

Die in den Sitzungsberichten Abt. I und Abt. II a der math.-nat. Klasse der Österr. Akad. d. Wiss. erscheinenden Abhandlungen werden auch einzeln abgegeben. Sie können durch jede Buchhandlung oder direkt durch die Auslieferungsstelle der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (Wien I, Singerstraße 12) bezogen werden.

Nachfolgende Abhandlungen aus den Fächern **Mathematik** und **Technik** sind erschienen:

- 1948 (S II a, Bd. 157):**
 Federhofer K.: Über die Biegungs-Drillingsschwingungen des Kreisringes mit doppelt-symmetrischem Querschnitt, 19 Seiten. S 14.00
 Hohenberg F.: Die linearen und quadratischen Gebilde der komplexen affinen Ebene (mit 1 Figur), 59 Seiten. S 33.40
 Inzinger R.: Über eine projektive Invariante eines Paares von Flächenelementen zweiter Ordnung, 11 Seiten. S 7.40
 Jung F.: Zur graphischen Behandlung des Tensors (mit 1 Abbildung), 3 Seiten. S 1.60
 Kruppa E.: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven, 33 Seiten. S 20.40
 Lauffer R.: Der Satz von Ptolemäos (mit 3 Abbildungen), 8 Seiten. S 5.20
 Palm F. W.: Über den Perspektivmaß einer allgemeinen Schraubfläche (mit 3 Abbildungen), 15 Seiten. S 10.—
 Palm F. W.: Über die Verallgemeinerung des graphischen Verfahrens von Lill (mit 4 Abbildungen), 17 Seiten. S 11.80
 Palm F. W.: Anwendung und Verallgemeinerung des graphischen Verfahrens von Winkler (mit 6 Figuren), 22 Seiten. S 7.—
1950 (1949) (S II a, Bd. 158):
 Mayrhofer K.: Über den Zusammenhang der additiven Inhabils- und Maßtheorien, 36 Seiten. S 21.40
 Schmetterer L.: Taubersche Sätze und trigonometrische Reihen, 22 Seiten. S 18.60
 Wunderlich W.: Pseudogeodätische Linien auf Zylinderflächen (mit 3 Textfiguren), 12 Seiten. S 8.60
 Wunderlich W.: Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen (mit 4 Textfiguren), 30 Seiten. S 15.60
1950 (1950) (S II a, Bd. 159):
 Hohenberg F.: Zur Geometrie des Funkneßbildes (mit 2 Abbildungen), 14 Seiten. S 12.40
 Jarosch W.: Matrizenbänder, 14 Seiten. S 5.20
 Schmid H.: Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern und Zugrundelegung eines Orientierungspunktgitters (mit 13 Abbildungen), 31 Seiten. S 28.40
1951 (S II a, Bd. 160):
 Hohenberg F.: Komplexe Erweiterung der gewöhnlichen Schraubenlinie (mit 1 Abbildung), 14 Seiten. S 7.80
 Huber A.: Das Verhalten der Integrale der Gibbs-Duhem-Margules'schen Gleichung für binäre Gemische in der Umgebung ihrer festen singulären Stellen (mit 3 Abbildungen), 16 Seiten. S 10.50
 Kramers J.: Zur Geometrie der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen (mit 4 Abbildungen), 15 Seiten. S 7.—
 Parkus H.: Wärmespannungen in Rotationschalen mit drehsymmetrischer Temperaturverteilung (mit 1 Abbildung), 13 Seiten. S 7.50
 Ströher W.: Zur projektiven Differentialgeometrie ebener Kurven; 8 Seiten. S 6.—
 Wunderlich W.: Zur Differenzgeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung (mit 8 Abbildungen), 38 Seiten. S 16.—
1952 (S II a, Bd. 162):
 Federhofer K.: Über die Eigenschwingungen der Kreiszyllinderschale mit veränderlicher Wandstärke, 16 Seiten. S 14.80

Über die ebenen Loxodromen

Von

Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 2 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Oktober 1953)

Gedruckt aus Mitteln des Vereins der Freunde der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien

Unter einer *Loxodrome* schlechtweg versteht man bekanntlich eine Isogonalkrajektorie der Meridianschar einer Drehfläche oder, in der zweckmäßigeren Auffassung von G. Scheffers¹, eine Kurve, die die Ebenen eines Büschels unter einem konstantem Winkel γ schneidet.

