

Zur Geometrie der Drehflächen und ihrer geodätischen Linien.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 7 Abbildungen.

(Eingelangt am 7. April 1953.)

1. Einleitung.

Die ∞^2 geodätischen Linien einer *Drehfläche* Φ lassen sich auf Grund der Rotationssymmetrie nach ∞^1 Drehscharen ordnen, die jeweils ∞^1 kongruente Exemplare umfassen. Die ∞^2 Tangenten g der in einer solchen Drehschar enthaltenen Kurven k bilden eine gewisse *Rotationskongruenz* \mathfrak{F} , deren eine Brennfläche von der Grundfläche selbst dargestellt wird, während die zweite Brennfläche eine davon verschiedene Drehfläche Ψ ist, die als „*Leitfläche*“ der Kurvenschar k angesprochen wird, da sie von sämtlichen Tangenten und Schmiegebenen der Kurven k berührt wird. Die Schmiegebenen geodätischer Linien sind zur Grundfläche normal, die Tangentialebenen der beiden Brennflächen in den Berührungs punkten eines Kongruenzstahls g — seine „*Brennebenen*“ — schließen also einen rechten Winkel ein: \mathfrak{F} ist eine *Normalenkongruenz*. Die in einer Strahlkongruenz enthaltenen *Torsen* stützen sich mit ihrer Gratlinie auf eine Brennfläche und sind der anderen berührend umschrieben; im Falle einer Normalenkongruenz sind die Gratlinien — wegen der Orthogonalität der Brennebenen — *geodätische Linien* der sie tragenden Brennfläche. Im vorliegenden Falle sind die in \mathfrak{F} enthaltenen Torsen einerseits die Tangentenflächen der Ausgangsschar k auf Φ , anderseits die Tangentenflächen einer gewissen Schar von geodätischen Linien l auf Ψ . Die Beziehung zwischen den Drehflächen Φ und Ψ ist mithin eine durchaus wechselseitige.

Einer Drehfläche Φ werden auf diese Weise ∞^1 Leitflächen Ψ ihrer geodätischen Linien zugeordnet, und es wäre zu erwarten, daß weiterhin zu diesen ∞^1 Drehflächen Ψ insgesamt ∞^2 analoge Leitflächen ihrer eigenen Geodätischen — darunter natürlich auch die Ausgangsfläche Φ —

gehören. Das ist nun merkwürdigerweise nicht der Fall, sondern es ergeben sich nur ∞^1 sekundäre Leitflächen, wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird. *Jede beliebig vorgegebene Drehfläche läßt sich damit in ein bestimmtes einparametrisches System gleichberechtigter Drehflächen Φ einbetten, zu welchem ein Orthogonalsystem von ∞^1 Drehflächen Ψ gehört, so zwar, daß die Tangenten jeder geodätischen Linie einer Fläche 1. Art eine bestimmte Fläche 2. Art berühren, und umgekehrt.* Für die Drehflächen 2. Grades ist dieses Verhalten auf Grund der klassischen Untersuchungen von M. Chasles über die konfokale Schar längst bekannt¹, die allgemeine Gültigkeit für beliebige Drehflächen scheint jedoch noch nicht bemerkt worden zu sein.

Eine unmittelbare Folge des genannten Sachverhaltes ist ein eignetümliches *darstellend-geometrisches Phänomen*: Bei beliebiger Normalprojektion des Flächensystems (Φ, Ψ) auf eine Ebene bilden hier die Umrißlinien ein orthogonales Netz, das zum Meridianensystem ähnlich ist, bei irgendwelchen Verlagerungen des Flächensystems also nur seinen Maßstab, nicht aber seine gestaltliche Struktur ändert.

Als charakteristisch für das Flächensystem (Φ, Ψ) erweist sich die auf der gemeinsamen Achse vorhandene *Korrespondenz* zwischen den Fußpunkten der Meridianantangenten und -normalen. Die Bestimmung des zu einer willkürlich vorgelegten Korrespondenz gehörigen Flächensystems erfordert eine einfache Quadratur, während das zu einer gegebenen Einzellefläche Φ_1 gehörige Bett- und Leitsystem ohne Integration zu finden ist; es besteht aus lauter algebraischen Flächen, wenn Φ_1 algebraisch ist. Spezielles Interesse kommt der Annahme einer *projektiven Korrespondenz* zu, die ausführlich diskutiert wird; der Sonderfall einer involutorischen Projektivität führt dabei auf die konfokalen Scharen von Drehflächen 2. Grades, der Sonderfall einer Ähnlichkeit auf Drehflächen, die bereits jede für sich die merkwürdige Eigenschaft haben, einen Normalumriß unveränderlicher Gestalt zu besitzen.

Ein tieferer Einblick in die Bauart des Flächensystems (Φ, Ψ) läßt sich durch Einsatz der *zyklographischen Abbildung* erzielen. Man kann nämlich die einer Ebene angehörenden Meridiankurven als Bilder eines einfacher gebauten Systems ebener Kurven auffassen, das aus zwei *korrelativen Affinscharen* besteht. Auf diese Weise läßt sich beispielsweise die Auswirkung des Überganges von einer Grundfläche zu einer

¹ M. Chasles: Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second ordre. Journ. math. pur. appl. 11 (1846), 5–20.

Parallellfläche sehr übersichtlich verfolgen; als Anwendung hiervon wird das Bett- und Leitsystem des *Torus* gewonnen.

2. Geometrische Grundlagen.

Sei Φ_1 eine beliebige *Drehfläche* mit der Achse x , und bezeichne T einen allgemeinen Flächenpunkt. Der Achsenschnittpunkt U bzw. V der zugehörigen Tangentialebene τ bzw. Flächennormale n möge der „1. bzw. 2. Achsenpunkt“ des *Flächenelementes* (T, τ) heißen. Durch ein Achsenpunktpaar U, V sind umgekehrt ∞^2 Flächenelemente (T, τ) bestimmt, deren Punkte die durch den Durchmesser UV festgelegte Kugel T' erfüllen; diese wird im folgenden kurz „*Ordnerkugel*“ genannt.

Fassen wir nun eine durch T gehende *geodätische Linie* k von Φ_1 ins Auge: Die zu T gehörige Tangente g und die Schmiegebene σ berühren eine der einleitend erwähnten Leitflächen Ψ in einem Punkt S , dessen Normale wegen $\sigma \perp \tau$ in τ liegt und daher die Achse x im Punkt U trifft; σ selbst enthält anderseits mit der Normale n auch deren Achsenpunkt V . Unter Veränderung der Fortschreitrichtung g ist damit zu erkennen: Alle ∞^1 zu einem *Flächenelement* (T, τ) gehörigen *Leitelemente* (S, σ) besitzen als gemeinsame Achsenpunkte die vertauschten *Achsenpunkte* von (T, τ) . Die Punkte S erfüllen den in der Ebene τ liegenden Kreis der Ordnerkugel T' , also den Kreis mit dem Durchmesser UV .

