

Beitrag zur Kenntnis der Minimalspiralflächen

Von WALTER WUNDERLICH (in Wien)

Jene *Minimalflächen*, welche gleichzeitig *Spiralflächen* sind — also eine kontinuierliche Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen gestatten — werden gelegentlich bei S. LIE⁽¹⁾ und auch bei G. DARBOUX⁽²⁾ erwähnt, eine explizite Darstellung der genannten Flächen und nähere Kenntnisse über ihr Aussehen scheinen jedoch noch zu fehlen.

Die vorliegende Mitteilung will die bestehende Lücke ausfüllen und gleichzeitig einen einfachen, rein geometrischen Zugang zu den Minimalspiralflächen aufzeigen, der sich wesentlich auf die LIESche Auffassung der Minimalflächen als *Schiebflächen mit isotropen Erzeugenden* stützt. Diese Behandlungsweise wurde bereits beim vorangegangenen Studium der *Minimalschraubflächen* angewendet⁽³⁾ und wird hier zunächst die allgemeinere Frage nach den *Spiralschiebflächen* erledigen, die anscheinend überhaupt noch nicht betrachtet worden sind.

§ 1. Nach S. LIE kann bekanntlich jede *Minimalfläche* durch Verschiebung einer Minimalkurve längs einer anderen erzeugt wer-

⁽¹⁾ S. LIE: *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen II*. Math. Ann. 15 (1879), 504. Die fraglichen Minimalflächen werden hier durch die Eigenschaft charakterisiert, eine vorgelegte logarithmische Spirale zur Krümmungslinie zu haben.

⁽²⁾ G. DARBOUX: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, I (Paris 1887), 308. Für die Minimalspiralflächen wird die WEIERSTRASSsche Funktion mit $F(s) = C \cdot s^{p-2}$ angegeben.

⁽³⁾ W. WUNDERLICH: *Beitrag zur Kenntnis der Minimalschraubflächen*. Comp. Math. 10 (1952), 297-311.

den; reelle Flächen — und nur solchen gilt hier unser Interesse — kommen dabei im wesentlichen dann zustande, wenn die beiden erzeugenden Minimalkurven in einer Ausgangslage konjugiert-imaginär sind. Wie auf jeder Schiebfläche bilden auch hier die Erzeugenden ein im Sinne der Flächentheorie konjugiertes Netz.

Die dem Begriff der *Spiralfläche* zugrundeliegende eingliedrige Gruppe besteht aus ∞^1 räumlichen Ähnlichkeitstransformationen S , die eine bestimmte Achse z und auf dieser einen eigentlichen Punkt O festlassen; jede dieser Transformationen S setzt sich zusammen aus einer Drehung um z und einer zentrischen Ähnlichkeit von O aus, wobei der Drehwinkel ω und der Ähnlichkeitsfaktor μ vermöge $\mu = e^{p\omega}$ zusammenhängen. Die Bahnkurven dieser als «*Spiralung*» bezeichneten Ähnlichkeitsgruppe sind die wohlbekannten «*zylindrokonischen Spiralen*»; sie verlaufen auf den offensichtlich invarianten Drehkegeln mit der Achse z , die ihre Spitze in O haben, und durchsetzen deren Erzeugenden unter jeweils konstanten Winkeln; ihre Normalprojektion auf die ebenfalls invariante Ebene, die z in O senkrecht schneidet, fällt mit den Bahnkurven in dieser Fixebene zusammen, und das sind logarithmische Spiralen, die die von O ausgehenden Strahlen unter dem festen Winkel $\alpha = \operatorname{arccot} p$ schneiden. ⁽⁴⁾ — Eine Spiralfläche entsteht durch Anwendung der Ähnlichkeitsgruppe auf eine vorgelegte (nicht invariante) Linie l ; sie trägt die aufeinanderfolgenden, zu einander ähnlichen Lagen der Erzeugenden l sowie die Bahnschrauben der einzelnen Punkte von l . Es ist klar, dass das Netz der Minimalkurven einer Spiralfläche bei der Spiralung in sich übergeht.

Sei nun ϕ eine reelle *Minimalspiralfläche*, deren Fixpunkt O , Achse z und Modul p mithin reell sind. Seien ferner l_0 und l_1 zwei *Minimalkurven* der gleichen Schar. Da ϕ Spiralfläche ist, so existiert in der erzeugenden Gruppe eine gewisse Ähnlichkeitstransformation S , die l_0 in l_1 überführt; da ϕ andererseits Minimalfläche ist, so existiert auch eine gewisse Translation T , die l_0 nach l_1 bringt. Aus $l_1 = S.l_0$ und $l_1 = T.l_0$ folgt nun $l_0 = T^{-1}S.l_0$, d. h. es gibt eine gewisse Ähnlichkeit $U = T^{-1}S$, die l_0 in sich transformiert. U ist offenbar eine Spiraltransformation mit zu z paralleler Achse, die denselben Drehwinkel ω und denselben Streckungsfaktor μ auf-

