

NUOVI MODELLI DELLE SUPERFICIE A CURVATURA COSTANTE NEGATIVA

DI WALTER WUNDERLICH (VIENNA, AUSTRIA)

Un tipo particolare di considerazioni geometriche, che fornendo una elementare via di accesso alla geometria differenziale classica ha ottenuto in più d'un caso almeno una elegante illustrazione di certi fatti della teoria delle curve e superficie, fu creato più di 50 anni addietro da S. FINSTERWALDER a Monaco [4]. Questo metodo di studio, in Germania oggi chiamato « Differenzengeometrie » e coltivato principalmente da R. SAUER, approssima dapprima gli oggetti della geometria differenziale con figure elementari — così una curva con un poligono, una superficie con un poliedro ecc. — coll'intenzione di riottenerli più tardi mediante un conveniente passaggio al limite, dopo aver esaurito l'esame delle figure suddette. Da certe proprietà dei modelli elementari seguono così certe proprietà differenziali delle figure limite. Su di una delle più belle applicazioni di questo metodo riferirò ora brevemente: Tale applicazione riguarda le superficie a curvatura costante negativa e conduce a notevoli rapporti colla statica e la cinematica.

1. Come modello delle superficie a curvatura costante negativa ci serviremo di un reticolato $\{P_{ik}\}$, formato di quadrangoli sghembi contigui, i cui lati abbiano la lunghezza comune s ; supponiamo di più che i quattro lati uscenti da un punto P_{ik} appartengano sempre ad un piano π_{ik} . Poichè i quadrangoli non devono ricoprirsi l'uno con l'altro, è possibile orientare concordemente tutti i piani π_{ik} . L'angolo $\pi_{ik} \pi_{i+1,k} = \pi_{i+1,k} \pi_{ik}$ verrà chiamato angolo di torsione del lato $P_{ik} P_{i+1,k}$; si può definirlo con segno e modulo 2π mediante il movimento elicoidale $(P_{ik} \pi_{ik}) \leftrightarrow (P_{i+1,k} \pi_{i+1,k})$. Come « torsione » (del lato) assumeremo qui il quoziente $\text{sen}(\pi_{ik} \pi_{i+1,k}) : P_{ik} P_{i+1,k}$.

Consideriamo anzitutto un singolo quadrangolo $P_{ik} P_{i+1,k} P_{i+1,k+1} P_{i,k+1} = ABCD$ del reticolato. Le due diagonali AC e BD sono ortogonali ed i due piani contenenti una diagonale ed il punto di mezzo dell'altra sono piani di simmetria del quadrangolo. Segue immediatamente da questo che gli angoli di torsione di lati adiacenti sono uguali, eccetto il segno, e che gli angoli di torsione di lati opposti sono proprio uguali. Passando ora successivamente ai quadrangoli vicini, vediamo che tutti i lati $P_{ik} P_{i+1,k}$ (lati di 1^a specie) presentano lo stesso angolo di torsione σ , mentre che tutti i lati $P_{ik} P_{i,k+1}$ (lati di 2^a specie) presentano l'angolo di torsione $-\sigma$.

I poligoni di 1^a specie ($k = \text{cost}$) e di 2^a specie ($i = \text{cost}$) che formano il reticolato si possono dunque considerare come poligoni di torsione costante. È facile dimostrare che un reticolato quadrangolare del tipo considerato è determinato univocamente e costruibile in modo elementare, se si danno:

a) un poligono di 1^a e uno di 2^a specie, cioè due poligoni equilateri di torsioni costanti e opposte, aventi in comune un punto P_{00} ed un piano π_{00} in cui sono contenuti i quattro lati uscenti da P_{00} .

b) un poligono equilatero a zigzag, i cui lati presentano alternativamente gli angoli di torsione $+\sigma$ e $-\sigma$.

Le costruzioni necessarie per il completamento del reticolato sono tutte elementari e si possono eseguire graficamente mediante metodi noti della geometria descrittiva (ved. p. es. fig. 2).

Essendo sicuri dell'esistenza dei reticolati sopra considerati, eseguiamo adesso un passaggio al limite per $s \rightarrow 0$, in modo che per $s \rightarrow 0$ anche l'angolo di torsione σ e tutti gli angoli esterni dei poligoni di 1^a e 2^a specie tendano collo stesso ordine d'infinitesimo verso zero: Il reticolato $\{P_{ik}\}$ converge allora verso un sistema romboidale di curve (sistema di TCHEBYCHEFF) su di una certa superficie gobba Φ . I piani π_{ik} divengono piani tangenti a Φ e simultaneamente piani osculatori alle curve del sistema romboidale, perchè contenevano tre punti vicini di un poligono del reticolato. Le curve del sistema rappresentano quindi le linee asintotiche della superficie Φ e sono inoltre caratterizzate dall'aver torsione costante $\pm\tau = \lim(\pm\sigma/s)$.