Durch Drehung um die Flächenachse gehen aus (T, τ) die ∞^1 Flächenelemente längs eines Parallelkreises von Φ_1 hervor, dem die ∞^1 von den Leitelementen (S, σ) erzeugten Parallelkreisstreifen der Leitflächen Ψ zugeordnet sind. Unter Beschränkung auf die Betrachtung der Verhältnisse in einer *Meridianebene* gilt mithin nach dem vorhin Gesagten: Zu jedem *Meridianelement* (T, t) der gegebenen *Drehfläche* Φ_1 gehören ∞^1 *Meridianelemente* (S, s) der *Leitflächenschar* Ψ , deren gemeinsame Achsenpunkte die vertauschten Achsenpunkte von (T, t) sind (Abb. 1). Die Punkte S erfüllen, solange nur reelle Fortschreitrichtungen g in Betracht gezogen werden, jenen durch T und seinen Spiegelpunkt begrenzten Bogen des „*Ordnerkreises*“, über dem Durchmesser UV , der den Punkt U enthält, doch sollen in Hinkunft derartige Realitätsgrenzen nicht weiter beachtet werden.

Die ∞^1 *Meridianelemente* (T, t) der Ausgangsfläche Φ_1 führen nun über die zugehörigen Achsenpunktspaire U, V zu ∞^2 *Meridianelementen* (S, s) der Leitflächen Ψ , deren *Meridianensystem* sich dann durch *Integration* dieser Elemente ergibt. Diese Integration wird erst in Abschn. IV

tatsächlich ausgeführt werden, doch ist bereits jetzt zu erkennen, daß die Leitflächenschar lediglich von der auf der Achse x herrschenden *Punktkverwandtschaft* $\mathfrak{P} = U \rightarrow V$ abhängt, die in Hinkunft „*Begleitkorrespondenz*“ von Φ_1 heißen soll. Umgekehrt legt die Korrespondenz \mathfrak{P} die Fläche Φ_1 nicht eindeutig fest, sondern gehört gleichzeitig zu ∞^1 gleichberechtigten koaxialen Drehflächen Φ , die ein System von gleicher Beschaffenheit wie die Leitflächen Ψ bilden; letztere sind offensichtlich durch die inverse Begleitkorrespondenz \mathfrak{P}^{-1} gekennzeichnet.

Zwischen den beiden Flächensystemen herrscht nach allem eine gewisse Wechselseitbeziehung: *Jede einzelne der Flächen Φ führt auf dasselbe Leitflächensystem Ψ , und umgekehrt wird jeder einzelnem Fläche Ψ als Leitflächenschar das System der Flächen Φ zugeordnet.* Das bedeutet ausführlich: *Die Tangenten (und Schmiegungen) einer beliebigen auf einer der Flächen gezogenen geodätischen Linie berühren sämtlich eine bestimmte Fläche der anderen Schar*².

Jedem Punkt $T = S$ eines Ordnerkreises sind zwei Meridianelemente (T, t) und (S, s) zugeordnet, die einen rechten Winkel bilden: *Die Flächenscharen Φ und Ψ durchsetzen einander within orthogonal*. Die zur Leitfläche Ψ gehörigen geodätischen Linien der Fläche Φ gehen an jene Schnittkreise, in welchen die beiden Flächen einander senkrecht durchsetzen, berührend heran und weisen dasselbst aus Symmetriegründen *Henkelpunkte* (Punkte mit vierpunktig berührender Schmiegebene oder unendlichem Schmiekrugradius) auf.

Betrachten wir nun eine *Normalprojektion* des Flächensystems (Φ, Ψ) auf eine beliebige Bildebene π , wobei nur der triviale Fall $\pi \perp x$ ausgeschlossen sein soll; die Bildelemente mögen durch einen Akzent markiert werden. Jeder *Umrißpunkt* T einer Fläche Φ besitzt eine projizierende Tangentialebene τ , also eine zu π parallele Flächennormale n . Der rechte Winkel $rn = UTV$ erscheint auch in der Projektion ³ umgekehrt nicht jede Flächenkurve, deren Tangenten eine Leitfläche berühren, unbedingt eine Geodätische zu sein. Dies ist wohl beim klassischen System der konfokalen Quadriken stets der Fall, gilt jedoch nicht mehr, wenn eine Gerade von mehr als einer Leitfläche berührt wird.

Es ist zu beachten, daß die beiden Flächen auch Parallelkreise gemein haben können, in welchen sie einander schräg durchsetzen, falls nämlich die Begleitkorrespondenz \mathfrak{P} so geartet ist, daß sie durch einen Raumpunkt mehrere Ordnerkugeln sendet, was im allgemeinen der Fall sein wird.

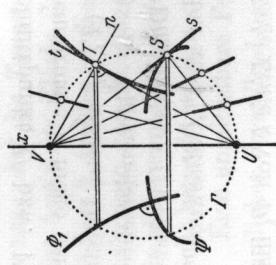


Abb. 1.

3. Zyklographische Deutung des Meridianystems.

Ein tieferer Einblick in die bestehenden Zusammenhänge eröffnet sich durch Heranziehung der *Zyklographie*. Das auf *E. Laguerre* und *W. Fiedler* zurückgehende zyklographische Abbildungsprinzip, das insbesondere von *E. Müller* weitgehend ausgebaut wurde⁴, bildet die *Punkte* des dreidimensionalen Raumes auf die *orientierten Kreise (Zykel)* einer Bildecke in der Weise ab, daß es jedem Raumpunkt Σ den Spurkreis Σ^z jenes von Σ ausstrahlenden Drehregels mit rechtem Öffnungswinkel zuordnet, dessen Achse zur Bildecke senkrecht ist; der Bildkreis ist ferner noch mit dem positiven oder negativen Umlaufsinn zu versehen, je nachdem Σ auf der einen oder anderen Seite der Bildecke liegt. Beschreibt Σ irgend eine (glatte) Raumkurve \mathfrak{f} , so