⁽⁴⁾ S. LIE — G. SCHEFFERS: *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* (Leipzig 1891), 243 ff. — *Enz. Math. Wiss.* III D, 252 f. u. 287 ff. — G. LORIA: *Curve sghembe speciali*, II (Bologna 1925), § 4.

weist wie S , also auch denselben Modul p besitzt. Die Erzeugende l_0 verträgt natürlich nicht nur die Ähnlichkeit U , sondern die ganze, durch Wiederholung und Umkehrung entstehende diskontinuierliche Gruppe U^n (n ganz). Lässt man schliesslich l_1 im Rahmen der Minimalkurvenschar gegen das festgehaltene Individuum l_0 rücken, so unterscheidet sich U immer weniger von der Identität und U^n wird zu einer kontinuierlichen Spirallung, die l_0 in sich überführt: Die Minimalkurve l_0 — und ebenso jede ihrer Neulagen l — ist demnach eine *zylindrokonische Spirale* mit z -paralleler Achse und dem Modul p .

Gleiches gilt auch für die zweite, zur ersten konjugierte Minimalkurvenschar $\bar{l}$.

§ 2. Umgekehrt sieht man, dass bei Anwendung einer kontinuierlichen Spirallung auf eine achsenparallele zylindrokonische (im Grenzfall logarithmische) Spirale l gleichen Moduls stets eine *Spiralschiebfläche* entsteht. Die Schiebkurven der ersten Schar werden von den aufeinanderfolgenden Lagen der erzeugenden Spirale l gebildet, die Schiebkurven der zweiten Schar sind kongruent zur Bahnspirale des asymptotischen Punktes von l . Demnach erzeugt auch anderseits eine zylindrokonische Spirale l , die mit ihrem asymptotischen Punkt längs einer achsenparallelen Spirale gleichen Moduls verschoben wird, stets eine Spiralfäche.

Unter diesen Umständen lässt sich eine *Parameterdarstellung* dieser Flächen unmittelbar hinschreiben:

(1)

$$\begin{aligned} x &= a e^{p\omega} \cos \omega + \bar{a} e^{p\bar{\omega}} \cos \bar{\omega} \\ y &= a e^{p\omega} \sin \omega + \bar{a} e^{p\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} \\ z &= b e^{p\omega} + \bar{b} e^{p\bar{\omega}}. \end{aligned}$$

Fixpunkt ist dabei der Ursprung und Spiralachse ist die z -Achse des verwendeten kartesischen Koordinatensystems. Die Schiebkurven sind mit den Parameterlinien $\omega = \text{const}$ bzw. $\bar{\omega} = \text{const}$ identisch, die Bahnspiralen ergeben sich für $\omega - \bar{\omega} = \text{const}$.

Nimmt man die willkürlich vorgebbaren Konstantenpaare a, b und $\bar{a}, \bar{b}$ konjugiert-komplex an, so erhält man für konjugiert-komplexe Parameterwerte $\omega, \bar{\omega}$ den reellen Mantel einer Spiralschiebfläche mit imaginären Schiebkurven. Sorgt man überdies dafür, dass

diese Schiebkurven *isotrop* ausfallen, was für

$$x_{\omega}^2 + y_{\omega}^2 + z_{\omega}^2 = (a^2 + a^2 p^2 + b^2 p^2) e^{2p\omega} = 0,$$

also

$$(2) \quad a = \pm b i \cos \alpha \quad \text{mit } \cot \alpha = p$$

eintritt, dann stellt das Gleichungssystem (1) eine *Minimalspiralfläche* dar. Durch Aufspaltung der komplexen Grössen in Real- und Imaginärteil kann man so zu einer reellen Parameterdarstellung gelangen. Im folgenden soll jedoch ein etwas anderer Weg eingeschlagen werden, der den Zusammenhang mit den klassischen Formeln aus der Theorie der Minimalflächen stärker hervortreten lässt.

§ 3. Zunächst mögen einige allgemeine Formeln aus der Minimalflächentheorie bereitgestellt werden, für die gleichzeitig eine Ableitung angedeutet wird, welche die geometrischen Hintergründe mehr als sonst üblich betont. In bekannter Weise wird dabei an Stelle der Verschiebung einer Minimalkurve längs einer anderen der Ort des Mittelpunktes Q einer Strecke betrachtet, deren Endpunkte $P, \bar{P}$ unabhängig voneinander zwei feste Minimalkurven $l, \bar{l}$ durchlaufen: Die auftretende Ortsfläche ϕ ist offenbar eine Schiebfläche, deren Schiebkurven vom Punkt Q beschrieben werden, wenn entweder P oder $\bar{P}$ fest bleibt; dieselben sind zu l bzw. $\bar{l}$ zentrisch-ähnlich im Verhältnis 1:2, also Minimalkurven wie diese, sodass ϕ sicherlich eine Minimalfläche ist. Deren reelle Punkte ergeben sich, wenn P und $\bar{P}$ konjugiert-imaginäre Lagen einnehmen.