2. La forma di un rombo sghembo $ABCD$ è completamente fissata dalla lunghezza s dei lati e dalla grandezza degli angoli α in A e C , e β in B e D (fig. 1). Per l'angolo di torsione σ vale la formula seguente, che si dimostra facilmente:

$$(1) \quad \cos \sigma = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Consideriamo inoltre quelle due sfere che toccano i quattro lati del rombo nei vertici opposti A e C , o risp. B e D : Per i loro raggi si trova

$$(2) \quad \varrho = s \operatorname{ctg} \sigma \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad \bar{\varrho} = -s \operatorname{ctg} \sigma \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2},$$

ed il prodotto

$$(3) \quad \varrho \bar{\varrho} = -\frac{s^2 \cos \sigma}{\operatorname{sen}^2 \sigma}$$

non dipende che da s e σ , possedendo così un valore costante (negativo) per tutti i rombi del reticolato.

Osservando che i poligoni diagonali del reticolato $\{P_{ik}\}$ si trasformano alla fine del suddetto passaggio al limite nelle linee di curvatura della superficie limite Φ , vediamo che i raggi ϱ , $\bar{\varrho}$ tendono verso i raggi principali di curvatura in un punto della superficie. Come ora segue dalla (3), il prodotto delle curvature principali, cioè la curvatura della superficie, ha un valore costante (negativo)

$$(4) \quad K = \lim \frac{1}{\varrho \bar{\varrho}} = -\lim \left(\frac{\sigma}{s} \right)^2 = -\tau^2.$$

Φ è quindi una superficie pseudosferica. Il fatto noto che le linee asintotiche di una tale superficie costituiscono un sistema romboidale appare con grande chiarezza dalla considerazione del nostro modello reticolato.

3. Una prima possibilità di realizzare un modello del carattere considerato, cioè quale configurazione d'equilibrio di una rete nodata da fili sottili (quasi senza peso), si fonda sull'esistenza dei piani π_{ik} . Ad ogni punto P_{ik} del reticolato possiamo associare un quadrangolo piano P_{ik}^* , i cui lati siano paralleli ai quattro lati del reticolato uscenti da P_{ik} ; inoltre si può anche assegnare la lunghezza di due lati di P_{ik}^* . In conseguenza di questo i quadrangoli P_{ik}^* si lasciano dimensionare e adattare in modo tale che da incastrarsi senza lacune. Si può associare così — in infiniti modi — al reticolato $\{P_{ik}\}$ un poliedro « reciproco » $\{P_{ik}^*\}$, i cui spigoli sono paralleli ai lati del reticolato: la congiungente di due vertici vicini A, B ed il lato comune ai due quadrangoli corrispondenti A^*, B^* sono sempre paralleli (fig. 1).

Gli spigoli del poliedro reciproco danno, nel senso di L. CREMONA, le direzioni e le intensità delle forze di tensione che agiscono

nei lati del reticolato, tenendolo in equilibrio. Basta disporre oppor-

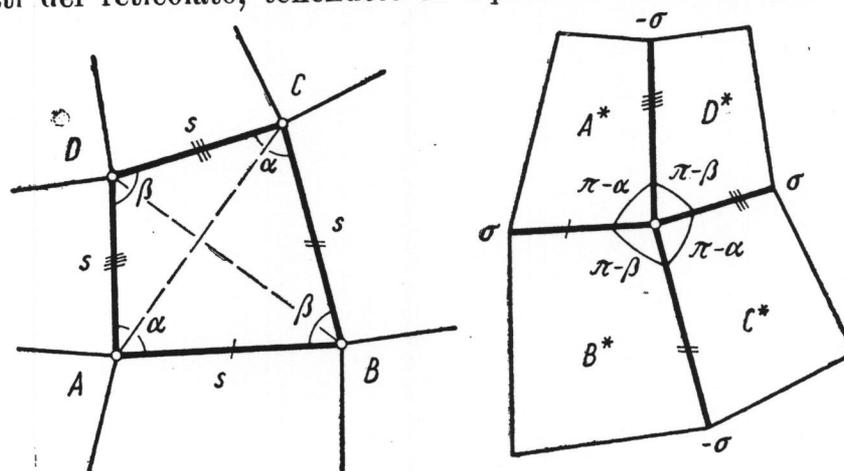


Fig. 1.

tunamente delle forze al contorno affinchè la rete di fili prenda una forma desiderata ⁽¹⁾.