als rechter Winkel $\tau' n' = U' T' V'$, und die („scheinbare“) *Umrißlinie* von Φ ist ähnlich wie die Meridiankurve durch die Eigenschaft auszeichnet, daß ihre Tangenten und Normalen jeweils durch zwei in bestimmter Weise gekoppelte Achsenpunkte U' und V' laufen. Die Punktkverwandtschaft $\mathfrak{P}' = U' \rightarrow V'$ auf dem Achsenbild x' geht durch Projektion aus der Begleitkorrespondenz $\mathfrak{P} = U \rightarrow V$ hervor, ist mithin zu dieser ähnelich, und dasselbe gilt von der Schar der zugehörigen Integralkurven: *Die Schar der Umrißlinien des Flächensystems Φ ist zur Schar der Meridiankurven ähnlich*. Gleichtes gilt für das Leitsystem Ψ , und der gemeinsame Verkleinerungsfaktor hat den Wert $\cos(\pi/2)$. Es liegt hier ein merkwürdiges *optisches Phänomen* vor, indem das Erscheinungsbild des (durchsichtig zu denkenden) Flächensystems (Φ, Ψ) — immer Normalprojektion vorausgesetzt — stets ein orthogonales Kurvennetz ganz bestimmter Struktur darstellt, das bei Veränderung der Achsenlage lediglich eine Maßstabsänderung erfährt.

Das *Hilfsbild* der zur Korrespondenz \mathfrak{P} gehörigen ∞^1 Ordnerkugeln Γ ist eine gewisse *Drehfläche* Δ , die, falls sie reell ist, als Grenze des Realitätsgebiets für das durch \mathfrak{P} bestimmte Flächensystem (Φ, Ψ) fungiert. Sämtliche Systemflächen setzen auf Δ mit Parallelkreisen auf, die *Rückkehrkanten* abgeben. Entsprechend besitzt das System der ∞^1 Ordnerkreise der Projektionskorrespondenz \mathfrak{P}' eine Hüllekurve, die zum Meridian von Δ ähnlich ist und die Umrißspitzen der Systemflächen trägt.

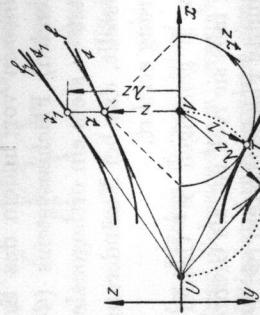
⁴ *E. Müller - J. Kramers*: Die Zyklographie (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, II. Bd. — Wien 1929).

durchläuft sein Bildzykel \mathfrak{Z}^z eine einparametrische Schar, deren (orientiertes) Hüllkurvenpaar f^z als zyklographisches Bild der Kurve f gilt. Jdem *Linienelement* (Σ, t) von f erscheint dabei jenes Paar orientierter Linienelemente (T, t) von f^z zugewiesen, in welchem f^z von Σ^z berührt wird. Da die beiden Tangentenspuren t als zyklographische Bilder der Kurventangente t aufgefaßt werden können, so haben sie den Spurpunkt von t gemein. Diese Kenntnisse reichen für das folgende aus.

Wir wollen nun umgekehrt das in einer festen Achsebene $\alpha = xy$ gelegene, bezüglich der Achse x spiegelbildliche und geeignet orientierte Meridiankurvenpaar f einer Drehfläche Φ als zyklographisches Bild einer *Urkurve* \mathfrak{f} auffassen, die aus Symmetriegründen in der zu α normalen Achsenebene β liegt.

Jedem zu x spiegelbildlichen Elementenpaar (T, t) von f entspricht nach dem vorhin Gesagten ein Linienelement (Σ, \mathfrak{t}) von f , dessen Punkt auf dem im Normalenfußpunkt V von (T, t) errichteten Lot liegt, und dessen Gerade durch den Fußpunkt U von t geht; die Kote $z = V\Sigma$ von Σ ist dabei gleich der Normalenstrecke VT von f (Abb. 2).

Abb. 2.



Denkt man sich auf die Kurve f eine *affine Streckung* \mathfrak{Y} ausgeübt, die alle Koten z mit demselben Faktor λ multipliziert, so bleiben die Tangentenfußpunkte U und die Ordinatenfußpunkte V unverändert und stellen nach wie vor die Tangenten- und Normalenfußpunkte der neuen Bildelemente (T_1, t_1) dar. Die zyklographische Bildkurve f_1 der zu f affinen Kurve \mathfrak{f}_1 besitzt mithin dieselbe Begleitkorrespondenz wie f , ist also Meridian einer der Bettsschar von Φ angehörenden Drehfläche Φ_1 . Umgekehrt ausgedrückt: *Die zyklographischen Urbilder des Meridianystems einer Bettsschar Φ oder der zugehörigen Leitsschar Ψ erfüllen je eine Affinschar von ebenen Kurven, die durch gleichförmige Streckung bzw. Stanzung der Achsenabstände auseinander hervorgehen*⁵.

⁵ Legt man sich bei der zyklographischen Abbildung nicht unbedingt auf einen rechten Öffnungswinkel der Projektionskegel fest, sondern läßt man auch andere Öffnungswinkel ω zu, so könnte jedes der beiden Meridianysteme als Bildkurvenschar einer einzigen Urkurve f aufgefaßt werden, die der Reihe nach mit verschiedenen Öffnungen ω auf dieselbe Ebene abgebildet wird.

Mit der gegebenen Deutung ist nun nicht nur eine einfache *Konstruktionsvorschrift für die Bettsschar* gefunden, die im wesentlichen auf eine proportionale Änderung der Normalenstrecken hinausläuft ($VT_1 = \lambda \cdot VT$, Abb. 2), sondern gleichzeitig auch eine klare Übersicht über die *Struktur* der Schar gewonnen.

Allfällige vorhandene zur Bildebene *normale Tangenten* t sind allen Kurven der beiden Affinscharen gemeinsam, und da sie auf isotrope Tangenten t führen, sind ihre Spurpunkte $U = V$ — also die Doppelpunkte der Begleitkorrespondenz $\mathfrak{P} — gemeinsame Brennpunkte$ der Meridian scharen. In diesem Sinne kann mithin das Flächensystem (Φ, Ψ) als „konfokal“ bezeichnet werden. — Allfällige zur Bildebene *parallele Tangenten* t (U bzw. V im Unendlichen) geben zu *gemeinsamen Kehl- oder Gürtelkreisbogen* Anlaß, die allerdings jeweils nur für eine der beiden Flächenscharen gelten; dafür ist der Achsenpunkt (V bzw. U) einer solchen Ebene gemeinsame Spitze von Asymptotenkegeln der anderen Schar (vgl. Abb. 6).