Eine *Minimalkurve* ist eine Kurve, deren Tangenten den absoluten Kegelschnitt des euklidischen Raumes treffen. Die Tangentenfläche kann mithin als Einhüllende einer einparametrischen Schar von Minimalebenen

$$(3) \quad x \sin \omega - y \cos \omega + z i = f(\omega)$$

angesetzt werden; als Parameter fungiert dabei der Richtungswinkel ω der Spur $z = 0$ gegen die x -Achse⁽⁵⁾. Die zugehörige Minimalkurve l ergibt sich dann als Gratlinie der Minimaltorse (3) durch

⁽⁵⁾ Der in Fussnote 2 auftretende WEIERSTRASSsche Parameter s ist mit $e^{i\omega}$ identisch.

Auflösung des linearen Gleichungssystems, das aus (3) und den beiden ersten Ableitungen nach ω besteht, in der integralfreien Form

$$(4) \quad x = f' \cos \omega - f'' \sin \omega, \quad y = f' \sin \omega + f'' \cos \omega, \quad z = -i(f + f'').$$

In der Tat ist $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$, und entsprechendes gilt für die konjugiert-imaginäre Linie $\bar{l}$.

Die als Sehnenmittenfläche des Kurvenpaares $l, \bar{l}$ erklärte *Minimalfläche* Φ stellt sich dann einfach dar durch

$$(5) \quad X = \frac{1}{2}(x + \bar{x}), \quad Y = \frac{1}{2}(y + \bar{y}), \quad Z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),$$

wobei die in $x, \bar{x}, \dots$ steckenden Parameter $\omega, \bar{\omega}$ als voneinander unabhängige Flächenkoordinaten anzusehen sind. Die Linien $\omega = \text{const}$ und $\bar{\omega} = \text{const}$ sind die Minimalkurven der Fläche.

Die *Flächennormale* im Punkt $(\omega, \bar{\omega})$ ist senkrecht zu den Fortschreitungsrichtungen

$$\begin{aligned} dx : dy : dz &= \sin \omega : -\cos \omega : i & \text{und} \\ d\bar{x} : d\bar{y} : d\bar{z} &= \sin \bar{\omega} : -\cos \bar{\omega} : -i, \end{aligned}$$

hat also die Richtung

$$\begin{aligned} i(\cos \omega + \cos \bar{\omega}) : i(\sin \omega + \sin \bar{\omega}) : -\sin(\omega - \bar{\omega}) = \\ = \cos \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega}) : \sin \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega}) : i \sin \frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega}) \end{aligned}$$

und kann somit repräsentiert werden durch den Einheitsvektor

$$(6) \quad X^* = \frac{\cos \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega})}{\cos \frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega})}, \quad Y^* = \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega})}{\cos \frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega})}, \quad Z^* = i \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega}).$$

Deuten wir X^*, Y^*, Z^* als kartesische Koordinaten eines Punktes Q^* der *Einheitskugel* Φ^* , den wir dem Flächenpunkt $Q(X, Y, Z)$ zuordnen, so haben wir in dem Übergang $Q \rightarrow Q^*$ die durch parallele Normalen vermittelte *sphärische Abbildung* der Fläche Φ im Sinne von GAUSS vor uns. Nach O. BONNET ist diese Abbildung einer Minimalfläche *winkeltreu*, was man geometrisch leicht einsieht,

wenn man sich überlegt, dass den Minimalkurven von ϕ die Minimalerzeugenden der Kugel ϕ^* zugeordnet werden.

Um reelle Flächenpunkte durch reelle Parameter zu kennzeichnen, gehen wir jetzt vermöge

$$(7) \quad \omega = \xi + i\eta, \quad \bar{\omega} = \xi - i\eta$$

zu neuen Flächenkoordinaten ξ, η über. In diesen, bei BONNET etwas künstlich erscheinenden Koordinaten⁽⁶⁾ schreibt sich die sphärische Abbildung nun

$$(8) \quad X^* = \frac{\cos \xi}{\operatorname{ch} \eta}, \quad Y^* = \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta}, \quad Z^* = -\operatorname{th} \eta.$$

Das System der neuen Koordinatenlinien bildet sich offensichtlich auf das geographische Netz der Meridiane und Breitenkreise der Einheitskugel ϕ^* ab, ist also wie dieses *orthogonal*. Auf der Fläche ϕ selbst bedeuten die Linien $\xi = \text{const}$ die Berührungskurven umschriebener z -normaler Zylinder, also *Umrisslinien* für «waagrechte» Blickrichtungen; die Linien $\eta = \text{const}$ stellen hingegen Orte fester Flächenneigung dar, können also als *Isophoten* für lotrecht einfallendes Licht aufgefasst werden. Werden die ξ, η als Normalkoordinaten in einer Ebene Γ gedeutet (GAUSSsche ω -Ebene), so ist damit eine *ebene Abbildung* der Minimalfläche erklärt, die ebenfalls *konform* ist, da den Minimalkurven $\omega = \text{const}$ und $\bar{\omega} = \text{const}$ von ϕ die isotropen Geraden $\xi \pm i\eta = \text{const}$ von Γ zugeordnet sind. Diese Abbildung ist anschaulich als MERCATOR-Karte der Einheitskugel ϕ^* zu deuten.

