

# Über ein besonderes Dreiecksnetz aus Kreisen

Von

Walter Wunderlich in Wien

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Oktober 1938)

## Einleitung.

Während die Frage nach allen Dreiecksnetzen aus Geraden von H. Graf und R. Sauer<sup>1</sup> vollständig beantwortet wurde, dahingehend, daß die zum Aufbau des Netzes verwendeten Geraden sämtlich Tangenten einer Kurve 3. Klasse darstellen (wobei alle Ausartungen derselben zugelassen sind), ist die entsprechende Frage nach allen Dreiecksnetzen aus Kreisen noch nicht erledigt. Eine Teillösung des Problems, nämlich alle Dreiecksnetze aus Kreisen eines Bündels, hat zuerst O. Volk<sup>2</sup> gefunden; K. Strubecker<sup>3</sup> wies dann auf einen überaus einfachen geometrischen Zusammenhang zwischen den Geradenetzen und den Volk'schen Kreisnetzen hin: Durch Zentralprojektion eines Geradenetzes auf eine Kugel und stereographische Rückprojektion auf eine Ebene kann jedes Dreiecksnetz aus Bündelkreisen hergestellt werden.

Mit diesen in Bündeln enthaltenen Kreisnetzen ist aber deren Gesamtheit nicht erschöpft, wie einfache Beispiele anderer Kreisnetze lehren. So läßt sich etwa zeigen:

1. *Zwei konjugierte Kreisbüschel bilden zusammen mit einem dritten Büschel, das von zweien ihrer Kreise aufgespannt wird, ein Dreiecksnetz.*<sup>4</sup>

Oder:

2. *Die drei Kreisbüschel über drei Grundpunkten bilden ein Dreiecksnetz.*<sup>5</sup>

<sup>1</sup> H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradenetze in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden. Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss., München 1924.

<sup>2</sup> O. Volk, Über spezielle Kreisnetze. Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss., München 1929.

<sup>3</sup> K. Strubecker, Über eine Klasse spezieller Dreiecksnetze aus Kreisen. Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 39 (1932), p. 395—398. — Vgl. auch R. Sauer und O. Baier, Über besondere Dreiecksnetze aus Kegelschnitten. Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver., Bd. 43 (1934).

<sup>4</sup> Durch Inversion lassen sich die drei Büschel auf die einfachen Formen  $r = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ ,  $(r^2 - a^2)/r \cos \varphi = \text{const}$  (Polarkoordinaten!) bringen, in welcher Gestalt die Netzbildung unmittelbar ersichtlich ist.

<sup>5</sup> W. Wunderlich, Kinematische Erzeugung eines Dreiecksnetzes aus Trochoiden. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 18 (1938), p. 195 (Fußnote). — Vgl. auch diese Arbeit, p. 399.

Schließlich als drittes Beispiel, das noch durch Inversion verallgemeinert werden kann:

3. Die aus zwei Kreisen (Gerade als Ausartung inbegriffen) durch Ausübung einer eingliedrigten Schiebungs-, Streckungs- oder Drehungsgruppe hervorgegangenen Kreisscharen bilden zusammen mit den Bahnkurven der Gruppe ein Dreiecksnetz.

Nach S. Lie kann ja jede eingliedrige kontinuierliche Transformationsgruppe durch Einführung neuer Koordinaten topologisch in die Schiebungsgruppe  $x = x_0 + t, y = y_0$  übergeführt werden. Aus zwei erzeugenden Kurven  $x_0 = \varphi(y_0)$  und  $x_0 = \psi(y_0)$  gehen dann die Kurvenscharen  $x - \varphi(y) = \text{const}$  und  $x - \psi(y) = \text{const}$  hervor, die sichtlich mit der Schar der Bahnlinien  $y = \text{const}$  ein Dreiecksnetz bilden.

In der vorliegenden Arbeit wird nun durch Anwendung der Netzprojektion<sup>6</sup> ein bemerkenswertes Dreiecksnetz aus Kreisen hergeleitet und näher untersucht; es werden auch die stereographische Projektion und die Zyklographie herangezogen, die einen tieferen Einblick in die Bauart und die Eigenschaften des Netzes gestatten.