4. Analytische Auswertung.

Zur rechnerischen Behandlung sei ein Normalkoordinatensystem x, y, z vorausgesetzt, dessen Absissenachse mit der Rotationsachse des Flächensystems identisch ist. Bezeichnen u und v die Absissen der Achsenpunkte U und V , so wird durch eine Relation

$$F(u, v) = 0$$

eine bestimmte *Korrespondenz* $\mathfrak{P} = U \rightarrow V$ beschrieben. Als erstes soll das zugehörige Flächensystem Φ bestimmt werden, und zwar auf dem Wege über das dem der xy -Ebene angehörenden Meridian system f zu geordnete zyklographische Urbildsystem \mathfrak{f} in der xz -Ebene (Abb. 2).

Die Forderung, daß die Tangente t eines Kurvenpunktes Σ ($x = v, z$) den Punkt $U(u, 0)$ enthalte, führt auf die Bedingung

$$\frac{dz}{dv} = \frac{z}{v - u}.$$

Integration nach Trennung der Variablen liefert dann als Darstellung der *Affinschar* \mathfrak{f} :

$$z = c \cdot \zeta(v) \text{ mit } \zeta = \exp \int \frac{dv}{v - u},$$

wobei u gemäß (1) durch die Absisse v ausgedrückt zu denken ist. —

Um nun mehr sind die Koordinaten des zu Σ gehörigen Meridianpunktes $T(x, y)$ aus den im rechtwinkligen Dreieck TUV (Abb. 2) geltenden Beziehungen

$$(m-n)(m-n) = n^2 \quad (m-n)(m-n) = n^2$$

$$-f \equiv (y-x)(x-y) = z, \quad -g \equiv (u-v)(v-u) = w.$$

lementar zu bestimmen. Man findet so als Parameterdarstellung für die Meridiane der Flächenschar Φ :

$$x = v - \frac{c^2 \zeta^2}{v-u}, \quad y = c \zeta \sqrt{1 - \left(\frac{c \zeta}{v-u} \right)^2} \quad (3)$$

Für die zugehörige Leitflächenschar Ψ , die ja durch die inverse Korrespondenz \mathfrak{P}^{-1} gekennzeichnet wird, also nur den Tausch von u und v verlangt, lauten die Gleichungen der entsprechenden Affinschar \mathfrak{P}^* — jetzt mit u als Abszisse —

$$z^* = c^* \frac{v-u}{\zeta}, \quad (2*)$$

bzw. des Meridiansystems

$$x^* = u + c^{*2} \frac{v-u}{\xi^2}, \quad y^* = c^* \frac{v-u}{\xi} \sqrt{1 - \frac{c^{*2}}{\xi^2}} \quad (3*)$$

ζ hat auch hier die in (2) festgelegte Bedeutung. — Zu beachten ist, daß für reelle Flächen unter Umständen auch rein-imaginäre Werte der $T_{\mu\nu}^{ext}$ -Konstanten a und c^* in Betracht zu ziehen sind.

Integrationskonstanten c und σ im Bereich zu zweit.

Spezielle Beispiele zur Anwendung dieser Formeln enthält Abschnitt V.

Ist nicht die Korrespondenz \mathfrak{P} vorgegeben, sondern eine Einzelfläche Φ_1 — etwa durch die Meridiangleichung $Y = Y(X)$ —, so werden zunächst die Achsenpunkte U und V von Meridian tangente und -normale durch ihre Koordinaten

$$u = X - \frac{Y}{V}, \quad v = X + Y V$$

festgelegt, wobei $Y' = dY/dX$. Ein partikulärer Wert von c_5 ist ferner durch die Normalenstrecke

$$c_1 \zeta = Y \sqrt{1+Y'^2}$$

gegeben, so daß sich mittels (3) das Φ_1 aufnehmende Beitsystem Φ ohne Interaktion unmittelbar hinschreiben läßt:

$$x = X + (1 - \lambda^2)YY', \quad y = \lambda Y\sqrt{1 + (1 - \lambda^2)Y^2} \quad (4)$$

Hierbei wurde lediglich $c/c_1 = \lambda$ gesetzt; λ ist mit dem in Abb. 2 eingebrachten Streckungsfaktor identisch, so daß für $\lambda = 1$ die Ausgangsfläche Φ_1 und für $\lambda = 0$ die auf die Achse zusammengeschrumpfte Fläche erhalten wird. — Aus (3*) fließt analog die Darstellung des Leitsystems Ψ

$$(5) \quad x^* = X - \frac{Y}{\nabla r} + \frac{C^2}{\nabla Vr}, \quad y^* = \frac{C}{\nabla r} \sqrt{1 + Y'^2} - \frac{C^2}{\nabla r}$$

Hierbei wurde $c^*q_1 = C$ gesetzt. Die einfache geometrische Bedeutung dieser Konstante tritt zu Tage, wenn man aus den rechtwinkeligen Dreiecken USV und UTV das Streckenverhältnis

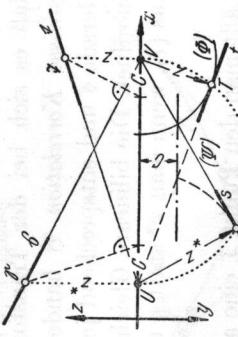
$$us: UT = \sqrt{(x^*-u)(v-u)}: \sqrt{(X-u)(v-u)} = c: Y$$

Mit der Aussage

(6) Bekannte Satz von A. Clairaut gefunden, demnachfolge längs einer

Drei nachgewiesene und somit ausgewiesene Formeln aus der unvollständigen Geometrie

Parallelkreisradius umgekehrt proportional ist⁶. C gibt demnach den Radius jener Parallelkreise an, die von den Geodätischen der betrachteten Schar berührt werden ($\vartheta = \pi/2$), und in welchen Φ_1 und Ψ_C einander rechtwinklig schneiden.



Ahh 3

Clairaut-Konstante C das zu einem Meridianelement (T, t) der Grundfläche gehörige Meridianelement (S, s) der Leitfläche zu ermitteln, wähle man vorübergelend für \varPhi die das Element (T, t) berührende Kugel (Mitte V); da die Geo-

⁶ A. Clairau: Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne. Mém. ac. sci. Paris 1733, 406—416.

datischen einer Kugel Großkreise sind, treten als Leitflächen ψ konzentrische *Drehkegel* mit der Achse x auf, und unter diesen ist lediglich jener auszuwählen, der mit der Kugel ein Parallelkreispaar vom Radius C gemein hat. Bei der zeichnerischen Durchführung ist also lediglich der durch T gehende Kreis um V mit einem im Abstand C von der Achse gezogenen Parallelen zu schneiden; die Verbindungsgerade eines solchen Schnittpunktes mit V gibt bereits die Leitflächentangente s an, deren Berührungs punkt S dann im Fußpunkt des aus U fallbaren Lotes gefunden wird.⁷ — Ein direkter Beweis dieser Konstruktion ließe sich über die aus (2) und (2*) fließende Beziehung

$$(7) \quad z z^* = C(v-u)$$

zwischen den beiden Normalenstrecken $VT = z$ und $US = z^*$ führen. Hieraus folgt dann übrigens, daß die beiden Subnormalen $z^*/(v-u)$ und $z^{*2}/(u-v)$ das *konstante Produkt* $-C^2$ haben.