Mit Hilfe der sphärischen Abbildung lassen sich in einfacher Weise die Differentialgleichungen der *Krümmungslinien* und *Asymptotenlinien* der Fläche ϕ herleiten, indem man ausdrückt, dass die Fortschreitungsrichtungen $dX : dY : dZ$ und $dX^* : dY^* : dZ^*$ zueinander *parallel* bzw. *normal* sind. Man findet so die Bedingungen

$$(9) \quad g \cdot d\omega^2 \mp \bar{g} \cdot d\bar{\omega}^2 = 0, \quad \text{wobei} \quad g(\omega) = f'(\omega) + f'''(\omega).$$

⁽⁶⁾ O. BONNET: *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*. J. math. pures et appl. 5 (1860). Derselben Variablen bedient sich dann auch E. BELTRAMI: *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima*, Mem. Acc. Bologna 7 (1867).

Würde man jetzt noch die naheliegende Substitution

$$w = \int \sqrt{g(\omega)} \cdot d\omega, \quad \bar{w} = \int \sqrt{\bar{g}(\bar{\omega})} \cdot d\bar{\omega}$$

ausführen, die eine konforme Abbildung der ω -Ebene auf eine w -Ebene herstellt, so hätte man in der dadurch erklärten konformen Abbildung der Minimalfläche Φ auf die w -Ebene im wesentlichen die RIEMANNSCHE Abbildung erreicht: Die Krümmungslinien von Φ bilden sich dabei auf das Netz der Achsenparallelen $w \pm \bar{w} = \text{const}$ ab, die Asymptotenlinien auf das zugehörige Diagonalnetz $w \pm \pm i \bar{w} = \text{const}$.

Abschliessend sei noch vermerkt, dass die Multiplikation der Ausgangsfunktion $f(\omega)$ mit einem komplexen Faktor von Einheitsbetrag ($e^{i\lambda}$ bei reellem λ) eine ausgezeichnete Transformation der Minimalfläche Φ bewirkt, bei welcher zufolge (6) die einzelnen Flächenelemente ihre Stellung nicht ändern und die überdies *isometrisch* ist, wie aus der Form des Linienelementes

$$\begin{aligned} ds^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{1}{2} (dx \cdot dx + dy \cdot dy + dz \cdot dz) = \\ &= g \bar{g} \cdot \cos^2 \frac{1}{2} (\omega - \bar{\omega}) \cdot d\omega d\bar{\omega} \end{aligned}$$

zu erkennen ist. Es handelt sich um die bekannte BONNETSche *Biegung*, im Verlaufe welcher — kontinuierliche Änderung von λ angenommen — Φ eine Schar von Minimalflächen durchläuft; sämtliche Flächenpunkte bewegen sich dabei auf Ellipsen um den Ursprung.

§ 4. Um nun zu den *Spiralflächen* unter den Minimalflächen zu gelangen, hat man nach § 1 nur dafür zu sorgen, dass die Grundkurve l in § 3 eine zylindrokonische Spirale ist. Die ihre Tangentenfläche bildende Spiraltorse wird von der Minimalebene (3) dann eingehüllt, wenn diese einer Spirallung unterworfen wird: Unter Verzicht auf überflüssige additive Konstanten kann mithin

$$(10) \quad f(\omega) \equiv c \cdot e^{p\omega}, \quad \bar{f}(\bar{\omega}) \equiv \bar{c} \cdot e^{p\bar{\omega}}$$

gesetzt werden. Die Minimalspirale l schreibt sich dann gemäss (4)

$$(11) \quad \begin{aligned} x &= c p \cdot e^{p\omega} (\cos \omega - p \sin \omega) \\ y &= c p \cdot e^{p\omega} (\sin \omega + p \cos \omega) \\ z &= -c i \cdot e^{p\omega} (1 + p^2). \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir unter Beachtung von $p = \cot \alpha$

$$(12) \quad c = e^{-p\alpha} \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cdot e^{i\lambda},$$

was nur eine Masstabsnormierung bedeutet. Damit erhalten wir für den reellen Mantel unserer Minimalfläche, zufolge (5)

$$\begin{aligned} X &= -\Re [e^{i\lambda+p(\omega-\alpha)} \cdot \sin(\omega - \alpha)] \\ Y &= \Re [e^{i\lambda+p(\omega-\alpha)} \cdot \cos(\omega - \alpha)] \\ Z &= -\Re [e^{i\lambda+p(\omega-\alpha)} \cdot i \sec \alpha]. \end{aligned}$$

Führen wir schliesslich bei der Auswertung in $\omega = \xi + i\eta$ die Hilfsgrösse $\varphi = \xi - \alpha$ ein, so ergibt sich als *reelle Parameterdarstellung der Minimalspiralfläche*

$$(13) \quad \begin{array}{ll} X = e^{p\varphi} (X_0 \cos \varphi - Y_0 \sin \varphi) & X_0 = \operatorname{sh} \eta \cdot \sin(p\eta + \lambda) \\ Y = e^{p\varphi} (X_0 \sin \varphi + Y_0 \cos \varphi) & \text{mit } Y_0 = \operatorname{ch} \eta \cdot \cos(p\eta + \lambda) \\ Z = e^{p\varphi} \cdot Z_0 & Z_0 = \sec \alpha \cdot \sin(p\eta + \lambda). \end{array}$$

