Nicht im Handel

Sonderabdruck aus 58. Band, 1954, 1. Heft der

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

Herausgegeben von J. Radon, Wien

Springer-Verlag in Wien

Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D-Kurven von Kegeln 2. Grades.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

(Eingelangt am 28. Oktober 1953)

1.

Unter den *D-Linien* einer Fläche versteht man bekanntlich jene ∞^2 auf der Fläche verlaufenden Kurven, deren Schmiegkugeln die Fläche berühren. Sie wurden erstmalig von *G. Darboux* betrachtet, der insbesondere auch dem Spezialfall einer *Grundfläche 2. Ordnung* seine Aufmerksamkeit schenkte[1]. Wie ich gezeigt habe, erfreuen sich die *D*-Kurven der Flächen 2. Ordnung zahlreicher besonderer Eigenschaften[2]; sie lassen sich unter anderem als *affine Böschungslinien* kennzeichnen, da ihre Tangenten jeweils zu den Erzeugenden eines gewissen *Richtkegels 2. Ordnung* parallel sind, der im übrigen zur Grundfläche *konzyklisch* liegt, d. h. mit dieser die Kreisschnittebenen gemeinsam hat.

Die genannte Tangenteneigenschaft bleibt natürlich auch für die *D*-Linien der *Kegel 2. Grades* aufrecht und reicht zu ihrer Festlegung vollkommen aus. In der vorliegenden Note soll nun auf eine recht merkwürdige und nur diesen speziellen Kurven zukommende metrische Eigenschaft hingewiesen werden, auf die ich im Rahmen einer größeren Untersuchung über „Doppelloxodromen" (im Sinne von *G. Scheffers*[3]) gestoßen bin, deren eigentlichen geometrischen Kern aufzudecken mir

[1] *G. Darboux*: Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. C. R. 73 (1871), 732—736.

[2] *W. Wunderlich*: Eine kennzeichnende Eigenschaft der *D*-Linien von Quadriken. Mh. Math. 55 (1951), 76—81. — Sur les lignes *D* des quadriques. Atti IV Congr. Unione Mat. Ital. (Taormina 1951), 465—468. — Euklidische und nichteuklidische *D*-Linien auf Quadriken. Ann. di mat. 33 (1952), 145—164.

[3] *G. Scheffers*: Besondere transzendente Kurven. Enz. Math. Wiss. III D 4, Nr. 34, insb. S. 252.

aber noch nicht gelungen ist: Ich werde zeigen, daß *jede D-Kurve eines Kegels 2. Grades die sechs Brennebenenbüschel des Kegels unter konstanten Winkeln durchsetzt,* daß sie mithin eine *sechsfache Loxodrome* darstellt.

2.

Setzen wir — unter Verwendung kartesischer Normalkoordinaten x, y, z — den *Grundkegel 2. Grades* an durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0, \tag{1}$$

oder, mit Benützung eines Parameterwinkels ω, durch

$$x : y : z = a \cos\omega : b \sin\omega : 1, \quad \text{wobei} \quad a \geqq b > 0. \tag{2}$$

Setzen wir noch abkürzend

$$a^2 + 1 = A^2, \quad b^2 + 1 = B^2, \quad a^2 - b^2 = A^2 - B^2 = C^2, \tag{3}$$

so werden die sechs *Fokalachsen* festgelegt durch[4]

$$x : y : z = \begin{cases} 0 \;\; : C : \pm iA, \\ C \;\; : 0 : \pm B, \\ \pm iA : B : \;\; 0. \end{cases} \tag{4}$$

Bedienen wir uns ferner der kürzeren und übersichtlicheren Schreibweise zuliebe des *Matrizenkalküls,* indem wir den Erzeugendenvektor (2) durch die Spaltenmatrix $\mathfrak{x}$ $(a \cos\omega, b \sin\omega, 1)$ repräsentieren; bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$ die Diagonalmatrix mit den nichtverschwindenden Elementen a^{-2}, b^{-2}, -1 und deuten wir die Stürzung einer Matrix durch eine Tilde an, dann gilt zufolge (1)

$$\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = 0. \tag{5}$$

Führen wir ferner die durch die Spaltenmatrix $\mathfrak{y}$ $(-aB^2 \sin\omega, bA^2 \cos\omega, C^2 \sin\omega \cos\omega)$ dargestellte „Quertangente" des Kegels ein, die zur Erzeugenden $\mathfrak{x}$ normal ist, also den Beziehungen

$$\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y} = 0, \quad \tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{y} = 0 \tag{6}$$

genügt, dann können wir jede Kegeltangente als Linearkombination

$$\mathfrak{z} = \lambda\,\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \tag{7}$$

ansetzen.

[4] Die Kegelnormale $b \cos\omega : a \sin\omega : -ab$ wird nämlich isotrop für $b^2 \cos^2\omega + a^2 \sin^2\omega + a^2b^2 = 0$, also für $\cos\omega = \pm aB/C$ und $\sin\omega = \pm ibA/C$. Die zugehörigen (isotropen) Tangentialebenen $\pm Bx \pm iAy - Cz = 0$ schneiden aus den Hauptebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die angeführten Brennstrahlen aus.

