

Nicht im Handel!

Sonderabdruck aus Bd. VIII, Heft 2/3, 1954

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

Schriftleiter: Prof. Dr. F. Magyar, Technische Hochschule Wien

Herrn Prof. Dr. F. Magyar zum 60. Geburtstag gewidmet

Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastei 5

Alle Rechte vorbehalten

W. Wunderlich:

Ein merkwürdiges Zwölfstabgetriebe.

Ein merkwürdiges Zwölfstabgetriebe.

Von W. Wunderlich, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Bemerkenswertes Beispiel eines ebenen Gelenksystems, das in gewissen Stellungen verschiedene Freiheitsgrade aufweist.

Summary. Remarkable example of a plane linkage which in certain positions possesses different degrees of freedom.

Résumé. Exemple remarquable d'un système articulé plan, possédant dans certaines positions différents degrés de liberté.

Kuriositäten als Präsente sind seit jeher beliebt gewesen. So sei es denn erlaubt, dem Jubilar einen kuriosen Mechanismus zu überreichen, der in seiner Grundform zwar recht trivial aussieht, jedoch auf Grund vorhandener Verzweigungslagen eine Reihe von überraschenden Metamorphosen gestattet, die sonderbarerweise nicht alle denselben Freiheitsgrad der Beweglichkeit besitzen.

1. Grundform.

Die in Abb. 1 wiedergegebene Grundform des zu betrachtenden ebenen Getriebes — der darstellende Geometer würde sie als „Parallelprojektion eines Würfels“ ansprechen — besteht dem Wesen nach aus zwei kongruenten und gleichgestellten Gelenkparallelogrammen $ABCD$ und $A'B'C'D'$, die in entsprechenden Ecken durch vier parallele Stäbe gleicher Länge gelenkig gekoppelt sind. Das Gelenksystem setzt sich mithin aus zwölf Gliedern zusammen, von welchen je vier gleich sind:

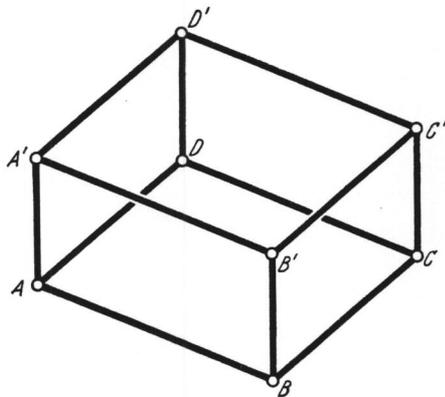


Abb. 1.

$$\left. \begin{aligned} AB = CD = A'B' = C'D' &= a, \\ BC = DA = B'C' = D'A' &= b, \\ AA' = BB' = CC' = DD' &= c. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Es enthält sechs Parallelogramme, die durchaus gleichberechtigt sind.

Die Gestalt des Gelenksystems ist bei willkürlicher Annahme von drei von einem Knoten ausgehenden Stäben — etwa AB , AD und AA' — vollständig bestimmt. Hieraus ist ersichtlich, daß der Mechanismus zwei Freiheitsgrade besitzt; seine Beweglichkeit hängt ja von zwei Parametern ab — etwa den Winkeln BAD und DAA' . Diese Tatsache ist eine durch die speziellen Abmessungen bedingte Besonderheit, da ein allgemeineres Zwölfstabgetriebe, dessen Glieder beliebig vorgeschriebene Längen haben, nur den Freiheitsgrad eins aufweisen wird¹.