Die Parameterlinien $\varphi = \text{const}$ sind wegen $\xi = \varphi + \alpha$ mit den oben erwähnten « Umrisslinien » $\xi = \text{const}$ identisch; sie gehen durch Spiralung ineinander über, sind also untereinander ähnlich und können etwa durch das rechts stehende Prototyp $\varphi = 0$ ($\xi = \alpha$) repräsentiert werden. Zwei charakteristische Formen (für $\lambda = 0$ bzw. $\pi/2$) sind in Fig. 1 wiedergegeben, und zwar in der Lage $\xi = 0$ ($\varphi = -\alpha$), weil diese den Umriss für die Normalprojektion auf die Aufrissebene XZ darstellt. Elimination der Parameter η und λ führt auf die al-

gebraische Identität

$$(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 \cos^2 \alpha) \cdot Z_0^2 \cos^2 \alpha = X_0^2 + Z_0^2 \cos^2 \alpha,$$

aus der zu ersehen ist, dass jede der Umrisslinien auf einer gewissen Fläche 4. Ordnung liegt. Die Parameterlinien $\eta = \text{const}$ sind

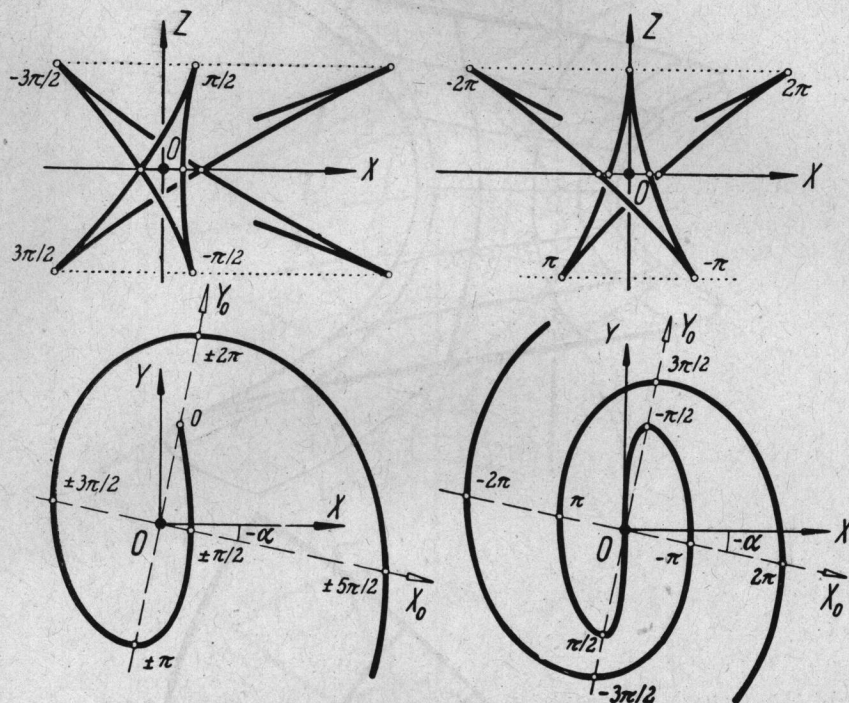


Fig. 1: Umrisslinie $\xi = 0$ ($\varphi = -\alpha$) zweier Minimalspiralflächen vom Modul $p = 5$ (Bezifferung nach $p\eta$)

- a) Plansymmetrischer Typ ($\lambda = 0$);
- b) Achsisymmetrischer Typ ($\lambda = \pi/2$)

die auf der Fläche verlaufenden Bahnspiralen. Fixpunkt der Spirale ist der Ursprung, die Achse fällt mit der Z-Achse zusammen.

§ 5. Verändern wir den Wert des Parameters λ , so durchläuft mit Rücksicht auf (12) unsere Minimalfläche die einzelnen Stationen einer BONNETSchen *Biegungsreihe*, wobei der Spiralmodul p ungeändert bleibt. Zwei typische Formen sind dabei hervorzuheben:

a) $\lambda = 0$: «Plansymmetrischer Typ». Die Fläche ist zur XY -Ebene symmetrisch (vgl. Fig. 1 a u. 2 a). Die Spiegelung wird durch

Vorzeichenwechsel bei η bewirkt. Der entsprechende Typ bei den Minimalschraubflächen ist das Katenoid (Kettendrehfläche).