### § 1. Herleitung des Dreiecksnetzes.

Wir betrachten ein einschaliges Hyperboloid  $\Phi$ . Das Ebenenbündel durch zwei getrennte Punkte  $I_1, I_2$  der Oberfläche (die nicht auf einer Erzeugenden liegen sollen) schneidet aus der Fläche ein Kegelschnittsbündel heraus, das zusammen mit den beiden Erzeugendenscharen ein Dreiecksnetz auf  $\Phi$  bildet.<sup>7</sup> Um dies einzusehen, projizieren wir aus  $I_1$  auf eine Ebene, wo wir drei Strahlbündel erhalten.

Denken wir uns nun  $I_1, I_2$  in die absoluten Kreispunkte der waagrechtten Stellung verlegt und projizieren wir die Punkte von  $\Phi$  mittels der Strahlen eines Drehnetzes mit lotrechttem Hauptstrahl auf eine waagrechtte Bildebene  $\Pi$ , so erhalten wir hier das angekündigte Dreiecksnetz aus Kreisen, da die Netzprojektion bekanntlich Gerade als Kreise abbildet und Gebilde in waagrechtten Ebenen bloß ähnlich verändert.

Durch eine geeignete Raumkollineation läßt sich die gegenseitige Lage von  $\Phi, \Pi$  und dem Drehnetz vereinfachen. Zunächst bedenken wir, daß eine Parallelverschiebung der Bildebene  $\Pi$  nur eine ähnliche Veränderung des Bildfeldes zur Folge hat; wir entscheiden uns daher für eine der beiden Ebenen  $\Pi$  und  $\Pi'$ , welche sowohl die horizontalen Tangentialebenen von  $\Phi$  als auch die Horizontalebenen durch die Brennlinien des Netzes harmonisch trennen. Sie sind stets reell, da die genannten Ebenenpaare konjugiert komplex sind. Nun üben

<sup>6</sup> Siehe etwa L. Eckhart, Konstruktive Abbildungsverfahren. Wien 1926, p. 38 ff.

<sup>7</sup> Dieses Dreiecksnetz verwendet K. Strubecker zur Lösung der Aufgabe 122 im Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver., Bd. 43 (1934), p. 29.

wir eine perspektive Kollineation mit  $\Pi$  als Kollineations- und  $\Pi'$  als Verschwindungsebene aus, deren Zentrum einer der beiden Punkte ist, aus denen der Kreis  $[\Phi \Pi']$  durch einen Drehkegel mit rechtem Öffnungswinkel projiziert wird. Hierbei bleibt das Kreisnetz in  $\Pi$  punktweise fest, das Strahlnetz bleibt weiterhin Drehnetz, hat aber jetzt  $\Pi$  zur Mittelebene und  $\Phi$  wird schließlich zu einem gleichseitigen Drehhyperboloid mit der Kehlkreisebene  $\Pi$ .

Der Rechnung, die unsere vorwiegend geometrischen Überlegungen begleiten soll, legen wir ein rechtwinkliges Koordinaten-

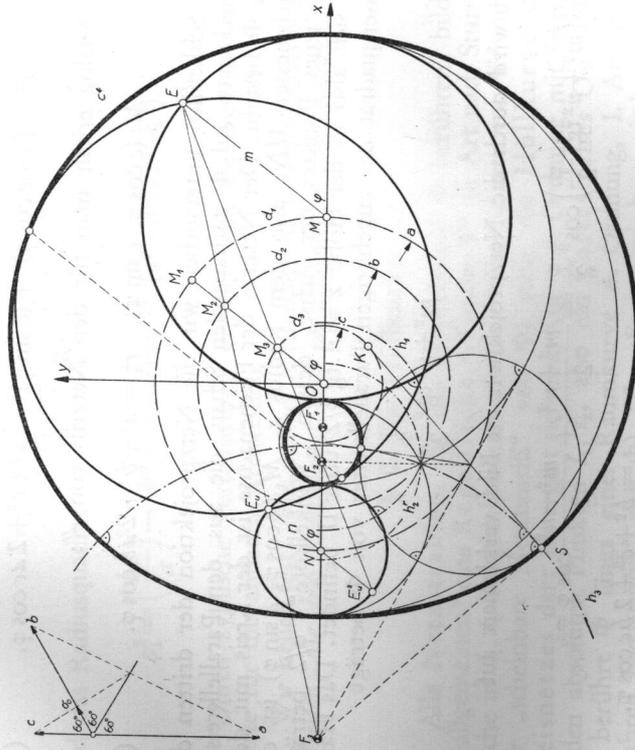


Fig. 1.

system  $x, y, z$  zugrunde, dessen  $xy$ -Ebene mit  $\Pi$  zusammenfalle.  $x$ -Achse sei die Verbindung der Mittelpunkte  $M, N$  des Hyperboloids und des Drehnetzes; der Ursprung  $O$  liege in der Mitte der Strecke  $MN$  (Fig. 1). Die Länge der Strecke  $OM = NO$  bezeichnen wir mit  $a$ , den Radius des Hyperboloids mit  $m$ . Das Drehnetz setzen wir etwa als Linksnetz voraus, dessen hochkomplexe Brennlinien in den Ebenen  $z = \pm ni$  und  $x + a = \pm yi$  liegen.