Unser Gelenksystem besitzt nun gewisse Verzweigungslagen, in welchen sämtliche Stäbe (besser gesagt, deren Mittellinien) in eine Gerade fallen. Es ist geläufig, daß ein gelenkiges Parallelogramm beim Durchgang durch eine Verzweigungslage

¹ Die Lage eines Einzelgliedes hängt in der Ebene von 3 Parametern ab und die gelenkige Verbindung zweier Glieder bedeutet 2 Bedingungen; ein gemeinsames Gelenk dreier Glieder ist zwei Einzelgelenken äquivalent, entspricht also 4 Bedingungen. Die Lageveränderung des genannten Zwölfstabgetriebes mit acht dreifachen Knoten hängt mithin von $12 \cdot 3 - 8 \cdot 4 = 4$ Parametern ab; wird dabei ein Glied festgehalten, so reduziert sich die Bewegungsfreiheit um 3 auf 1.

zu einem überschlagenen Viereck, einem sogenannten „Antiparallelogramm“ werden kann. Es darf mithin erwartet werden, daß auch bei unserem Zwölfstab-system einige der sechs Parallelogramme beim Durchgang durch eine Verzweigungs-lage in Antiparallelogramme verwandelt werden können. Dies ist nun tatsächlich der Fall, und die vier Nebenformen, die auf diese Weise entstehen, sollen im folgenden aufgezeigt werden. Sie sind, mit Ausnahme der ersten, keineswegs trivial.

2. Erste Nebenform: Zwei Antiparallelogramme.

Die Möglichkeit des Auftretens eines einzigen Antiparallelogramms scheidet von vornherein aus, da fünf vorhandene Parallelogramme zwangsläufig das sechste bedingen. Auch die Annahme zweier „benachbarter“ Antiparallelogramme ist ausgeschlossen, da die Anordnung der vier Restparallelogramme zwangsläufig auf die Grundform I führt.

Es kommen somit nur zwei „gegenüberliegende“ Antiparallelogramme in Frage. Abb. 2 zeigt eine derartige Anordnung, bei welcher die beiden kongruenten und gleichgestellten Antiparallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ durch vier gleichartige und parallele Stäbe in entsprechenden Punkten gekoppelt sind. Mit Rücksicht auf die einparametrische Veränderlichkeit der Antiparallelogramme und die einparametrische Richtungsänderung der Koppelstäbe liegt wiederum ein System mit zwei Freiheitsgraden vor. Ihm zur Seite treten noch zwei analoge Anordnungen, bei welchen die Vierecke $ABB'A'$ und $DCC'D'$ oder $ADD'A'$ und $BCC'B'$ verschränkt sind.

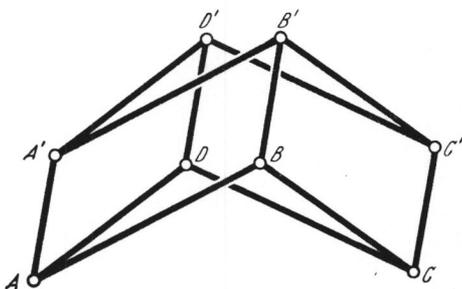


Abb. 2.

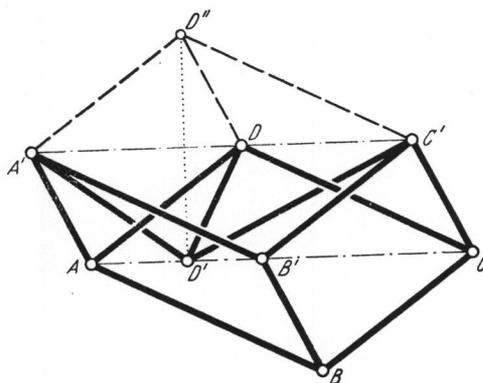


Abb. 3.

3. Zweite Nebenform: Drei Antiparallelogramme.

Bei der Prüfung der Möglichkeit des Auftretens von drei Antiparallelo-grammen lehrt die Betrachtung der drei Restparallelogramme, daß dieselben einen gemeinsamen Knoten besitzen müssen; andernfalls zieht nämlich die Existenz dreier Parallelogramme noch die eines vierten nach sich.

