.}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Der Hauptnormalschnitt $Y = 0$ hat als Krümmungsradius den Parameter $1/2\alpha$ der Schmiegeparabel $Z = \alpha X^2$, besitzt daher die Krümmung $\kappa_1 = 2\alpha$. Analog hat man $\kappa_2 = 2\beta$, mithin

$$(3) \quad K = \kappa_1 \kappa_2 = 4\alpha\beta.$$

Bedenkt man, daß die Schichtenlinie $Z = h$ bis auf Abweichungen höherer Ordnung durch die Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{h/\alpha}$ und $\sqrt{h/\beta}$ angenähert wird, so hat man für die Schichtenfläche

$$(4) \quad f = \frac{\pi h}{\sqrt{\alpha\beta}} + \text{Gl.h.O.}$$

Aus (3) und (4) folgt dann sofort (1).

Im Falle eines Ellipsoids $\Phi(a, b, c)$ läßt sich nun die Schichtenfläche f zu dem parallelen Zentral-schnitt F ins Verhältnis setzen, wobei dasselbe nur von den entsprechenden Schichtenkoten h und m abhängt und aus einer affinen Kugel vom Radius m berechnet werden kann, da es affin-invariant ist (Fig. 1):

$$(5) \quad \frac{f}{F} = \frac{r^2}{m^2} = \frac{h(2m-h)}{m^2} = \frac{2h}{m} \left(1 - \frac{h}{2m} \right).$$

Geht man mit diesem Ausdruck für f in die Formel (1) ein, so erhält man mit

$$(6) \quad K = \left(\frac{\pi m}{F} \right)^2$$

das Krümmungsmaß durch den Zentralabstand m der Tangentialebene und den parallelen Zentralschnitt F ausgedrückt.

Alle einer Kugel umschriebenen gleichseitigen Drehzylinder (mit quadratischem Achsenschnitt) sind kongruent, woraus durch Anwendung einer inhaltstreuen Affinität folgt, daß alle entsprechenden Umzylinder eines Ellipsoids gleiches Volumen haben:

$$(7) \quad V = 2mF = \text{const} = 2\pi abc.$$

Elimination von F aus (6) und (7) liefert dann die SALMON-

sche Krümmungsformel [1]

(8)

$$K = \frac{m^4}{a^2 b^2 c^2}$$

Für jede Ortslinie $K = \text{const}$ gilt danach auch $m = \text{const}$ und man erhält sie als Berührungslinie der dem gegebenen Ellipsoid $\Phi(a, b, c)$ und der konzentrischen Kugel $\wedge(m)$ umschriebenen Torse 4. Klasse θ . Es ist dies eine Kurve 4. Ordnung, die von dem zu \wedge bezüglich Φ polarreziproken Ellipsoid $\Psi(a^2/m, b^2/m, c^2/m)$ ausgeschnitten wird. Eliminiert man aus dem Gleichungspaar von Φ und Ψ

$$(9) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{m^2} \quad (a \geq b \geq c)$$

jeweils eine Koordinate, so erhält man die Normalprojektionen der fraglichen Ortslinien auf die Hauptebenen:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{x^2(a^2-c^2)}{a^4} + \frac{y^2(b^2-c^2)}{b^4} &= 1 - \frac{c^2}{m^2} \\ \frac{x^2(a^2-b^2)}{a^4} - \frac{z^2(b^2-c^2)}{c^4} &= 1 - \frac{b^2}{m^2} \quad (a \geq m \geq c) \\ \frac{y^2(a^2-b^2)}{b^4} + \frac{z^2(a^2-c^2)}{c^4} &= \frac{a^2}{m^2} - 1 \end{aligned}$$

Es ergeben sich drei Systeme ähnlicher und koachsialer Kegelschnitte — wie auch rein geometrisch leicht einzusehen wäre — und zwar Ellipsen im Grund- und Kreuzriß, Hyperbeln im Aufriß (Fig. 2). Für $m = b$ tritt offenbar eine in zwei Ellipsen zerfallende Ortslinie auf.