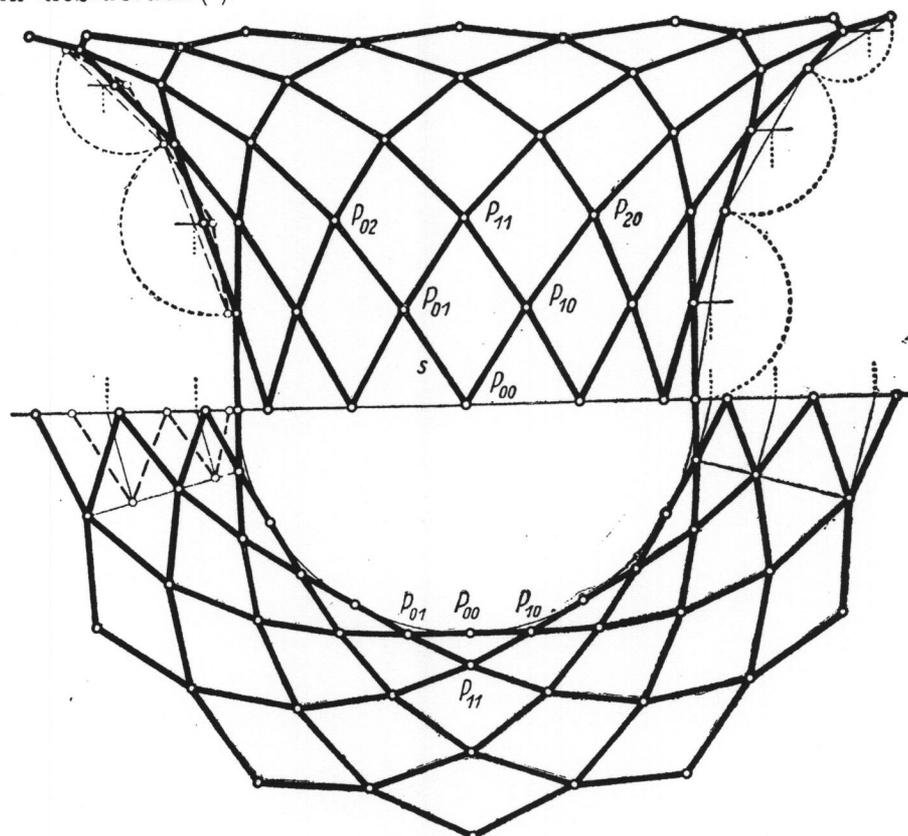


Fig. 2.

⁽¹⁾ Occorre avvertire esplicitamente che i nodi di una rete quadrangolare in equilibrio generalmente non saranno piani; in conseguenza i quadrangoli del poliedro reciproco non saranno neppure piani.

L'esempio più semplice che conviene qui ricordare è la configurazione d'equilibrio con un asse di simmetria di rotazione. Si può realizzare facilmente con una rete tubiforme chiusa e distesa tra due cerchi. Questo modello è stato oggetto di ricerche (di carattere infinitesimale) da J. RADON nel 1940 [6] e poco dopo da H. THOMAS [9]. Poichè per ragioni di simmetria non si presentano che nodi piani, è evidente per quanto s'è detto che si tratta del modello di una superficie pseudosferica rotonda colle sue linee asintotiche (fig. 2).

Alla fine del processo di limite $\{P_{ik}\} \rightarrow \Phi$ anche il poliedro reciproco $\{P_{ik}^*\}$ tende verso una superficie gobba Φ^* , ed ogni serie di piani $i = \text{cost}$ o risp. $k = \text{cost}$ si muta in una sviluppabile circoscritta a Φ^* . Si vede pertanto che il sistema degli spigoli del poliedro $\{P_{ik}^*\}$ diviene al limite un sistema di curve coniugate su Φ^* . Poichè $\pi_{ik} \parallel P_{ik}^*$, le superficie Φ e Φ^* sono riferite l'una all'altra per piani tangenti paralleli.

4. Consideriamo un po' più a fondo la piramide quadrangolare $A^* B^* C^* D^*$ associata ad un rombo sghembo $ABCD$ del reticolato (fig. 1): Gli angoli al vertice della piramide sono supplementari degli angoli α, β del rombo, dunque anche uguali due a due. La piramide possiede quindi un asse di simmetria che dimezza gli angoli formati da lati opposti.