Sollen nun für eine *D-Kurve* die Tangenten voraussetzungsgemäß zu den Erzeugenden eines *konzyklischen Richtkegels* parallel sein (Abschn. 1), so muß

$$\tilde{\mathfrak{z}}\,(\mathfrak{A} - \mu\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{z} = 0 \tag{8}$$

gelten, wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix und μ eine beliebige Konstante ist. Ausgeführt ergibt sich für λ die (rein-) quadratische Gleichung

$$-\lambda^2 \cdot \mu\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x} + 2\lambda\,\underbrace{(\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y} - \mu\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{y})}_{0} + \tilde{\mathfrak{y}}\,(\mathfrak{A} - \mu\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{y} = 0. \tag{9}$$

Zur Berechnung des *Schnittwinkels* σ der Tangente $\mathfrak{z}$ mit der Brennebene, die die Erzeugende $\mathfrak{x}$ mit einer Fokalachse verbindet — etwa mit der reellen Achse $x : y : z = C : 0 : B$ —, benötigen wir die Normale dieser Ebene. Dieselbe wird durch die Spaltenmatrix $\mathfrak{n}$ $(-bB \sin\omega, aB \cos\omega - C, bC \sin\omega)$ repräsentiert und es ist natürlich

$$\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{n} = 0. \tag{10}$$

Wir finden zunächst

$$\sin^2\sigma = \frac{(\tilde{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{n})^2}{(\tilde{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})\,(\tilde{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n})} = \frac{(\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{n})^2}{(\lambda^2\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x} + \tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y})\,(\tilde{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n})} = \frac{\mu\,(\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{n})^2}{(\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y})\,(\tilde{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n})}. \tag{11}$$

Gehörige Auswertung (unter Berücksichtigung von $a^2B^2 - b^2A^2 = A^2 - B^2 = C^2$) führt dann über

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{n} &= abB^3 \sin^2\omega + abA^2B \cos^2\omega - bA^2C \cos\omega + bC^3 \sin^2 w \cos\omega \\
&= b\,(aB - C\cos\omega)\,(B^2 + C^2 \cos^2\omega), \\
\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y} &= A^4 \cos^2\omega + B^4 \sin^2\omega - C^4 \sin^2\omega \cos^2\omega = (B^2 + C^2 \cos^2\omega)^2, \\
\tilde{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n} &= b^2A^2 \sin^2\omega + a^2B^2 \cos^2\omega - 2\,aBC \cos\omega + C^2 = (aB - C\cos\omega)^2
\end{aligned}$$

schließlich — wie behauptet, *unabhängig von* ω — auf

$$\sin\sigma_{\mathrm{II}} = b\sqrt{\mu}. \tag{12}$$

Analog ergibt sich für die übrigen Fokalachsenpaare

$$\sin\sigma_{\mathrm{I}} = a\sqrt{\mu}, \quad \sin\sigma_{\mathrm{III}} = i\sqrt{\mu}. \tag{12'}$$

Damit ist nun bewiesen der

Satz: *Die D-Linien eines Kegels 2. Grades* $z^2 = (x/a)^2 + (y/b)^2$ *sind sechsfache Loxodromen, da sie die sechs Brennebenenbüschel unter konstanten Winkeln* $\pm\sigma_{\mathrm{I}}$, $\pm\sigma_{\mathrm{II}}$, $\pm\sigma_{\mathrm{III}}$ *durchsetzen; es gilt dabei* $\sin\sigma_{\mathrm{I}} : \sin\sigma_{\mathrm{II}} : \sin\sigma_{\mathrm{III}} = a : b : i$.

3.

Der Vollständigkeit halber sei noch kurz auf die *analytische Darstellung* dieser interessanten Kurven eingegangen. Wir führen zu diesem Zwecke den vom Kegelscheitel (Ursprung) aus gezählten Radialabstand r ein und erhalten zunächst, indem wir den Schnittwinkel τ unserer D-Linie mit der Erzeugenden auf zwei Arten ausdrücken,

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{|\mathfrak{y}|}{\lambda\,|\mathfrak{x}|} = \frac{r\,d\theta}{d\,r}. \tag{13}$$

Für das auftretende Mantelwinkelelement $d\theta$ gilt wiederum, wenn man die Fortschreitrichtung $d\mathfrak{x}$ gemäß (7) durch

$$d\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,d\alpha + \mathfrak{y}\,d\beta \quad \text{mit} \quad d\beta = \frac{\tilde{\mathfrak{y}}\,d\,\mathfrak{x}}{\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y}} \tag{14}$$

ansetzt,

$$d\,\theta = \frac{|\mathfrak{y}|\,d\beta}{|\mathfrak{x}|}. \tag{15}$$

Aus (13) und (15) folgt nun

$$\frac{dr}{r} = \lambda\,d\beta, \tag{16}$$

wobei auf Grund von (9)