Die Kurven konstanten Krümmungsmaßes auf den Flächen 2. Grades haben übrigens noch eine bemerkenswerte differentialgeometrische Eigenschaft: Die berührenden Normalschnitte weisen im Berührungspunkt einen Scheitel auf. Um dies schnell einzusehen, beachte man, daß die zu einem beliebigen Punkt P einer Kurve $K = \text{const}$ gehörige Flächennormale p und die Erzeugende q der Torse θ in einer Durchmesserene δ liegen. Der durch p und den unendlich fernen Pol von δ gelegte ebene Schnitt besitzt mithin einerseits p zum Durchmesser und andererseits die reziproke Polare \bar{q}

von q als Tangente im Punkt P , der wegen $p \perp \bar{q}$ Scheitel ist; als zu q konjugierte Flächentangente ist \bar{q} aber auch Tangente der Berührungskurve von Θ , also der Kurve $K = \text{const.}$ (Im allgemeinen gehen durch einen Flächenpunkt drei Fortschreitungsrichtungen, deren Normalschnitte daselbst Scheitel aufweisen. Das durch Integration dieser Linienelemente gewonnene dreifache Kurvensystem einer Fläche wurde von DE LA GOURNERIE betrachtet, insbesondere auch für den Fall der Flächen 2. Ordnung, wo sich neben den beiden Erzeugendenscharen die Kurven $K = \text{const}$ einstellen [2]). (Die Kurven konstanten Krümmungsmaßes auf dem Ellipsoid decken sich übrigens auch mit den von L. POINSOT in die Kreiseltheorie eingeführten "Polhodie").

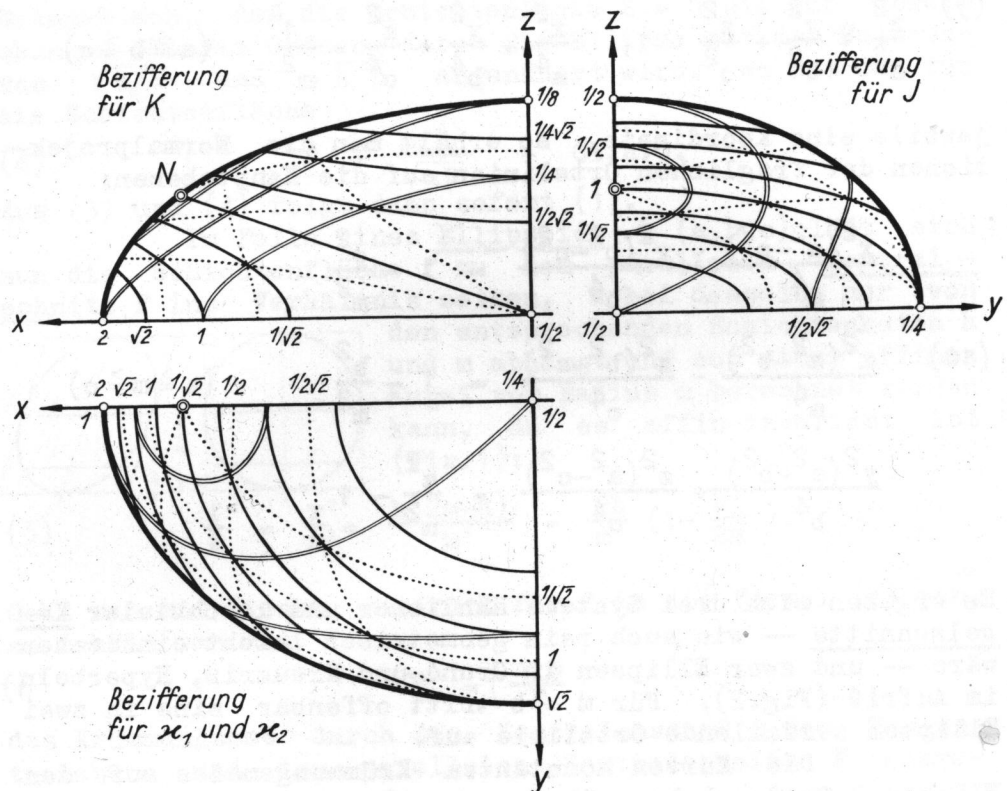


Fig. 2: Oktant des dreiachsigen Ellipsoids $\Phi(2, \sqrt{2}, 1)$ in Grund-, Auf- und Kreuzriß mit eingetragenen Kurven konstanten Krümmungsmaßes K (voll), Kurven konstanter Hauptkrümmung α_1 oder α_2 (punktiert) und Kurven konstanten Hauptkrümmungsverhältnisses J (Doppellinien)