Es empfiehlt sich noch die Einführung der Abkürzungen

$$\frac{m+n}{2} = b, \quad \frac{m-n}{2} = c. \quad (1)$$

Der Kehlkreis von  $\Phi$  fällt mit seinem Netzriß zusammen, der Fernkreis hingegen bildet sich auf einen Kreis um  $N$  mit dem Halb-

messer  $n$  ab. Durch einen Kehlkreispunkt  $E(a+m \cos \varphi, m \sin \varphi)$  gehen eine linke Erzeugende  $e'$  und eine rechte Erzeugende  $e''$ . Ihre Fernpunkte haben die Netzrisse  $E''_n(-a+n \cos \varphi, n \sin \varphi)$ , bzw.  $E''_n(-a-n \cos \varphi, -n \sin \varphi)$ .

Der Netzriß von  $e'$  ist dann bekanntlich ein Kreis mit dem Durchmesser  $EE''_n$ , also dem Mittelpunkt

$$M_2(b \cos \varphi, b \sin \varphi)$$

und dem Radiusquadrat

$$r_2^2 = (a+c \cos \varphi)^2 + (c \sin \varphi)^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos \varphi. \quad (2)$$

Analog erhält man für den Netzriß von  $e''$ :

$$M_3(c \cos \varphi, c \sin \varphi), \quad r_3^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi. \quad (3)$$

Schließlich untersuchen wir die Netzprojektion der dritten das Dreiecksnetz auf  $\Phi$  aufbauenden Schar, die aus den Parallelkreisen von  $\Phi$  besteht. Der Netzriß der Flächenachse ist der Kreis mit dem Durchmesser  $MN$ , also dem Radius  $a$ .  $M_1(a \cos \varphi, a \sin \varphi)$  ist das Bild jenes Punktes der Achse, dessen „Winkelkote“<sup>8</sup>  $\varphi/2$  beträgt, der sich also in der Höhe  $z = n \cdot \operatorname{tg} \varphi/2$  über  $\Pi$  befindet. Das Halbmesserquadrat des zugehörigen Parallelkreises von  $\Phi$  beträgt

$$m^2 + n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

und wird durch die Netzprojektion im Bild verkleinert auf

$$r_1^2 = \left( m^2 + n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{m^2 + n^2}{2} + \frac{m^2 - n^2}{2} \cos \varphi = b^2 + c^2 + 2bc \cos \varphi. \quad (4)$$

Wir sehen: Unser Dreiecksnetz besteht aus drei gleichartig gebauten, somit gleichberechtigten Kreisreihen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

$$\begin{aligned} \xi_1 &: (x-a \cos \varphi)^2 + (y-a \sin \varphi)^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \varphi \\ \xi_2 &: (x-b \cos \varphi)^2 + (y-b \sin \varphi)^2 = c^2 + a^2 + 2ca \cos \varphi \\ \xi_3 &: (x-c \cos \varphi)^2 + (y-c \sin \varphi)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Die Kreismitteln erfüllen drei konzentrische Kreise mit den Radien  $a, b, c$ , die „Deferenten“  $d_1, d_2, d_3$ . Durch Angabe der drei Zahlen  $a, b, c$  sind alle drei Reihen festgelegt; die räumliche Deutung als Netzprojektion eines gleichseitigen Drehhyperboloids ist aber noch

<sup>8</sup> Bezeichnung von E. Müller. Eckhart spricht kurz vom „Winkel“ (a. a. O., p. 48).

auf mehrfache Weise möglich, je nachdem welche der Kreisreihen man als Bild der Parallelkreisschar ansieht.