Il piano che congiunge due lati opposti diviene al limite piano osculatore di una curva del sistema coniugato sulla superficie Φ^* , e questo piano contiene anche la normale della Φ^* , che proviene dall'asse della piramide. Segue da ciò che il suddetto sistema coniugato sulla superficie Φ^* è formato esclusivamente da linee geodetiche. Conseguentemente Φ^* è una superficie di VOSS [10], ma speciale in un certo senso.

Ponendo mente alla relazione reciproca tra il reticolato $\{P_{ik}\}$ ed il poliedro $\{P_{ik}^*\}$, anche il sistema degli spigoli del secondo si può considerare quale stato d'equilibrio di una rete di fili. Qui tutte le forze di tensione hanno la stessa intensità (proporzionale a s); la risultante di due forze che agiscono in lati opposti di una piramide coincide coll'asse di simmetria, e perciò è superfluo annodare i fili della rete.

Nell'esempio citato del modello di RADON-THOMAS con simmetria di rotazione si comprende facilmente che il poliedro reciproco è inscritto in un conoide elicoidale e tende verso questo. Il sistema dei suoi spigoli, realizzabile con la configurazione d'equilibrio di una rete di fili senza nodi fissi, rappresenta un sistema coniugato di linee

geodetiche di questo elicoide — il quale è noto come l'esempio più semplice di superficie di Voss (fig. 3).

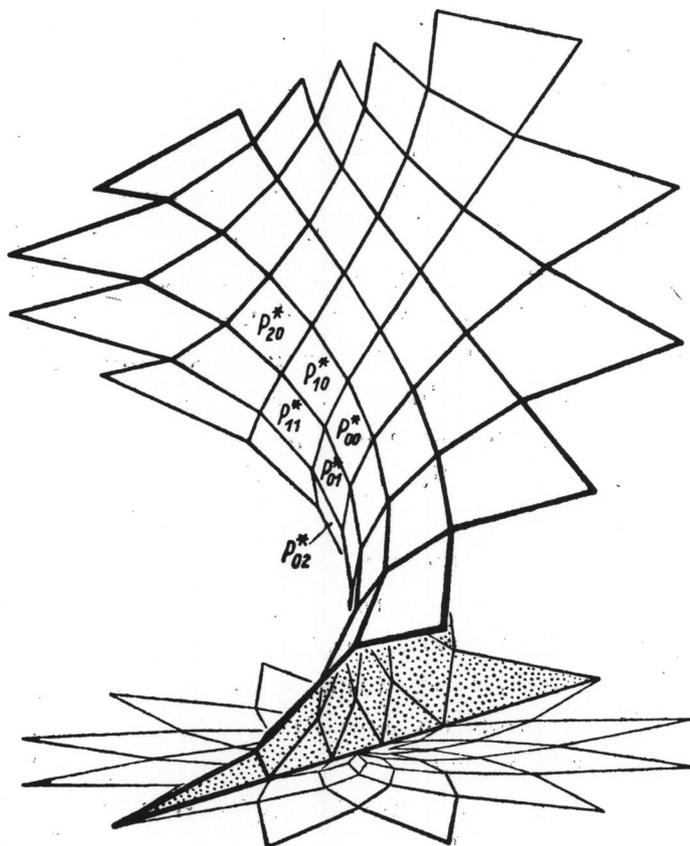


Fig. 3.

5. Poliedri con facce quadrangolari, che contengano esclusivamente piramidi quadrangolari con asse di simmetria, sono stati studiati nel 1903 da H. WIENER [11], e più tardi di nuovo da R. SAUER e H. GRAF [8]. Se non sono chiusi, hanno la proprietà notevole — al contrario ai poliedri quadrangolari generali — d'essere mobili; cioè di permettere, mantenendo le facce rigide, una deformazione continua ad un parametro, che ne muta solo gli angoli spaziali. Nel caso presente gli angoli diedri esterni, inizialmente $+\sigma$ e $-\sigma$, vengono sostituiti con valori variabili σ' e σ'' , dove

$$(5) \quad \operatorname{tg} \frac{\sigma'}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma''}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\sigma}{2} = \text{cost.}$$

Ad una tale deformazione del poliedro $\{P_{ik}^*\}$ corrisponde una certa trasformazione del reticolato $\{P_{ik}\}$, per la quale i rombi sghembi si mutano in parallelogrammi sghembi. Anche questa nuova forma di reticolato (sempre con nodi piani) è da considerare come modello di una superficie a curvatura costante negativa, come si può dimostrare mediante una rappresentazione sferica [7]. Il processo descritto dà, nel senso della « Differenzengeometrie », l'illustrazione della cosiddetta trasformazione di LIE [5] delle superficie pseudosferiche.