3. Kurven konstanter Hauptkrümmung.

Für das Folgende wird der Einsatz des Matrizenkalküls bequem sein [3]. Bezeichne φ die Spaltenmatrix mit den Elementen x, y, z und $\tilde{\varphi}$ mit der Tilde als Stürzungszeichen — $\tilde{\varphi}$ die entsprechende Zeilenmatrix (x, y, z) ; ist ferner $\alpha = \tilde{\alpha}$ die Diagonalmatrix mit den Hauptelementen $\alpha = 1/a^2$, $\beta = 1/b^2$ und $\gamma = 1/c^2$, dann kann mit Benützung der üblichen Produktregeln die Gleichung (9) des Ellipsoids Φ in der Gestalt

$$(11) \quad \tilde{\varphi} \alpha \varphi = 1$$

geschrieben werden. Die Tangentialebene τ in einem Flächenpunkt $P(\varphi_0)$ lautet

$$(12) \quad \tilde{\varphi}_0 \alpha \varphi = 1 \quad \text{oder} \quad \tilde{m} \varphi = 1 \quad \text{mit} \quad m = \alpha \varphi_0,$$

ihr Zentralabstand beträgt

$$(13) \quad m = 1/\mu \quad \text{mit} \quad \mu^2 = \tilde{m} m = \tilde{\varphi}_0 \alpha^2 \varphi_0.$$

Eine Φ in P berührende Kugel Σ mit dem Radius r kann dann angesetzt werden durch

$$(14) \quad (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_1)(\varphi - \varphi_1) = r^2, \quad \text{wobei} \quad \varphi_1 = \varphi_0 - r \frac{m}{\mu} = \varphi_0 - mr m.$$

Sie schneidet das Ellipsoid nach einer Kurve 4. Ordnung mit Doppelpunkt, deren Doppelpunktstangenten die beiden Fortschreitungsrichtungen in P anzeigen, zu welchen die Normalkrümmung $\kappa = 1/r$ gehört. Zusammenfallende Richtungen kennzeichnen die Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 . Zur Behandlung dieser örtlichen Verhältnisse empfiehlt es sich, durch $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ örtliche Koordinaten x', y', z' einzuführen. Einsetzung in (11) und (14) liefert die neuen Darstellungen.

$$(11') \quad \Phi \dots \tilde{\varphi}' \alpha \varphi' + 2 \tilde{\varphi}_0 \alpha \varphi' = 0,$$

$$(14') \quad \Sigma \dots \tilde{\varphi}' \varphi' + 2mr \tilde{\varphi}_0 \alpha \varphi' = 0.$$

Subtraktion der mit $1/mr = \mu \kappa$ multiplizierten zweiten Gleichung von der ersten liefert unter Benützung der Einheitsmatrix \mathcal{E}

$$(15) \quad \tilde{\varphi}' \mathcal{L} \varphi' = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = \alpha - \mu \kappa \mathcal{E}.$$

Dies ist die Gleichung eines vom Flächenpunkt P ausstrahlenden Kegels 2. Ordnung Δ , der die Schnittkurve $\Phi \Sigma$ aus P projiziert und demnach deren bereits genannte Doppelpunktstangenten enthält. Dieselben fallen zusammen, wenn Δ die Tangentialebene τ berührt, mit anderen Worten deren Polare t enthält. Wird also t durch eine Spaltenmatrix λ

festgelegt, dann ist $\tilde{L}\varphi' = 0$ die Polarebene von t bezüglich Δ , und diese stimmt gemäß (12) mit der Tangential-ebene $\tilde{\varphi}_0 \alpha \varphi' = 0$ überein, wenn

$$(16) \quad \tilde{L}\mathcal{L} = \tilde{\varphi}_0 \alpha \quad \text{oder} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^{-1} \alpha \varphi_0.$$

t liegt nun auf Δ (oder in τ), wenn

$$(17) \quad \tilde{L}\mathcal{L}\mathcal{L} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \tilde{\varphi}_0 \alpha \mathcal{L}^{-1} \alpha \varphi_0 = 0.$$

Diese Bedingung läßt sich sofort explizit hinschreiben und lautet (bei Unterdrückung der Indizes)

$$(18) \quad \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha - \mu x} + \frac{\beta^2 y^2}{\beta - \mu y} + \frac{\gamma^2 z^2}{\gamma - \mu z} = 0, \\ \text{wobei} \quad \mu^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2.$$