Sei also $ABCD A' B' C' D'$ das fragliche System, das drei Parallelogramme $ABCD$, $ABB'A'$ und $BCC'B'$ (mit dem gemeinsamen Knoten B) enthält; bezeichne ferner D'' den fehlenden Knoten, der die drei Parallelogramme zur Grundform I ergänzt würde (Abb. 3). Zunächst ist festzustellen, daß die Knoten A' , C' und D auf einer Geraden liegen, da jeder von ihnen von D' und D'' gleiche Abstände hat; aus Symmetriegründen liegen dann auch die Knoten C , A und B' in einer Linie.

Damit ist nun die Existenz der fraglichen Nebenform gesichert: Ausgehend von einer Grundform, die durch die Bedingung eingeschränkt ist, daß die drei Knoten A , B' und C auf einer Geraden liegen müssen, erhält man sie dadurch, daß man die Stäbe $A'D''$, DD'' und $C'D''$ an der Geraden $A'DC'$ spiegelt (Abb. 3); der hierbei

5. Vierte Nebenform: Sechs Antiparallelogramme.

Die Frage nach der Möglichkeit des Auftretens von sechs Antiparallelogrammen soll durch direkte Konstruktion entschieden werden.

Seien etwa die drei vom Gelenk A ausgehenden Stäbe $AB = a$, $AD = b$ und $AA' = c$ willkürlich vorgegeben. Zur zahlenmäßigen Erfassung des Konstruktionsvorganges mag ein Polarkoordinatensystem eingeführt werden, dessen Ursprung O im Umkreiszentrum des Dreiecks BDA' liegt² und dessen Nullstrahl durch A geht. Setzt man $OA = r$, $OA' = OB = OD = r'$, und sind α, β, γ die Winkel, unter welchen die drei gegebenen Strecken a, b, c von O aus erscheinen (Abb. 5), so werden die gegebenen Knoten festgelegt durch

$$A(r, 0), B(r', \alpha), D(r', \beta), A'(r', \gamma). \quad (6)$$

Die von je zweien der angenommenen Stäbe aufgespannten Antiparallelogramme $ADD'A'$, $AA'B'B$ und $ABCD$ sind eindeutig bestimmt und konstruierbar und liefern drei weitere Knoten, deren Koordinaten sich aus Symmetriegründen berechnen zu

$$D'(r, \beta + \gamma), B'(r, \gamma + \alpha), C(r, \alpha + \beta). \quad (7)$$

Fortsetzung der Konstruktion liefert, gleichzeitig welches der drei restlichen Antiparallelogramme ergänzt wird, und wieder unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften, in jedem Falle den fehlenden Knoten an derselben Stelle

$$C'(r', \alpha + \beta + \gamma). \quad (8)$$

Damit ist die Existenz der vierten Nebenform nachgewiesen und gleichzeitig ihr Freiheitsgrad mit zwei erkannt; nebenbei hat sich herausgestellt, daß sich die Knotenquadrupel $AB'CD'$ und $A'BC'D$ auf zwei (veränderliche) konzentrische Kreise verteilen. Dieser eigenartige Mechanismus, bei welchem — im Gegensatz zur Grundform I — gleichartige Vierecke im allgemeinen nicht kongruent sind, wurde um die Jahrhundertwende erstmalig von C. A. Dixon angegeben³.

Aus der durchgeführten Konstruktion geht gleichzeitig hervor, daß eine Nebenform mit bloß fünf Antiparallelogrammen nicht existiert, da sich das sechste zwangsläufig einstellt.

6. Schlußwort.

Die durchgeführte vollständige Analyse des vorliegenden Zwölfstabgetriebes hat ergeben, daß neben der aus sechs Gelenkparallelogrammen bestehenden Grundform I noch vier Nebenformen II bis V existieren, bei welchen zwei, drei, vier oder sechs der Parallelogramme über eine Verzweigungslage zu Antiparallelogrammen geworden sind. Die nachstehende Zusammenstellung gibt in Tabellenform einen Überblick über die verschiedenen Formen und ihre Untertypen, wobei die Parallelogramme durch „+“, die Antiparallelogramme durch „-“ verzeichnet sind.