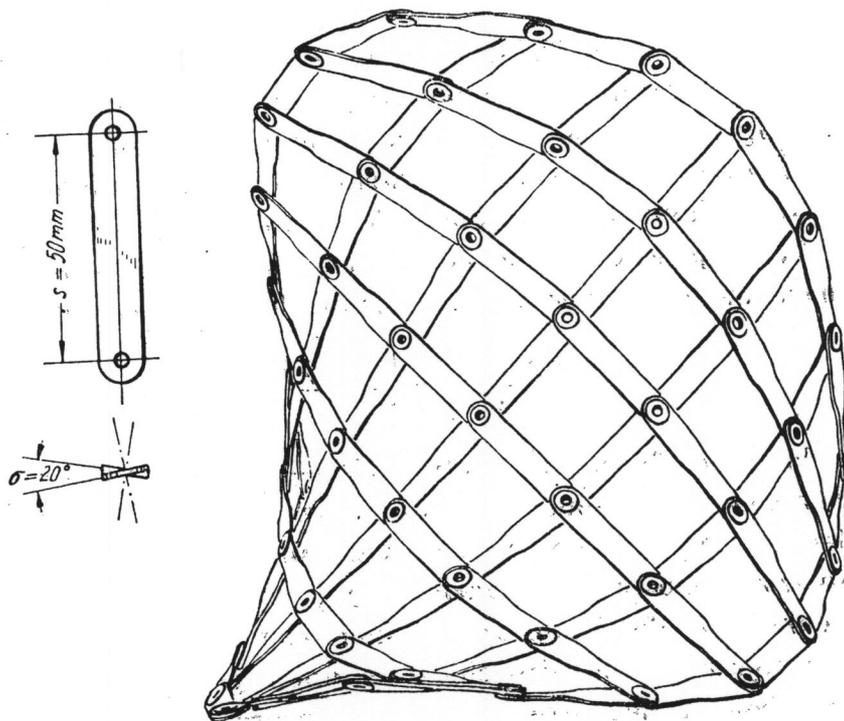


Fig. 4.

6. Una seconda possibilità per realizzare in modo semplice un reticolato romboidale con nodi piani è offerto dalla circostanza che tutti i lati del reticolato hanno la stessa lunghezza e la stessa torsione. Dunque un modello deve essere costituito da due specie di elementi, consistenti in tenui lamelle di metallo, di lunghezza s e storte attorno all'asse longitudinale, le une per l'angolo $+\sigma$, le altre per $-\sigma$. Se congiungiamo questi elementi mediante articolazioni cilindriche (p. es. con chiodi ribaditi), allora otteniamo un modello mobile, che in ogni sua configurazione rappresenta il sistema delle linee asintotiche di una superficie pseudosferica, ed è così adatto a materializzare qualunque superficie a curvatura costante negativa (fig. 4).

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BÄCKLUND: *Om ytor med konstant negativ krökning*. Lunds Univ. Årsskr. 19 (1883).
- [2] G. T. BENNETT: *A new mechanism*. Engineering 76 (1903), 777-778. *The skew isogram mechanism*. Proc. London Math. Soc. 13 (1914), 151-173.
- [3] L. BIANCHI: *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa 1894). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*. Rend. Circ. Mat. Palermo 25 (1908), 291-325.
- [4] S. FINSTERWALDER: *Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation*. Ber. DMV 6 (1897), 43-90.
- [5] S. LIE: *Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung*. Arch. Math. Naturv. 5 (1881).
- [6] J. RADON: *Über Tschebyscheff-Netze auf Drehflächen und eine Aufgabe der Variationsrechnung*. Mitt. Math. Ges. Hamburg 8 (1940), 147-151.
- [7] R. SAUER: *Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen*. Math. Z. 52 (1950), 611-622.
- [8] R. SAUER-H. GRAF: *Über Flächenverbiegung in Analogie zur Verknickung offener Facettenfläche*. Math. Ann. 105 (1931), 499-535.
- [9] H. THOMAS: *Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen*. Math. Z. 44 (1939), 233-265.
- [10] A. VOSS: *Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden*. Sitzgsber. Ak. Wiss. München 18 (1888), 95-102.
- [11] H. WIENER: *Verh. d. Ges. D. Naturf. u. Ärzte*, 75. Vers. Kassel 1903; 29-30. — Ved. anche WIENER-TREUTLEIN: *Sammlung mathematischer Modelle* (2 ed., Teubner, 1912) 38.
- [12] W. WUNDERLICH: *Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung*. Sitzgsber. Ak. Wiss. Wien 160 (1951), 39-77.