Man hat damit eine quadratische Bestimmungsgleichung für die Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 in einem Flächenpunkt $P(x, y, z)$, die, ausgeführt, folgendes Aussehen hat:

$$(19) \quad \alpha \beta \gamma - M \mu \cdot x + \mu^4 \cdot x^2 = 0 \\ \text{mit } M = \alpha^2(\beta + \gamma)x^2 + \beta^2(\gamma + \alpha)y^2 + \gamma^2(\alpha + \beta)z^2$$

Diese Gleichung ist in den Koordinaten von 8. Grade — man hätte noch das Mittelglied zu isolieren und dann zu quadrieren — stellt also für $x = \text{const}$ eine Fläche 8. Ordnung dar, die das gegebene Ellipsoid Φ nach Kurven 16. Ordnung schneidet, die die Örter konstanter Hauptkrümmung darstellen. Zur punktwweisen Ermittlung einer solchen, zu einem vorgelegten x gehörigen Kurve erteile man der als Parameter aufgefaßten Größe μ jeweils feste Werte: Man erhält dann acht Punkte im Schnitt der drei koaxialen Ellipsoide Φ ($\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$), Ψ ($\mu = \text{const}$, vgl. 18₂) und Ω ($M = \text{const}$, vgl. 19₂), was rechnerisch die Auflösung eines linearen Gleichungssystems für x^2, y^2 und z^2 erfordert. Das Ergebnis lautet:

$$(20) \quad x^2 = \frac{M - \alpha \mu^2 - \beta \gamma}{\alpha(\beta - \alpha)(\alpha - \gamma)} \\ y^2 = \frac{M - \beta \mu^2 - \gamma \alpha}{\beta(\gamma - \beta)(\beta - \alpha)} \\ z^2 = \frac{M - \gamma \mu^2 - \alpha \beta}{\gamma(\alpha - \gamma)(\gamma - \beta)}$$

wobei noch M vermöge (19₁) durch μ auszudrücken ist.
Hinsichtlich des Verlaufs der Kurven $\kappa = \text{const}$
vgl. Fig. 2

4. Kurven konstanter mittlerer Krümmung.

Aus (19) ist einmal unmittelbar das Hauptkrümmungsprodukt $\kappa_1 \kappa_2 = \alpha \beta \gamma / \mu^4$ abzulesen, was die SALMONSche Krümmungsformel (8) bestätigt, zum anderen aber auch die Hauptkrümmungssumme $\kappa_1 + \kappa_2 = 2H$ zu entnehmen, womit sich für die mittlere Krümmung H die Formel

$$(21) \quad H = \frac{M}{2\mu^3}$$

ergibt. Werden für μ und M die aus (18) und (19) ersichtlichen Ausdrücke eingesetzt, so stellt $H^2 = \text{const}$ eine Fläche 6. Ordnung dar, die aus dem gegebenen Ellipsoid als Ort konstanter mittlerer Krümmung eine Kurve 12. Ordnung heraus-schneidet. Zur punktwisen Berechnung dieser Kurven, deren Verlauf aus Fig. 3 zu ersehen ist, kann wiederum das Formel-system (20) dienen, wobei jetzt $M = 2H\mu^3$ zu setzen ist.