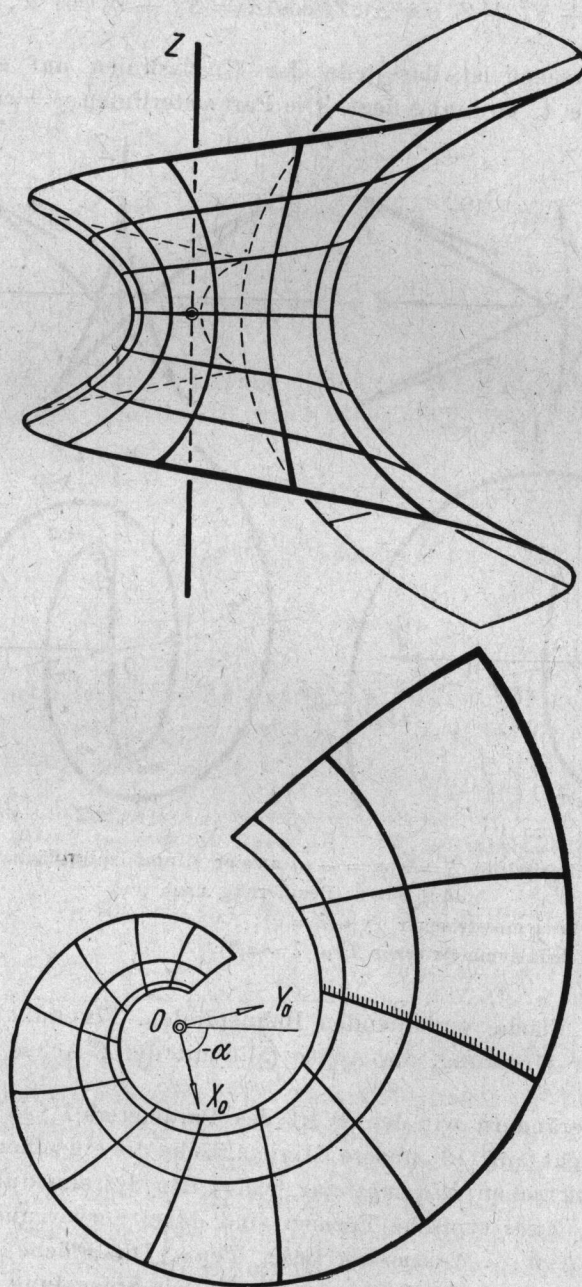


Fig. 2 a: Plansymmetrischer Typ einer Minimalspiralfläche vom Modul $p = 0,268$ ($\alpha = 75^\circ$)

b) $\lambda = \pi/2$: « Achsensymmetrischer Typ ». Die Fläche ist bezüglich der Z-Achse symmetrisch, die ihr angehört (vgl. Fig. 1 b)

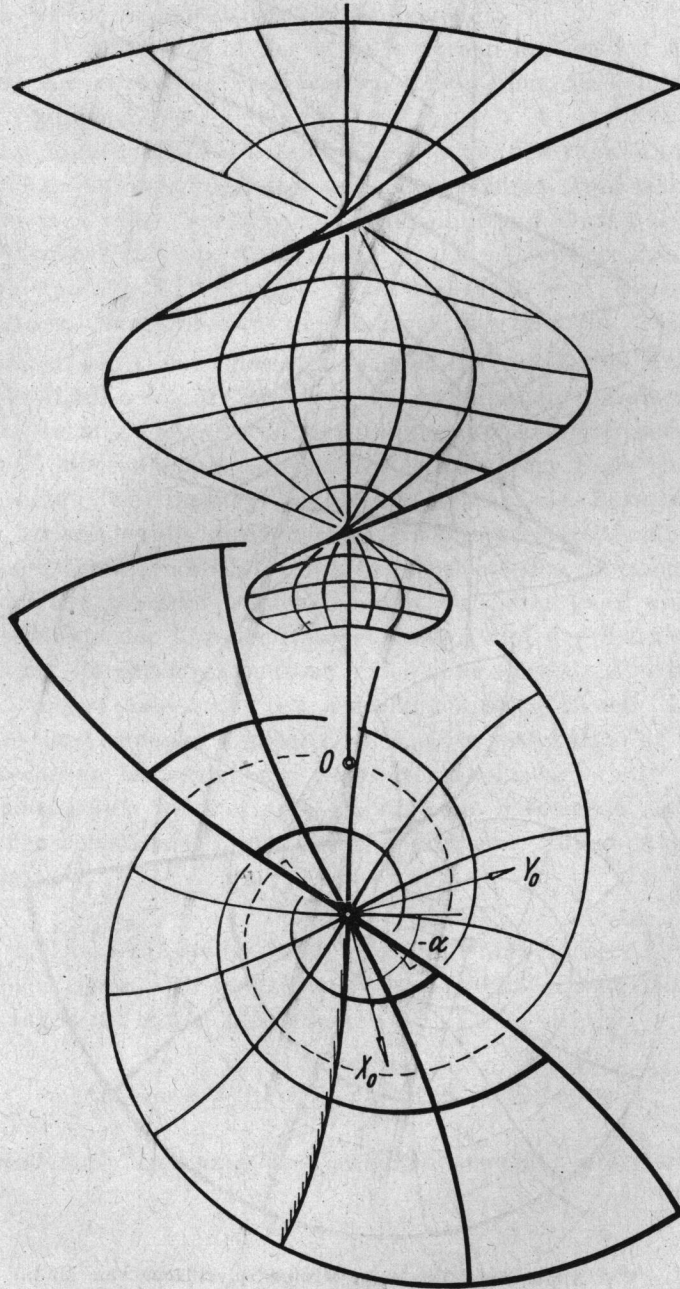


Fig. 2 b: Achsensymmetrischer Typ einer Minimalspiralfläche vom Modul $p = 0,268$ ($\alpha = 75^\circ$).