Unter diesen Kurven kommt den ebenen von vornherein ein gewisses Interesse zu; L. Eckhart hat denselben seinerzeit an dieser Stelle eine Abhandlung gewidmet². Darüber hinaus dürfen die ebenen Loxodromen aber auch deshalb besondere Beachtung beanspruchen, weil sie das einfachste Beispiel für *Doppelloxodromen* darstellen; in der Tat ist ja eine solche Kurve aus Symmetriegründen gleichzeitig Isogonalkrajektorie zweier bezüglich der Kurvenebene spiegelbildlich liegender Ebenenbüschel (oder Drehflächen), worauf schon Scheffers hingewiesen hat.

Die genannte Abhandlung von Eckhart gibt nun wohl eine analytische Darstellung der ebenen Loxodromen mittels elliptischer Integrale bzw. Funktionen und geht auch auf eine graphische Integration der einschlägigen Differentialgleichung ein, die ausreichenden Aufschluß über die gestaltlichen Verhältnisse dieser Kurven und der sie tragenden Drehflächen gewährt. Abgesehen davon aber, daß der verwendete Ansatz die ebenen Loxodromen mit *parallelen Achsen* nicht erfaßt, werden grundsätzlich nur reelle Achsen und Schnittwinkel voraus-

¹ G. Scheffers: *Enz. Math. Wiss.* III D 4, Nr. 34 (247—254).

² L. Eckhart: *Über ebene Loxodromen und deren graphische Integration.* Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 127 (1918), 585—597.

gesetzt, obgleich auch zu *imaginären Achsen* und *komplexen Winkelwerten* γ durchaus *reelle Loxodromen* gehören können, ja bei *isotropen Achsenpaaren* sogar *algebraische Loxodromen* auftreten. Diesbezüglich bringt nun die vorliegende Arbeit wesentliche und notwendige Ergänzungen, die gleichzeitig einige bemerkenswerte, bislang nicht bekannte *geometrische Eigenschaften* der fraglichen Kurven aufdecken.

§ I. Ebene Loxodromen mit parallelem Achsenpaar

Zur Ermittlung der ebenen Loxodromen mit parallelem Achsenpaar e, \bar{e} diene ein Normalkoordinatensystem x, y, z , dessen x -Achse eine gemeinsame Normale von e und \bar{e} ist und dessen z -Achse in die Mittellinie von e und \bar{e} fällt. Das Achsenpaar e, \bar{e} wird also durch

$$x = \pm a, y = 0$$

festgelegt und die gesuchten Loxodromen verlaufen in der $y z$ -Ebene. Die einen herausgegriffenen Punkt $P(0, y, z)$ enthaltene Ebene des Büschels e hat dann die Normalenrichtung $y : a : 0$, und diese schließt mit der Fortschreitrichtung $0 : dy : dz$ den vorgeschriebenen Winkel $\pi/2 - \gamma$ ein, wenn

$$\frac{a \, dy}{\sqrt{a^2 + y^2} \cdot \sqrt{dy^2 + dz^2}} = \sin \gamma. \tag{1}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich nach Trennung der Veränderlichen in dem elliptischen Integral

$$z = \int \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{a^2 + y^2}} \, dy \text{ mit } b = a \operatorname{ctg} \gamma. \tag{2}$$

Diese Kurve ist wohlbekannt als *Meridian einer Drehfläche konstanter Krümmung*. Berechnet man zum Nachweis für die durch Rotation der Kurve um die z -Achse erzeugte Drehfläche das Produkt der Hauptkrümmungen $\kappa_1 \kappa_2$, so findet man in der Tat

$$\kappa_1 \kappa_2 = \frac{z' z''}{y(1+z'^2)} = -\frac{1}{a^2 + b^2} = \text{const.} \tag{3}$$