Die zu einer bestimmten Clairaut-Konstante C gehörige *Berührungs transformation* $(T, t) \rightarrow (S, s)$ in der Meridianebene α (Abbl. 3, untere Hälfte) induziert über die zyklographische Deutung eine neue Be rührungstransformation $(\mathfrak{T}, t) \rightarrow (\mathfrak{S}, \mathfrak{s})$ in der zu α normalen Meridian ebene β (Abbl. 3, obere Hälfte). Um über die zweite Transformation Aufschluß zu erhalten, lasse man ein Element (\mathfrak{T}, t) eine Drehung um den festgehaltenen Punkt \mathfrak{T} ausführen: Das Bildelement (T, t) gleitet dabei am Bildzykel von \mathfrak{T} entlang, das zugehörige Leitelement (S, s) verschiebt sich längs der Gerade s und dementsprechend verschiebt sich das Element $(\mathfrak{S}, \mathfrak{s})$ längs der Gerade \mathfrak{s} . Hieraus geht aber hervor, daß es sich bei der Transformation $(\mathfrak{T}, t) \rightarrow (\mathfrak{S}, \mathfrak{s})$ einfach um eine gewisse *Korrelation* \mathfrak{S} handelt, die jedem Punkt \mathfrak{T} eine bestimmte Gerade \mathfrak{s} und entsprechend jeder Gerade t einen bestimmten Punkt \mathfrak{S} zuordnet. Die bilineare Gleichung dieser Korrelation fließt unmittelbar aus (7), wenn man x^* statt u und x statt v schreibt, und lautet

$$(8) \quad z z^* = C(x-x^*)$$

Läßt man den Punkt \mathfrak{T} eine achsennormale Gerade $x = v$ durchlaufen, so dreht sich die korrespondierende Gerade \mathfrak{s} um den Achsenpunkt $V(x^* = v)$ — natürlich in projektiver Weise — und das aus \mathfrak{T} auf \mathfrak{s} gefällte Lot beschreibt ein Strahlbüschel, dessen Scheitel auf der Achse und im Abstand C vor V liegt. Damit läßt sich die Korrelation \mathfrak{S} auch konstruktiv einfach beherrschen.

⁷ Im Hinblick auf die Gleichberechtigung der beiden Flächenscharen könnte natürlich auch Φ als Drehkegel gewählt und durch eine Leitkurve ψ ergänzt werden (gestrichelte Konstruktionslinien in Abb. 3).

Aus den Formeln (4) und (5) — wie auch aus den entwickelten Konstruktionen — geht hervor, daß das zu einer *algebraischen* Dreh fläche Φ_1 gehörige Bett- und Leitsystem (Φ, Ψ) durchwegs aus algebraischen Flächen besteht. Beispiele solcher algebraischen Systeme werden in den nächsten Abschnitten auftreten.

5. Projektive Begleitkorrespondenzen.

Als einfachste Annahme verdient der Fall einer *Projektivität als Begleitkorrespondenz* \mathfrak{B} vom vorherem ein gewisses Interesse. Die Korrespondenzgleichung (1) ist jetzt bilinear; je nach der Rolle des Fernpunktes — ob dieser zweifacher, einfacher oder kein Doppelpunkt ist — müssen drei Unterfälle unterschieden werden.

1. Schiebung:

Bezeichnet a die Schiebstrecke, so lautet die Korrespondenzgleichung (9)

$$v = u + a.$$

Die Hilfsgröße ζ aus (2) hat dann den Wert

$$\zeta = e^{va}.$$

Für die Affinschar der zyklographischen Urbilder \mathfrak{f} ergibt sich damit gemäß (2) das System kongruenter *Exponentialalkurven*

$$z = c \cdot e^{va}. \quad (10)$$

Wird ferner durch die Substitution $z/a = \cos \theta$ der Neigungswinkel θ der Normale gegen die Achse als neuer Parameter eingeführt, so gelangt man über (3) zur folgenden Darstellung des Meridiansystems der Flächen schar Φ :

$$x = a(\sin^2 \theta + \ln \cos \theta) + \text{const} \quad (11)$$

Die Flächen Φ sind naturgemäß untereinander *kongruent* und gehen durch Schiebung längs der x -Achse auseinander hervor. Spiegelung an einer achsennormalen Ebene verwandelt sie in die gleichartigen Leitflächen Ψ . Das Aussehen dieser transzen denten Flächen, die auf dem *Hüllzylinder A* der (kongruenten) Ordnerkügeln unter $\pm 45^\circ$ mit je einem Rückkehrkreis aufsetzen, ist aus der unteren Hälfte von Abb. 4 zu entnehmen.

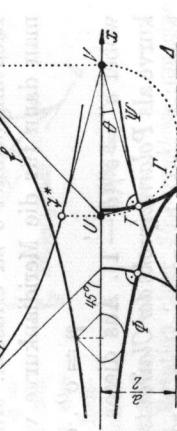


Abb. 4.

2. Ähnlichkeit:

Bezeichnet α den Ähnlichkeitsfaktor und wird der Ursprung im eigentlichen Doppelpunkt angenommen, so lautet die Korrespondenzgleichung

$$(13) \quad v = \alpha u \quad (\alpha \neq 1).$$

Mit v als unabhängiger Veränderlicher erhält man zunächst aus (2)

$$(14) \quad \xi = v^\beta \text{ mit } \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Die Affinschar der zyklographischen Urbilder f

$$(15) \quad z = c \cdot v^\beta$$

besteht mithin aus allgemeinen Parabeln ($\beta > 0$) oder Hyperbeln ($\beta < 0$) vom Exponenten β . Für das Meridiansystem der Flächen Φ ergibt sich damit zunächst über (3) die Darstellung

$$x = v - \beta c^2 v^\beta \beta^{-1}, \quad y = c v^\beta \sqrt{1 - \beta^2 c^2 v^2 \beta^{-2}}.$$