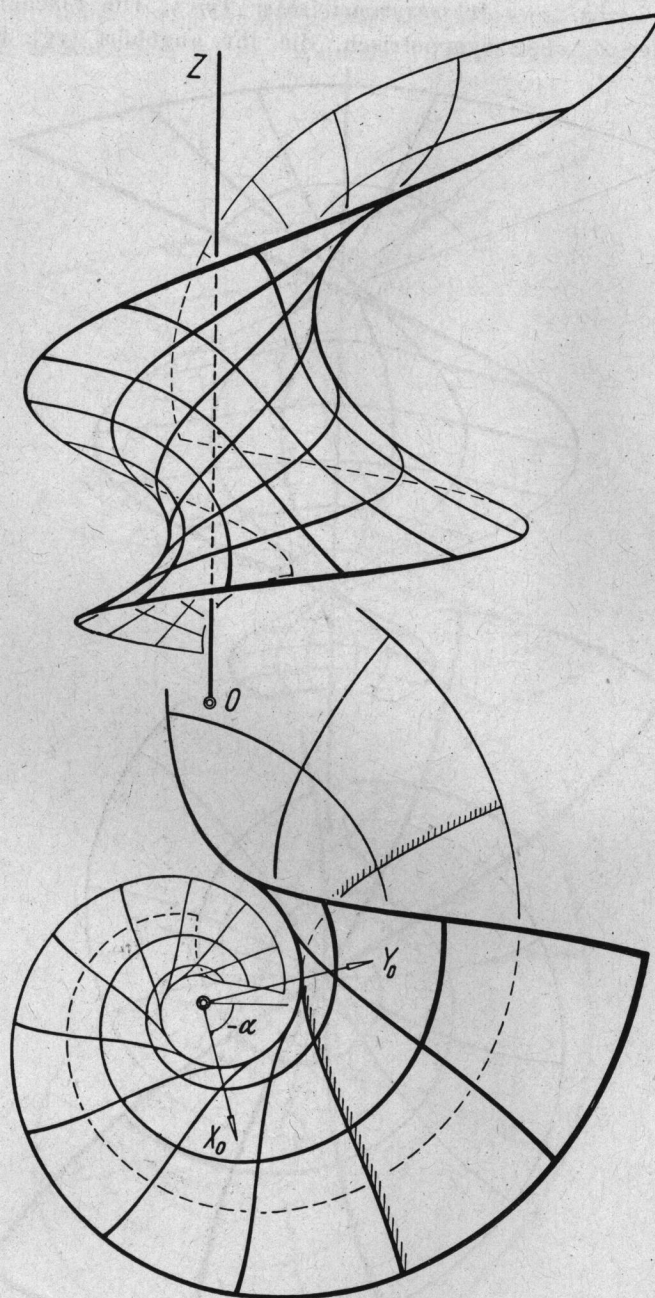


Fig. 2c: Allgemeiner Typ einer Minimalspiralfäche vom Modul $p = 0,268$ ($\alpha = 75^\circ$).

und 2 b). Auch hier wird die Spiegelung durch den Vorzeichenwechsel bei η bewirkt. Der entsprechende Typ bei den Minimalschraubflächen ist die Wendelfläche (Schraubkonoid).

Fig. 2 c stellt die in der Mitte zwischen den beiden Grenzfällen liegende *allgemeine Zwischenform* $\lambda = \pi/4$ dar, die keinerlei Symmetrien aufweist.

Die Figuren 2 a bis c, die Abbildungen in Grund- und Aufriss darstellen, wurden folgendermassen gezeichnet: Zunächst wurden für die im Aufriss massgebende Umrisslinie auf Grund des rechten Formelsystems (13) die Koordinaten X_0, Y_0, Z_0 einiger Punkte ($\eta = n\pi/6$ für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$) berechnet und diese Punkte eingetragen. Anschliessend wurden zwei durchsichtige Pauspapiere vorbereitet, eines mit einer zum vorgeschriebenen Modul $p = 2 - \sqrt{3}$ (Schnittwinkel $\alpha = 75^\circ$) gehörigen logarithmischen Spirale versehen, das andere mit einer regulären Strahlengruppe eines Büschels ($\varphi = n\pi/6$). Diese Pauspapiere wurden mittels einer Nadel mit ihren Nullpunkten im Ursprung des Grundrisses auf das Zeichenblatt geheftet, sodass jeweils durch blosse Drehung gleichzeitig die Spirale und ein Büschelstrahl mit einem der vorhandenen Ausgangspunkte zur Inzidenz gebracht werden konnten. In dieser Lage wurden die Schnittpunkte der übrigen Büschelstrahlen und der Spirale auf die Zeichnung durchgestochen, womit sich ohne störende Konstruktionslinien weitere Lagen des der Spiralung unterworfenen Ausgangspunktes im Grundriss ergaben; im Aufriss war dann nur noch die entsprechende Reduktion der Koten vorzunehmen.