Bemerkenswert erscheint nun aber, daß auch die beiden *Trägerflächen*, die durch Rotation der Loxodrome um die Achse e bzw. \bar{e} ent-

stehen, *konstante Krümmung* besitzen. Führt man nämlich in die Gleichung (2) vermöge $r^2 = a^2 + y^2$ den Parallelkreisradius r ein, so erhält man für den Meridian der Trägerfläche die gleichartig gebaute Darstellung

$$z = \int \sqrt{\frac{c^2 - r^2}{r^2 - a^2}} \, dr \text{ mit } c = \sqrt{a^2 + b^2} = a/\sin \gamma. \tag{4}$$

In Anlehnung an (3) läßt sich die Flächenkrümmung unmittelbar angeben mit

$$\kappa_1 \kappa_2 = -\frac{1}{c^2 - a^2} = -\frac{1}{b^2} = \text{const.} \tag{5}$$

Auf Grund der Umkehrbarkeit und ohne Rücksicht auf Realitätsverhältnisse besteht mithin folgender Sachverhalt:

Satz 1. *Die achsenparallelen ebenen Tangentialschnitte der Drehflächen konstanter Krümmung sind Loxodromen derselben und überdies selbst Meridiane von Drehflächen konstanter Krümmung. Sie stellen die ebenen (Doppel-) Loxodromen mit parallelem Achsenpaar dar.*

Über die Realitätsverhältnisse bei den *reellen Loxodromen*, die einen periodischen Aufbau besitzen und daher durchwegs *transzendent* sind, gibt die nachstehende *Übersichtstabelle* Auskunft:

	a^2	b^2	c^2	Achsenpaar $x = \pm a$ $y = 0$	Schnittwinkel $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$	Trägerfläche		Drehfläche mit Loxodrome als Meridian	
						Krümmung $-b^{-2}$	Typ	Krümmung $-c^{-2}$	Typ
1	+	+	+	reell	reell	-	ringartig	-	konisch
2	-	+	+	konj. imag.	komplex	-	konisch ¹	-	ringartig
3	-	+	-	konj. imag.	komplex	-	imaginär	+	wulstartig
4	-	-	-	konj. imag.	reell	+	imaginär	+	spindelartig

¹ Die eigentliche Trägerfläche ist natürlich mit ihrer Achse auch selbst *imaginär*; sie geht aber aus einer *reellen* Fläche vom konischen Typ durch *Verschiebung* um den imaginären Betrag a in x -Richtung hervor.

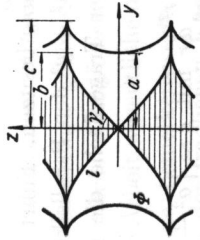


Abb. 1. Ebene Loxodrome l als Tangentialabschnitt einer Drehfläche ϕ konstanter negativer Krümmung ($\gamma = \pi/4$; $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}$).

§ II. Ebene Loxodromen mit einander schneidenden Achsen

Möge diesmal die Loxodromenebene mit der xy -Ebene zusammenfallen und das in der xz -Ebene angenommene Achsenpaar e, \bar{e} durch $x : y : z = \pm \text{ctg } \alpha : 0 : 1$

angesetzt werden. Die den Punkt $P(x, y, 0)$ enthaltende Ebene des ersten Büschels hat dann die Normalenrichtung $-y : x : y \text{ ctg } \alpha$ und diese schließt mit der Fortschreitrichtung $dx : dy : 0$ den vorgeschriebenen Winkel $\pi/2 - \gamma$ ein, wenn

$$\frac{x \, dy - y \, dx}{\sqrt{x^2 + y^2} \csc^2 \alpha \sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sin \gamma. \tag{6}$$