Es ist wohlbekannt, daß der Freiheitsgrad eines Gelenkmechanismus keineswegs durch die Anzahl der Glieder und Gelenke vollkommen bestimmt ist, sondern daß

² Der Ausnahmefall, das B, D, A' auf einer Geraden liegen, verlangt eine leicht modifizierte Behandlung.

³ C. A. Dixon: On certain deformable frameworks. *Mess. Math.* 29, 1—21 (1899/1900). — Der Mechanismus wird ferner ausführlich beschrieben bei G. T. Bennett: The skew isogram mechanism. *Proc. London Math. Soc.* 13, 151—173 (1914). — Ferner bei R. Bricard: *Leçons de cinématique*, Bd. II, S. 286ff. Paris. 1927.

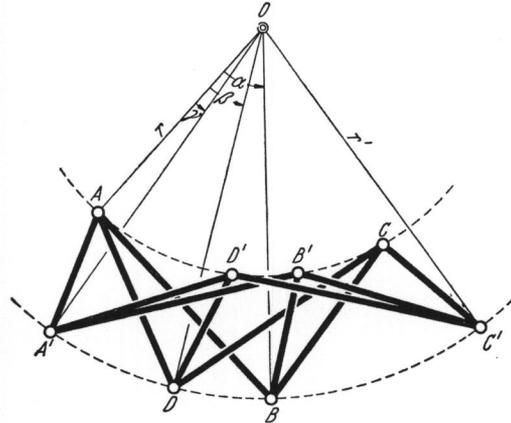


Abb. 5.

auch die Abmessungen der Glieder und die Anordnung der Gelenke eine Rolle spielen, insofern als spezielle Abmessungen unter Umständen eine Erhöhung des Freiheitsgrades mit sich bringen können. Die überraschende Lehre des vorliegenden Beispiels

Typ	Gelenkvierecke			Freiheitsgrad
	(b, c)	(c, a)	(a, b)	
I	++	++	++	2
II a	--	++	++	2
b	++	--	++	2
c	++	++	--	2
III	+ -	+ -	+ -	1
IV a	++	--	--	1
b	--	++	--	1
c	--	--	++	1
V	--	--	--	2

liegt nun in der Erkenntnis, daß nicht bloß Anzahl und Abmessungen der Glieder und Anzahl und Anordnung der Gelenke — die ja für alle fünf Typen gleich sind — maßgebend sind, sondern daß auch die gegenseitige Lage der Glieder, also die Situation des Getriebes von Einfluß sein kann.

Eine abschließende Bemerkung über die Realisierung des betrachteten Gelenksystems ist nicht ganz überflüssig: Versucht man, das Zwölfstabgetriebe in seiner Grundform etwa aus Metallamellen und mittels Hohnieten

zusammenzufügen, so gewinnt man bald die Überzeugung, daß es keine Schichtung der Glieder gibt, die die tatsächliche Erreichung der besagten Verzweigungslage zuläßt, in welcher alle Stäbe übereinander zu liegen kommen; irgendwelche Stäbe werden einander nämlich stets behindern. Ein trotz dieser Bedenken hergestelltes Modell zeigte jedoch ganz unerwartet, daß der Übergang von der Grundform zu sämtlichen vier Nebenformen praktisch ohne Schwierigkeiten ausführbar war: Dies liegt daran, daß ein ganz geringes Spiel bzw. die Elastizität der Glieder schon knapp vor der Verzweigungslage ein Parallelogramm zum Antiparallelogramm durchzudrücken erlauben. Auf diese Weise mag ein solches Modell als amüsantes Vexiergebilde mit tieferem Sinne dienen.

(Eingegangen am 5. März 1954.)