Hinsichtlich weiterer, die darstellende Geometrie der Spiralfächen betreffender Konstruktionen gibt eine frühere Arbeit Aufschluss ⁽⁷⁾.

§ 6. Die Krümmungs- und Asymptotenlinien der Minimalspiralfächen lassen sich explizit angeben. Die bezüglichen Differentialgleichungen (9) lauten hier nämlich

$$\exp(p\omega + i\lambda)d\omega^2 \mp \exp(p\bar{\omega} - i\lambda)d\bar{\omega}^2 = 0$$

und sind nach Trennung der Variablen elementar integrierbar. Man

⁽⁷⁾ W. WUNDERLICH: *Darstellende Geometrie der Spiralfächen*. Mh. Math. Phys. 46 (1938), 248-265.

erhält für die *Krümmungslinien*

$$(14) \quad \exp \frac{1}{2} (p \omega + i \lambda) \pm \exp \frac{1}{2} (p \bar{\omega} - i \lambda) = \text{const},$$

oder in BONNETSchen Koordinaten

$$(15) \quad \frac{1}{2} p \xi + \ln \frac{\cos \frac{1}{2} (p \eta + \lambda)}{\sin \frac{1}{2} (p \eta + \lambda)} = \text{const}.$$

Ähnlich findet man für die *Asymptotenlinien*

$$(16) \quad \exp \frac{1}{2} (p \omega + i \lambda) \pm i \exp \frac{1}{2} (p \bar{\omega} - i \lambda) = \text{const},$$

bzw.

$$(17) \quad \frac{1}{2} p \xi + \ln \frac{\cos \frac{1}{2} (p \eta + \lambda - \frac{\pi}{2})}{\sin \frac{1}{2} (p \eta + \lambda - \frac{\pi}{2})} = \text{const}.$$

Die Bildkurven in der ω -Ebene — der MERCATOR-Karte der sphärischen Abbildung — sind sämtlich untereinander kongruent,

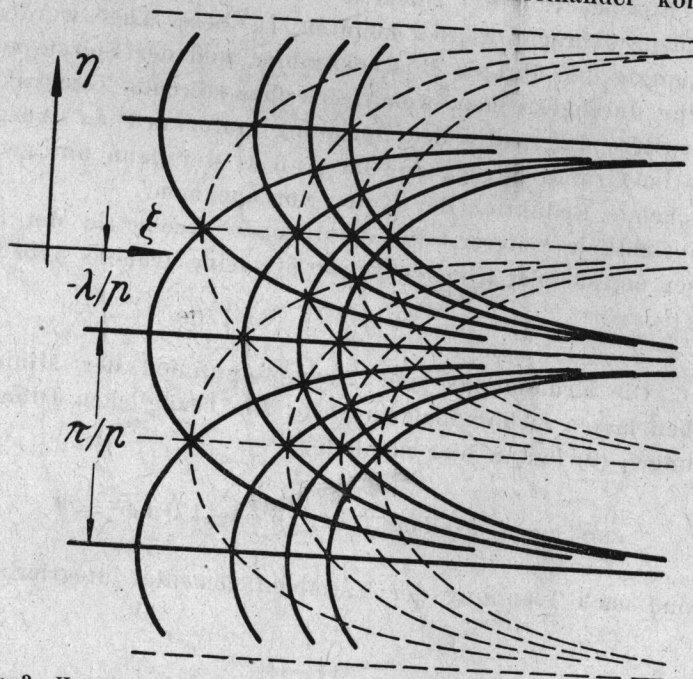


Fig. 3: Krümmungslinien (voll) und Asymptotenlinien (gestrichelt) einer Minimalspiralfäche im BONNETSchen Bild.

wie dies Fig. 3 zeigt.⁽⁸⁾ Man entnimmt aus dieser Darstellung: Die einer Spiralschar angehörnden (untereinander ähnlichen) Krümmungslinien nähern sich asymptotisch zwei Bahnspiralen $p\eta = n\pi - \lambda$; es handelt sich dabei um die in der Fixebene $Z = 0$ liegenden, in Fussnote 1 erwähnten logarithmischen Spiralen der Minimalfläche, die singuläre (ebene) Krümmungslinien abgeben. Ebenso streben die einer Spiralschar angehörnden (untereinander ähnlichen) Asymptotenlinien asymptotisch gegen zwei Bahnspiralen $p\eta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \lambda$; es handelt sich hierbei um jene zylindrokonischen Spiralen, die von den Punkten $Y_0 = 0$ ($Z_0 = \pm \sec \alpha$) beschrieben werden, d. s. jene Punkte, von welchen die Umrisspitzen in Fig. 1 herrühren.

[Entrata in Redazione il 5-V-1954]

⁽⁸⁾ Nach einer Vierteldrehung stellen dieselben Kurven die MERCATOR-Bilder von solchen Kugeln dar, die durch einen Pol gehen.