Da die Loxodromenschar die Streckungsgruppe vom Ursprung aus trägt, ist der Übergang zu *Polarkoordinaten* R, φ mittels $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi$ angezeigt. Man gelangt so zu

$$\frac{dR}{R} = \frac{\text{ctg}^2 \gamma - \text{ctg}^2 \alpha \sin^2 \varphi}{1 + \text{ctg}^2 \alpha \sin^2 \varphi} d\varphi \tag{7}$$

und erhält damit $\ln R$ als elliptisches Integral von φ . Die Zurückführung auf die Weierstraßsche Normalform findet sich bei L. Eckhart a. O.² Im übrigen ist bekannt, daß das Integral für $\gamma = \pm \alpha$ elementar auswertbar wird und auf *Kreise* führt, die auf einem *Torus* als Trägerfläche verlaufen (Villarceauxche Loxodromenkreise³).

Wollte man durch einen analogen Ansatz jene in der xy -Ebene verlaufenden Loxodromen bestimmen, die die Ebenenbüschel mit den in der yz -Ebene liegenden Achsen e^*, \bar{e}^*

$$x : y : z = 0 : \pm \text{ctg } \alpha^* : 1$$

³ E. Müller: Kreise als Loxodromen. Arch. Math. Phys. 26 (1918), 73—9-6

unter dem festen Winkel γ^* durchsetzen, so hätte man auszugehen von

$$x \, dy - y \, dx \sqrt{x^2 \csc^2 \alpha^* + y^2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sin \gamma^*. \tag{6^*}$$

Diese Gleichung wird aber mit (6) identisch, wenn man

$$\sin \alpha^* = 1/\sin \alpha \quad \text{und} \quad \sin \gamma^* = \sin \gamma/\sin \alpha \tag{8}$$

macht. Damit ergibt sich die interessante, bisher nicht bemerkte Feststellung:

Satz 2. Eine ebene Loxodrome ist im allgemeinen vierfache Loxodrome. Die vier Achsen bilden ein zur Loxodromenebene symmetrisches Vierkant mit isotropen Seitenflächen. Die Winkel $\pm \alpha, \pm \alpha^*$ der Achsen gegen die Loxodromenebene genügen der Bedingung $\sin \alpha \cdot \sin \alpha^* = 1$, für die zugehörigen Loxodromenwinkel γ, γ^* gilt $\sin \gamma : \sin \gamma^* = \sin \alpha : 1$.

Was die Behauptung über die Seitenflächen des Achsenvierkants anlangt, so ist leicht nachzuprüfen, daß das äußere Produkt der Achsenvektoren

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha, 0, \sin \alpha) \times (0, \cos \alpha^* \sin \alpha^*, \sin \alpha^*) = \\ & = (-\sin \alpha \cos \alpha^*, -\cos \alpha \sin \alpha^*, \cos \alpha \cos \alpha^*) \end{aligned}$$

wegen (8) tatsächlich einen Vektor der Länge Null liefert. Hieraus folgt im übrigen, daß höchstens eines der beiden Achsenpaare reell sein kann.

Aus der Bauart der Gleichung (7), die jedem Polarwinkel zwei nur durch das Vorzeichen unterschiedene Tangentenwinkel zuweist ($\text{ctg } \tau = dR/Rd\varphi$), geht unmittelbar hervor, daß die auftretenden Loxodromen gewisse *Inversionen* und *Streckungen* vom Ursprung aus gestatten. Es handelt sich mithin — in der Ausdrucksweise von G. Loria — um analogmatische *abnehmende Laufmusterkurven*⁴. Innerhalb der reellen Loxodromen sind folgende fünf Typen zu unterscheiden:

1. $\text{ctg}^2 \alpha > 0$ ($\text{ctg}^2 \alpha^* < -1$). Ein reelles, ein konjugiert-imaginäres Achsenpaar⁵.

a) γ reell, $|\gamma| > |\alpha|$ (γ^* komplex). Die Loxodrome verläuft zwischen den beiden Strahlen $\varphi = \pm \arcsin(\text{tg } \alpha/\text{tg } \gamma)$ und setzt auf denselben abwechselnd mit Spitzen senkrecht auf.