Um der geometrisch evidenten Tatsache Rechnung zu tragen, daß die Flächen Φ untereinander *zentrisch ähnlich* sind, ersetze man etwa die Konstante βc durch $(\beta c')^{1-\beta}$ und führe anschließend den neuen Parameter $t = v/\beta c'$ ein; damit erhält man dann die übersichtlichere Darstellung

$$(16) \quad \begin{aligned} x &= c'(\beta t - t') \\ y &= c' \sqrt{\beta' (t-t')} \end{aligned} \quad \text{mit } \gamma = 2\beta - 1 = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

Der verwendete Parameter t hängt übrigens mit dem Normalenwinkel $\theta = \arccos z/(v-u)$ durch die einfache Beziehung

$$t = \cos^{\alpha-1} \theta$$

zusammen. Unter diesen Umständen liegt es nahe, auf *polare Speerkoordinaten* überzugehen, d. h. die (orientierten) Meridianantangenten durch ihren (vorzeichenbegabten) Ursprungsabstand p und dessen Richtungswinkel θ zu erfassen. Mit Rücksicht auf $p = u \cos \theta$ erhält man dann für die Meridiankurve von Φ die einfache Liniengleichung

$$(17) \quad p = c'' \cdot \cos^\alpha \theta,$$

wobei $c'' = c' / (\alpha - 1)$. Aus dieser Darstellung ist jetzt die Meridiankurve als *Polarreziproke der Clairautschen Multiplikatrix* $r \cos^\alpha \theta = \text{const}$ bezüglich eines konzentrischen Kreises zu erkennen; auch ihre Fußpunktcurve $r = c'' \cos^\alpha \theta$ ist eine Multiplikatrix⁸.

⁸ G. Loria - F. Schütt: Spezielle algebraische und transzendente Kurven (Leipzig - Berlin 1910); I, 384 ff.
Die vorliegenden Drehflächen und ihre Ähnlichkeitsscharen sind auch hin-

Die analogen Entwicklungen für die Ähnlichkeitsschar der Leitflächen Ψ können hier übergangen werden, da — entsprechend der inversen Ähnlichkeit \mathfrak{P}^{-1} — in den Formeln lediglich α durch den Kehrwert $1/\alpha$ zu ersetzen ist, was den Übergang von β zu $1 - \beta$ und Vorzeichenwechsel bei γ bedingt.

Die Hüllefläche Δ der Ordnerkugeln ist ein vom Ursprung ausstrahlender *Drehzylinder*, der natürlich nur für $\alpha > 0$ reell ausfällt und dann den halben Öffnungswinkel $\delta = \arcsin(1/\gamma)$ hat. Die Flächen Φ setzen mit ihren Rückkehrkreisen auf Δ unter $45^\circ - \delta/2$ auf, die Orthogonalflächen Ψ unter $135^\circ - \delta/2$.

Jede der hier und unter 1. erhaltenen Drehflächen erfreut sich der hübschen Eigenschaft, bei beliebiger Verlagerung bloß eine *ähnliche Veränderung des scheinbaren Unrisses* zu erfahren — Normalprojektion vorausgesetzt —, da die Begleitkorrespondenz \mathfrak{P} im Bild wieder als Ähnlichkeit gleichen Verhältnisses erscheint. Offensichtlich gibt es sonst keine Drehflächen solchen Verhaltens.

Aus der Bauart der Gleichungen (16) geht hervor, daß sich für rationales Ähnlichkeitsverhältnis α stets *algebraische Flächen* einstellen. Um deren Ordnung zu bestimmen, schreibe man den Exponenten γ als gekürzten Bruch

$$\gamma = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{mit } (\mu, \nu) = 1 \text{ und } \nu > 0 \quad (18)$$

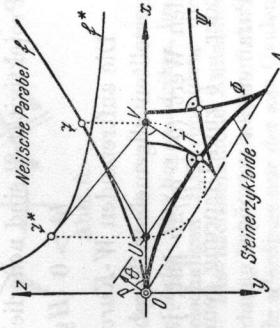
und führe $s = t^{1/\nu}$ als neuen Parameter ein. Nach Wegschaffen der Quadratwurzel in der Geradengleichung $y = ax + b$ findet man mit dem Gleichungsgrad in s auch die *Ordnung* der Fläche

$$N = \begin{cases} 2 \max(\mu, \nu), & \text{wenn } \mu > 0 \\ 2(|\mu| + \nu), & \text{wenn } \mu < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Das einfachste Beispiel gehört zu $\mu = -1$ ($\gamma = 0, N = 2$): Es handelt sich um das System *konfokaler Drehparaboloiden*, das wegen $1/a = a$ gleichzeitig auch die Leitflächen umfaßt. Erwähnenswert ist ferner die Annahme $a = 3$ ($\gamma = 2$), weil sie auf Flächen 4. Ordnung führt, die durch Rotation einer *Steinerzykloide* um eine

sichtlich ihrer *pseudogeodätischen Linien* — Flächenkurven, deren Schmiegebenen eine konstante, jedoch schräge Neigung gegen die Oberfläche aufweisen — von besonderem Interesse. Vgl. diesbezüglich W. Wunderlich: Raumkurven, die pseudogeodätische Linien eines Zylinders und eines Kegels sind. Comp. Math. 8 (1950), 169 – 184.

Abb. 5.



der Spitzentangenten entstehen; die zugehörigen Leitflächen gehören zu $a^* = 1/3$ ($\gamma^* = -2$) und sind von 6. Ordnung (Abb. 5). Anzuführen wäre endlich noch der Fall $a = 2$ ($\gamma = 3$), bei welchem als zyklographische Urbilder sowohl der Grund- als auch der Leitflächenmeridiane *Kegelschnitte* auftreten, und zwar Parabeln ($\beta = 2$) bzw. gleichseitige Hyperbeln ($\beta^* = -1$); die Meridiankurven selbst sind dannach gewisse *Hyperzyklen*, und zwar handelt es sich speziell bei den Flächen Φ um das sogenannte „Maltakreuz“, jene Parallelkurve der regulären Astroide, die eine Selbstberühring aufweist.