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{\mathfrak{y}}\,(\mathfrak{A} - \mu\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{y}}{\mu\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}} =$$

$$\frac{B^4\,(\mu^{-1}-a^2)\sin^2\omega + A^4\,(\mu^{-1}-b^2)\cos^2\omega - C^4\,(\mu^{-1}+1)\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 1}$$

$$= A^2\,(\mu^{-1}-b^2) - C^2\,(\mu^{-1}+1)\sin^2\omega, \tag{17}$$

ferner gemäß (14)

$$d\beta = \frac{\tilde{\mathfrak{y}}\,d\,\mathfrak{x}}{\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y}} = \frac{(a^2B^2\sin^2\omega + b^2A^2\cos^2\omega)\,d\omega}{a^2B^4\sin^2\omega + b^2A^4\cos^2\omega + C^4\sin^2\omega\cos^2\omega} = \frac{d\omega}{A^2 - C^2\sin^2\omega}. \tag{18}$$

Integration von (16) liefert nunmehr für $\ln r$ ein elliptisches Integral, und wir haben

$$r = c.\exp\int \frac{\sqrt{A^2\,(\mu^{-1}-b^2) - C^2\,(\mu^{-1}+1)\sin^2\omega}}{A^2 - C^2\sin^2\omega}\,d\omega. \tag{19}$$

Damit ergeben sich anschließend die Koordinaten des laufenden Kurvenpunktes zu

$$x = r\,.\,\frac{a\cos\omega}{W}, \quad y = r\,.\,\frac{b\sin\omega}{W}, \quad z = r\,.\,\frac{1}{W} \tag{20}$$

$$\text{mit } W^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 1 = A^2 - C^2\sin^2\omega.$$

In gestaltlicher Hinsicht sind *drei reelle Typen* der D-Linien auf einem Kegel 2. Grades zu unterscheiden. Für $0 < \mu < 1/a^2$ wird der Grundkegel von dem konzentrisch angebrachten Tangentenrichtkegel umschlossen, so daß die zugehörigen Kurven den Charakter von „*konischen Spiralen*" aufweisen, die sich der Kegelspitze asymptotisch nähern. Im Grenzfall $\mu = 1/a^2$ zerfällt der Richtkegel in zwei Strahlbüschel und als D-Linien des Kegels stellen sich dessen (reelle) *Kreise* ein; deren Loxodromeneigenschaft bezüglich der Fokalachsen hat *E. Müller* hervorgehoben[5]. Für $1/a^2 < \mu < 1/b^2$ treten wieder *transzendente Kurven von periodischem Aufbau* auf, die jetzt aber auf zwei durch $\lambda = 0$ gekennzeichneten Erzeugenden abwechselnd mit Spitzen aufsetzen. — Für $\mu < 0$ und $\mu > 1/b^2$ schließlich fallen die Richtkegel nullteilig aus und die zugehörigen Flächenkurven sind infolgendessen *imaginär*.

4.

Auf verschiedene *Sonder- und Grenzfälle*, die durch Veränderung des Grundkegels gewonnen werden können, sei nur kurz hingewiesen:

Für $a = b$ $(C = 0)$ tritt als Grundfläche ein *Drehkegel* auf, dessen D-Linien die wohlbekannten *zylindro-konischen Loxodromen* sind, die sich als Bahnkurven räumlicher Ähnlichkeitsgruppen auffassen lassen. Da hier vier Fokalachsen in der Drehachse zusammengerückt sind, liegen eigentlich nur mehr drei Brennebenenbüschel vor; als echte Böschungslinien durchsetzen diese Kurven aber auch noch das uneigentliche Ebenenbüschel $z = \text{const}$ unter festem Winkel, so daß sie als *vierfache Loxodromen* anzusehen sind.

Für $b = 0$ $(C = a)$ plattet sich der Grundkegel zur xz-Ebene ab und man gelangt zu den *ebenen Loxodromen*, welche, nach Ausschaltung des trivialen II. Fokalachsenpaares, im allgemeinen gleichfalls als *vierfache Loxodromen* bezeichnet werden können. Diesen seinerzeit schon von *L. Eckhart* näher betrachteten Kurven ist eine eigene, demnächst erscheinende kleine Abhandlung gewidmet[6].

---

[5] *E. Müller*: Kreise als Loxodromen. Arch. Math. Phys. 26 (1918), 73—96.

[6] *L. Eckhart*: Über ebene Loxodromen und deren graphische Integration. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 127 (1918), 585—597.
W. Wunderlich: Über die ebenen Loxodromen. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien (im Druck).

Geht man schließlich durch einen Grenzübergang von den betrachteten Kegelflächen zu *Zylindern 2. Grades* über, so reduziert sich die Anzahl der eigentlichen Fokalachsen bei elliptischen und hyperbolischen Zylindern auf vier, so daß deren D-Kurven gleichfalls *vierfache Loxodromen* darstellen. Im Falle des Drehzylinders und des parabolischen Zylinders tritt eine weitere Reduktion ein; die zugehörigen D-Linien sind *Böschungsloxodromen*, da sie ein eigentliches und ein uneigentliches Ebenenbüschel isogonal durchsetzen.

Printed in Austria