⁴ G. Loria-F. Schütte: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Bd. II (Leipzig-Berlin 1911), 215.

⁵ Abbildungen dieser Loxodromenformen finden sich bei L. Eckhart a. a. O.

- b) γ reell, $|\gamma| = |\alpha|$. Loxodromenkreise von Villarceau.
 - c) γ reell, $|\gamma| < |\alpha|$ (γ^* reell). Die Loxodrome hat das Aussehen einer Spirale mit einem asymptotischen Punkt im Ursprung. Die zu $\alpha = \pi/2$ gehörige Grenzform ist eine logarithmische Spirale.
2. $\text{ctg}^2 \alpha < -1$ ($\text{ctg}^2 \alpha^* < -1$). Zwei Paare konjugiert-imaginärer Achsen.
- a) γ reell (γ^* komplex). Die Kurve verläuft als progressive Wellenlinie zwischen den beiden reellen Strahlen $\varphi = \pm \arcsin(i \text{tg } \alpha)$, dieselben abwechselnd berührend.
 - b) $\text{tg } \gamma$ rein-imaginär, $\text{tg}^2 \gamma < \text{tg}^2 \alpha$. Die Kurve verläuft zwischen den reellen Strahlen $\varphi = \arcsin(i \text{tg } \alpha)$ und $\varphi = \arcsin(\text{tg } \alpha/\text{tg } \gamma)$, den ersten Strahl berührend, auf dem zweiten mit Spitzen normal aufsetzend⁶.

§ III. Ebene Loxodromen mit isotropem Achsenpaar

Die in § II stillschweigend außer Acht gelassene Annahme $\alpha = 0$, bei welcher das erste Achsenpaar e, \bar{e} in der x -Achse zusammenrückt und in die Loxodromenebene $z = 0$ fällt, ist keineswegs sinnlos, da das zweite Achsenpaar e^*, \bar{e}^* durchaus nicht ausscheidet: Es wird zufolge $\text{tg } \alpha^* = \pm i$ mit dem vom Ursprung ausgehenden Minimalstrahlenpaar $z = \pm iy$ der yz -Ebene identisch.

Die Differentialgleichung (6*) nimmt jetzt die vereinfachte Form an, die nach Einführung von Polarkoordinaten R, φ und unter Benützung des Bogenelements ds übergeht in

$$\frac{x dy - y dx}{y \sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sin \gamma^* = \frac{1}{m} \quad (9)$$

$$\frac{R d\varphi}{ds} = \frac{\sin \varphi}{m} \quad (10)$$

Nachdem nun links der Sinus des vom Radiusvektor aus gemessenen Tangentenwinkels τ steht, so drückt die Gleichung (10) auf Grund des Sinussatzes folgende Eigenschaft der Loxodrome aus: Die Länge der durch x -Achse und Berührungspunkt begrenzten Kurventangente steht zu der von der Tangente auf der x -Achse abgeschnittenen Strecke im

⁶ Die nicht angeführte Alternative $\text{tg}^2 \gamma > \text{tg}^2 \alpha$ ist dem Fall 2 a äquivalent.

festen Verhältnis $m : 1$ (Abb. 2). Versteht man mithin unter einer „linearen Kreisreihe“ jene einparametrische Kreismannigfaltigkeit, die

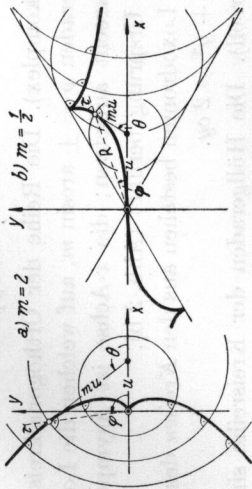


Abb. 2. Ebene, algebraische Loxodromen mit isotropem Achsenpaar $x = 0$, $y \pm iz = 0$; Schnittwinkel $\pi/6$ bzw. $\arcsin 2 = \pi/2 + i \arcsin 2$.

durch Ausübung sämtlicher zentrischen Ähnlichkeiten mit gemeinsamem Zentrum auf einen Einzelkreis erzeugt wird, so kann man sagen:

Satz 3. Die ebenen (Doppel-) Loxodromen mit isotropem Achsenpaar sind Orthogonaltrajektorien linearer Kreisreihen⁷.