3. Allgemeine Projektivität:

Wird die allgemeine Projektivität \mathfrak{P} durch die Fluchtpunkte $x = \pm a$ und die Doppelpunkte $x = \pm b$ festgelegt, so schreibt sie sich

$$uv + a(u-v) - b^2 = 0 \quad (a^2 \neq b^2). \quad (20)$$

Hierzu gehört dann gemäß (2) — mit v als unabhängiger Veränderlicher

$$\zeta = \exp \int \frac{v+a}{v^2-b^2} dv = \begin{cases} \frac{(v-b)^{2b}}{v} \cdot (v+b)^{\frac{b-a}{2b}} & \text{für } b^2 > 0 \\ v \cdot e^{-a/v} & \text{für } b = 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$\zeta = \exp \int \frac{v+a}{v^2-b^2} dv = \begin{cases} \frac{a-b}{\sqrt{v^2+b'^2}} \cdot \exp \left(\frac{a}{b'} \operatorname{arctg} \frac{v}{b'} \right) & \text{für } b^2 = -b'^2 < 0 \\ v & \text{für } b^2 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Bei den damit darstellbaren zyklographischen Urbildlinien $z = c\xi$ handelt es sich auf Grund ihrer projektiven Tangenteneigenschaft durchwegs um *W-Kurven*, also Bahnen gewisser eingeschränkter Kollinearitätsgruppen, deren Fixpunkte von den Doppelpunkten der Projektivität \mathfrak{P} und dem Fotpunkt der z -Achse dargestellt werden. Je nach der Art der Projektivität \mathfrak{P} sind neuerlich drei Unterfälle zu unterscheiden.

$b^2 > 0$ (Hyperbolische Projektivität)

Die auftretenden *W-Kurven* sind reell-kollinear zu den unter 2. festgestellten allgemeinen Parabeln oder Hyperbeln, wobei der Exponent den Wert $(b \pm a)/2b$ hat, je nachdem ob der Doppelpunkt $x = +b$ oder $-b$ zum Ursprung gemacht wird⁹. Nach Einführung eines neuen Parameters t vermöge

$$\frac{v-b}{v+b} = t^b \quad \text{oder} \quad v = b \frac{1+t^b}{1-t^b}$$

erhält man über (21₁) aus (3) die Merdiangleichungen der Flächen Φ in folgender Gestalt:

⁹ Ganz allgemein bewirkt jede *projektive Transformation* einer beliebigen Begleitkorrespondenz \mathfrak{P} stets eine *kollinare Umformung* der zugehörigen Affinschar \mathfrak{f} .

$$x = \frac{1}{1-t^b} \{ (1+t^b) - c^2 t^a [(a+b) + (b-a) t^b] \} \quad (22)$$

$$y = \frac{c}{1-t^b} \sqrt{t^a \{ 4t^2 b - c^2 t^a [(a+b) + (b-a) t^b]^2 \}}$$

Für die zugehörigen Leitflächen Ψ wäre lediglich das Vorzeichen von a zu vertauschen; im übrigen gehen die beiden Flächensysteme aber auch durch Spiegelung an der Ebene $x = 0$ ineinander über. — Die Hülle Δ der Ordnerkugeln ist ein *Torus* mit dem Meridianhalbmesser a und den Knotenpunkten $x = \pm b$, der nur für $a^2 > b^2$ reell ausfällt. Demgemäß haben die hier auftretenden Drehflächen ganz verschiedenartiges Gepräge, je nachdem $a^2 > b^2$ (reelle bzw. imaginäre Rückkehrkreise); für $a^2 = b^2$ liegt eine ausgeartete Projektivität vor, die auf ein zerfallendes System Φ führt, bestehend aus je einer Schaar koachsialer Drehkegel und konzentrischer Kugeln. — Aus den Gleichungen (22) ist zu erssehen, daß für rationales a/b wiederum *algebraische Flächen* auftreten; nach Wahl einer passenden Längeneinheit dürfen in einem solchen Fall ohne Beschränkung der Allgemeinität a und b als positiv ganz und teilerfremd vorausgesetzt werden; die Flächenordnung beträgt dann im allgemeinen

$$N = 2(a+b), \quad (23)$$

kann sich jedoch für spezielle Werte der Konstante c erniedrigen.

Der Sonderfall $a = 0$ ($b = 1$), der \mathfrak{P} als *hyperbolische Involution* kennzeichnet, führt auf das klassische System *konjukaler Rotationsquadranten*, bestehend aus eiförmigen Ellipsoiden und zweischaligen Hyperboloiden, die gleichzeitig auch die Leitflächen abgeben¹⁰. — Die nächstmögliche Annahme $a = 1, b = 2$, die Grund- und Leitflächen 6. Ordnung liefert, ist in Abb. 6 dargestellt; um Überdeckungen zu vermeiden, wurde allerdings nur der aus Ovalen bestehende Teil der Φ -Schar wiedergegeben; der fehlende Teil liegt zu der eingetragenen Ψ -Schar spiegelbildlich bezüglich der Ebene $x = 0$.

$$b^2 = 0 \quad (\text{Parabolische Projektivität})$$

Hier lautet die aus (3) und (21₂) fließende Darstellung der Meridiane der Flächenschar Φ

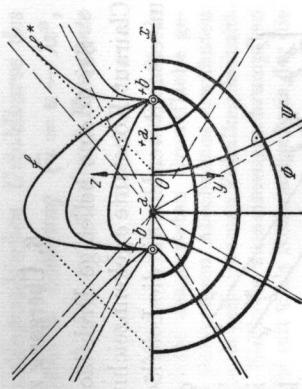


Abb. 6.

¹⁰ Für eine *involutorische Begleitkorrespondenz* ($\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{-1}$) fallen Bett- und Leitschar immer zusammen.

(24)

$$\begin{aligned} x &= v - c^2(v+a)e^{-2av} \\ y &= c e^{-a/v} \sqrt{v^2 - c^2(v+a)^2 e^{-2av}}. \end{aligned}$$

Die zyklographischen Urbilder dieser transzentenden Linien sind kollinear verformte *Exponentialkurven*.

Nach Einführung des neuen Parameters $\tau = \arctg(v/b')$ erhält man aus (3) und (21₃) die Meridiangeleichungen der Flächen Φ in der Form

$$\begin{aligned} x &= b' \tg \tau - c^2 e^{2p\tau} (a + b' \tg \tau) \text{ mit } p = a/b' \\ y &= c e^{p\tau} \sqrt{b'^2 \sec^2 \tau - c^2 e^{2p\tau} (a + b' \tg \tau)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Die zyklographischen Urbilder dieser Kurven sind im allgemeinen kollinear transformierte *logarithmische Spiralen*.

Eine Ausnahmestellung kommt der Annahme $a = 0$ zu, die die Korrespondenz \mathfrak{P} als *elliptische Involution* kennzeichnet und wieder ein System *konfokaler Rotationsquadriken* liefert, diesmal jedoch aus abgeplatteten Ellipsoiden und einschalligen Hyperboloiden bestehend.

6. Übergang zu Parallelflächen.

Sei Φ eine beliebige Drehfläche und Ψ eine zugehörige, durch die Clairaut-Konstante c gekennzeichnete Leitfläche. Es soll die Veränderung untersucht werden, die die Leitfläche erfährt, wenn von der Grundfläche Φ zu der Parallelfläche $\bar{\Phi}$ im Abstand d übergegangen wird. Diese Veränderung ist am durchsichtigsten wieder im zyklographischen Urbild zu verfolgen.