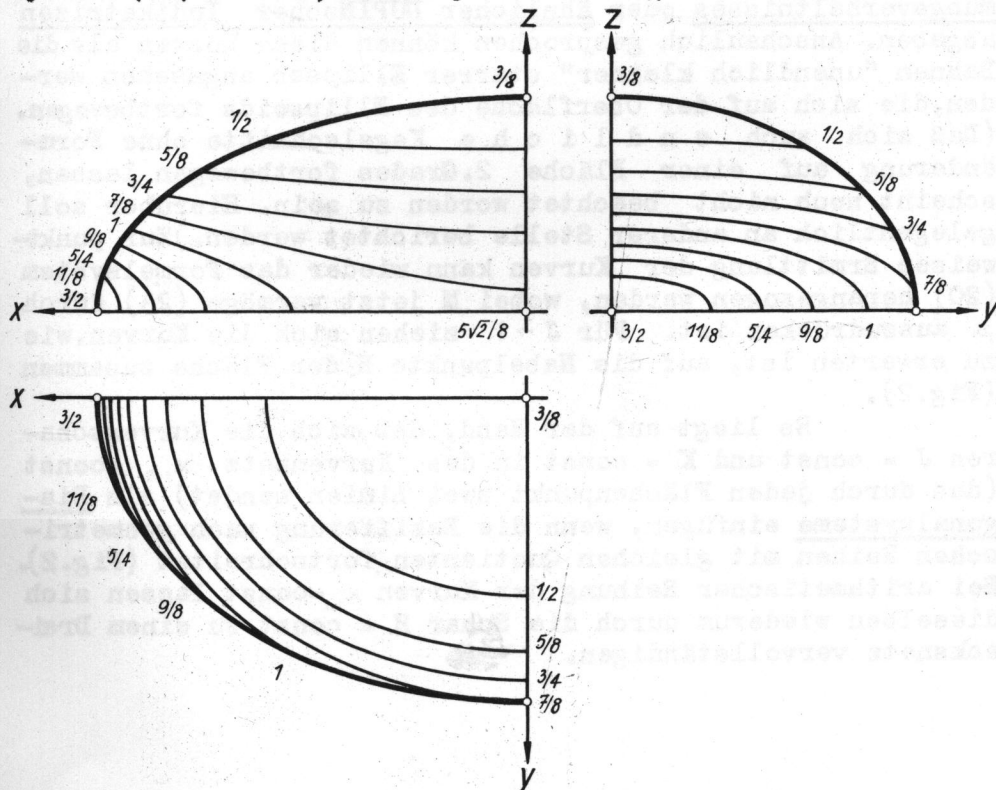


Fig. 3: Oktant des dreiachsigen Ellipsoids $\Phi(2, \sqrt{2}, 1)$ mit eingetragenen Kurven konstanter mittlerer Krümmung H .

5. Kurven konstanten Hauptkrümmungsverhältnisses.

Nach Auflösung der quadratischen Gleichung (19) erhält man für das Verhältnis der Hauptkrümmungen den Ausdruck

$$(22) \quad J = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{M - \sqrt{M^2 - 4\alpha\beta\gamma\mu^2}}{M + \sqrt{M^2 - 4\alpha\beta\gamma\mu^2}}$$

Werden die Wurzeln weggeschafft, so ergibt sich die Beziehung

$$(23) \quad JM^2 = (J+1)^2\alpha\beta\gamma\mu^2,$$

die mit den bekannten Bedeutungen von M und μ in den Koordinaten vom 4. Grade ist, also für $J = \text{const}$ eine Fläche 4. Ordnung darstellt. Diese Fläche schneidet das Ellipsoid nach Kurven 8. Ordnung, die die Örter konstanten Hauptkrümmungsverhältnisses oder ähnlicher DUPIN'scher Indikatriz abgeben. Anschaulich gesprochen können diese Kurven als die Bahnen "unendlich kleiner" starrer Ellipsen angesehen werden, die sich auf der Oberfläche des Ellipsoids fortbewegen. (Daß sich auch e n d l i c h e Kegelschnitte ohne Formänderung auf einer Fläche 2. Grades fortbewegen lassen, scheint noch nicht beachtet worden zu sein. Hierüber soll gelegentlich an anderer Stelle berichtet werden.) Zur punktweisen Ermittlung der Kurven kann wieder das Formelsystem (20) herangezogen werden, wobei M jetzt vermöge (23) durch μ auszudrücken ist. Für $J \rightarrow 1$ ziehen sich die Kurven, wie zu erwarten ist, auf die Nabelpunkte N der Fläche zusammen (Fig. 2).

Es liegt auf der Hand, daß sich die Kurvenscharen $J = \text{const}$ und $K = \text{const}$ in das Kurvennetz $\alpha_{1,2} = \text{const}$ (das durch jeden Flächenpunkt zwei Linien sendet) als Diagonalsysteme einfügen, wenn die Bezifferung nach geometrischen Reihen mit gleichen Quotienten fortschreitet (Fig. 2). Bei arithmetischer Reihung der Kurven $\alpha_{1,2} = \text{const}$ lassen sich dieselben wiederum durch die Schar $H = \text{const}$ zu einem Dreiecksnetz vervollständigen.

Literaturangabe.

- [1] G. SALMON-W.FIEDLER; Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes (Leipzig 1863), 285.—Eine andere geometrische Ableitung findet sich bei E.MÜLLER-J.KRAMES: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Wien 1931), 64f.
- [2] J. DE LA GOURNERIE, Journ.Math.Liouville 20 (1885), 145-156; Traité de géométrie descriptive III (Paris 1864), 101-112.
- [3] L.BIEBERBACH, Analytische Geometrie (Teubners Math. Leitfäden, Bd.29, Leipzig 1930), § 11f.