Mit Benützung des von der x -Achse aus gezählten Richtungswinkels θ der Tangente und der von der Tangente auf der x -Achse abgeschnittenen Länge u (vgl. Abb. 2) lassen sich die Loxodromen mithin kennzeichnen durch

$$x = u(1 + m \cos \theta), \quad y = mu \sin \theta, \quad dy/dx = \text{tg } \theta. \quad (11)$$

Nach Ausführung der Differentiation erhält man die Gleichung

$$\frac{du}{u} = \frac{m d\theta}{\sin \theta}, \quad (12)$$

die sich unmittelbar integrieren läßt zu

$$\ln u = m \ln \text{tg } \frac{\theta}{2} + \text{const.} \quad (13)$$

Damit ergibt sich gemäß (11) schließlich folgende Parameterdarstellung der Loxodromen:

$$x = ct^m \left(\frac{1}{m} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right), \quad y = \frac{2ct^{m+1}}{1+t^2} \quad \text{mit } t = \text{tg } \frac{\theta}{2}. \quad (14)$$

⁷ Diese Kurven lassen sich auffassen als Grundrißprojektion der Falllinien eines schiefen Kreiskegels mit horizontalen Kreisschnitten.

Unter Ausschaltung des Ausartungsfalles $m = 0$ genügt es, sich auf $m > 0$ zu beschränken, da zu gegengleichen m dieselben Kurven gehören. Zu unterscheiden sind drei Typen:

1. $m < 1$ (γ^* komplex). Die Reihe der Orthogonalkreise besitzt zwei reelle Hüllgeraden $\varphi = \pm \arcsin m$, auf welchen die Loxodromen mit Spitzen senkrecht aufsetzen; die x -Achse ist Asymptote und wird überdies im Ursprung berührt (Abb. 2 b).
2. $m = 1$. Die Loxodromen bestehen aus den *Kreisen* des parabolischen Büschels $x^2 + y^2 = 2cy$.
3. $m > 1$ (γ^* reell). Die Hüllgeraden der Kreisreihe sind konjugiert-imaginär. Die Loxodrome berührt die x -Achse im Ursprung und sendet einen parabolischen Ast in x -Richtung ins Unendliche (Abb. 2 a).

Für $m \neq 1$ ist jede Loxodrome bezüglich des die Spitzen tragenden Kreises $x^2 + y^2 = c^2 m^{-2} (1 + m)^{1+m} (1 - m)^{1-m}$ *anallagmatisch*; zusammengehörige (inverse) Punkte sind dabei durch die Parameterbedingung $t't' = (1 + m)/(1 - m)$ gekennzeichnet. Im Falle $m = 1$ sind offensichtlich zu den unter 2) genannten Kreisen noch die Geraden der Parallelschar $y = \text{const}$ hinzuzufügen, die durch (9) und (10) wohl noch erfaßt werden, sich jedoch der Darstellung (11) entziehen.

Für *rationales* m treten *rational-algebraische Loxodromen* auf. Schreibt man in diesem Falle $m = \mu/\nu$ als gekürzten Bruch mit positiv-ganzzahligen μ, ν an, so erkennt man nach Einführung des neuen Parameters $t^{1/\nu}$ in (14), daß die Kurve für $m \neq 1$ die *Ordnung*

$$N = \mu + 2\nu \quad (15)$$

hat. Die niedrigsten Werte ergeben sich für $m = 2$ ($N = 4$, kollineare Kardioiden) und $m = 1/2$ ($N = 5$); die zugehörigen Loxodromenformen sind in Abb. 2 wiedergegeben.