Gehen wir also aus von einem (orientierten) Meridianelement (T, t) der Grundfläche Φ und dem zugeordneten, etwa gemäß Abb. 3 konstruierten Leitelement (S, s) . Die zugehörigen Normalenstrecken z, z^* — gleichzeitig die Koten der zyklographischen Urbildelemente $(\mathfrak{T}, \mathfrak{t})$ und $(\mathfrak{S}, \mathfrak{s})$ — sind laut

(7) durch die Beziehung

$$zz^* = c(v-u) \quad (26)$$

verknüpft. Wird nun beim Übergang zur Parallelfläche $\bar{\Phi}$ das Element (T, t) in Normalenrichtung um den festen Betrag d nach (\bar{S}, \bar{t}) verschoben, so bleibt der Tangentenfußpunkt V fest, während der Tangentenfußpunkt U um das Stück

$$u - \bar{u} = \frac{d}{z} (v - u) = \frac{d}{c} z^* \quad (27)$$

nach \bar{U} rückt; das Bildelement $(\mathfrak{T}, \mathfrak{t})$ erfährt eine Verschiebung \mathfrak{D} in z -Richtung um die Abstandsstrecke d (Abb. 7). Wird die Clairaut-Konstante c beibehalten, so bleibt die Normalenstrecke z^* des Leitelements unverändert, was am einfachsten unmittelbar aus der Konstruktion zu erkennen ist. Der Punkt \mathfrak{E} erfährt mithin eine Verschiebung in x -Richtung nach $\bar{\mathfrak{E}}$, und zwar um einen Betrag $\bar{u} - u$, der zufolge (27) seiner Kote z^* proportional ist. Die Transformation $\mathfrak{G} \rightarrow \bar{\mathfrak{G}}$ ist damit als affine Scherung längs der x -Achse zu erkennen; im Einklang damit bleibt der Tangentenfußpunkt V fest. Die auftretende Scherung ist im übrigen nichts anderes als die durch die Korrelation \mathfrak{B} aus Abschn. IV transformierte Schiebung \mathfrak{D} .

Zusammenfassend gilt demnach: Der Übergang von einer Drehfläche zu einer Parallelfläche im Abstand d bewirkt einerseits eine achsennormale Verschiebung $(\bar{v} = v, \bar{z} = z + d)$ der zyklographischen Urbildkurve des Meridiants, andererseits eine achsenparallele Scherung $(\bar{u} = u - \lambda z^*, \bar{z}^* = z^*)$ der Urbildkurve des Meridiants der zur Clairaut-Konstante $c = d/\lambda$ gehörigen Leitfläche.

Als erste Anwendung mag ein *Torus* $\bar{\Phi}$ betrachtet werden, aufgefaßt als Parallelfläche einer Kreislinie Φ . Die zu dieser ausgearteten Grundfläche gehörigen Leitflächen Ψ sind die am Schluß des vorigen Abschnittes erwähnten *konfokalen Drehhyperboloiden*, die die Kreislinie als gemeinsamen Fokalkegelschnitt besitzen. Die Urbildkurve \bar{f} des auf einen Nullkreis zusammengeschrumpften Meridiants von $\bar{\Phi}$ ist eine *gleichseitige Hyperbel* mit x als Nebenachse, aus der die Bildkurve f des Meridiankreises von $\bar{\Phi}$ durch Verschiebung in z -Richtung hervorgeht. Die Meridiane der den Torus $\bar{\Phi}$ enthaltenden *Betschar* ergeben sich durch zyklographische Abbildung der \bar{f} enthaltenden Affinschar von ungleichseitigen Hyperbeln und sind demnach *Toroiden*, also Parallelkurven von Ellipsen, was auch im Einklang mit der Tatsache steht, daß die Meridiane der Bettflächen zu den Urbildkurven der Ausgangsfläche ähnlich sind (Abschn. II). Die Urbildkurve der Meridianhyperbel eines Leithyperboloids Ψ von $\bar{\Phi}$ ist gleichfalls eine zu x symmetrische Hyperbel; diese wird durch affine Scherung in eine zu x schief-symmetrische Hyperbel transformiert, deren zyklographisches Bild ein gewisser *Hyperzykel* ist (Kurve 8, Ordnung und 4. Klasse). Die Tangenten einer *Torusgeodätischen* berühren mithin eine *koachsiale Leitfläche*, deren Meridian ein zur Achse symmetrischer und durch einen Mittelpunkt ausgezeichneter Hyperzykel ist.

Als zweites Beispiel betrachten wir jene Drehfläche 6. Ordnung $\bar{\Phi}$, die durch Rotation einer regulären *Astroide* um eine zwei Scheitelpunkte tragende Symmetrieachse x entsteht. Sie kann als Parallelfläche jener am Ende von Abschn. II, 2) erwähnten Drehfläche φ angesehen werden, die durch Drehung des *Malta-* *kreuzes* um die Selbstberührungsstangenten erzeugt wird. Das zyklographische Urbild des Maltakreises ist eine gewöhnliche *Parabel* f mit der Scheiteltangente

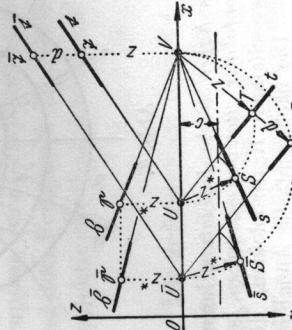


Abb. 7.

x; das Urbild der Astroide ist demnach eine zu f kongruente Parabel \tilde{f} mit z -paralleler Achse. Durch zyklographische Abbildung der \tilde{f} enthaltenden Affinschar von Parabeln erhält man als Meridiane der $\tilde{\Phi}$ enthaltenden *Bettschar* lauter Parallelkurven von Astroiden (Evolventen von Astroiden oder „schiefe Astroiden“). Das zyklographische Urbild des Meridians einer Leitfläche γ von Φ ist zufolge Abschn. II, 2) eine *gleichseitige Hyperbel* \tilde{f}^* mit x als Asymptote. Die genannte, x punktweise festlassende affine Scherung verwandelt \tilde{f}^* in eine ungleichseitige *Hyperbel* \overline{f}^* , deren zyklographisches Bild als Meridian der Leitfläche $\overline{\Phi}$ von $\overline{\Phi}$ wieder einen zur Asymptote x symmetrischen und mit einem Zentrum behafteten Hyperzykel liefert.