Schreiben wir etwa die Reihe  $\xi_1$  in der Form

$$(x^2 + y^2 + a^2 - b^2 - c^2) - 2(ax + bc) \cdot \cos \varphi - 2ay \cdot \sin \varphi = 0, \quad (6)$$

so bemerken wir, daß sie in einem linearen Kreissystem 2. Stufe, einem Kreisbündel enthalten ist. Ein solches besteht bekanntlich aus allen Kreisen, welche einen festen Kreis, den „Hauptkreis“, rechtwinklig schneiden. Dieser Hauptkreis  $h_1$  hat offenbar die Mitte

$$F_1 \left( -\frac{bc}{a}, 0 \right)$$

und das Radiusquadrat

$$r_1^2 = \left( \frac{bc}{a} \right)^2 - (b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{a^2} (a^2 - b^2) (a^2 - c^2). \quad (7)$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich die entsprechenden Werte für die anderen Kreisreihen.

Wir stellen fest: Jede unserer Kreisreihen ist in einem Kreisbündel enthalten; die drei Kreisbündel sind im allgemeinen verschieden.<sup>9</sup>

## § 2. Die Hüllkurve.

Alle Netzstrahlen, die das Hyperboloid  $\Phi$  berühren, bilden im allgemeinen<sup>9</sup> eine Regelfläche 4. Grades  $\Psi^4$  (I. Art nach Sturm), welche in  $I_1, I_2$  Kuspidualpunkte aufweist.<sup>10</sup> Der Schnitt von  $\Psi^4$  mit  $\Pi$  (der „scheinbare Netzumriß“ von  $\Phi$ ) stellt die Hüllkurve des Kreisnetzes dar: Es ergibt sich eine Kurve 4. Ordnung mit Spitzen in den absoluten Punkten  $I_1, I_2$ , also ein Cartesisches Oval  $c^4$ .<sup>11</sup>  $\Psi^4$  berührt  $\Phi$  längs einer Raumkurve 4. Ordnung, I. Art (dem „wahren Netzumriß“ von  $\Phi$ ). Diese Kurve wird von jeder Hyperboloiderzeugenden in zwei Punkten getroffen, ebenso von jedem Parallelkreis, wenn man von den Kreispunkten  $I_1, I_2$  absieht; daraus folgt, daß  $c^4$  von allen Kreisen des Dreiecksnetzes doppelt berührt wird.

Die Gleichung von  $c^4$  ergibt sich durch Elimination des Parameters  $\varphi$  aus (6) und der durch partielle Differentiation nach  $\varphi$  aus (6) hervorgehenden Gleichung

$$(ax + bc) \cdot \sin \varphi - ay \cdot \cos \varphi = 0 \quad (8)$$

mit

$$(x^2 + y^2 - u^2) = 4(2vx + w), \quad (9)$$

<sup>9</sup> Hinsichtlich der Sonderfälle ( $a=0, a \pm b=0$  usw.) siehe § 7.

<sup>10</sup> E. Müller-J. Kramers, Vorlesungen über darstellende Geometrie, III. Bd. Konstruktive Behandlung der Regelflächen, p. 41, 249.

<sup>11</sup> H. Wieleitner, Spezielle Ebene Kurven (Sammlg. Schubert, Bd. 56), § 14.

worin abkürzend

$$u = a^2 + b^2 + c^2, \quad v = abc, \quad w = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \quad (10)$$

bedeutet.

Unser Cartesisches Oval schneidet seine Symmetrieachse  $y = 0$  in vier verschiedenen reellen Punkten (Scheiteln):

$$x_{0,1} = a \pm m = a \pm b \pm c, \quad x_{2,3} = -a \pm n = -a \pm b \mp c. \quad (11)$$

$c^4$  besteht somit aus zwei Ovalen, von denen das größere das kleinere umschließt (Fig. 1). Umgekehrt läßt sich die Gleichung jedes Cartesischen Ovals in die Gestalt (9) bringen; für jedes zweiteilige fallen die Werte  $x_{0,1,2,3}$  reell getrennt aus, so daß sich auch die Größen  $a, b, c$  reell finden lassen und ein solches Oval als Netzumriß eines Hyperboloids gedeutet werden kann. Wir erkennen daraus:

**Satz I.** *Aus drei Reihen doppelt berührender Kreise eines zweiteiligen Cartesischen Ovals läßt sich ein Dreiecksnetz aufbauen.*

Es gibt aber noch eine vierte Reihe  $\xi_0$  doppelt berührender Kreise, und zwar solcher, die ihre Mitten auf der  $x$ -Achse haben. Diese Reihe wird später (p. 396) als gleichberechtigt nachgewiesen, führt jedoch nur zu komplexen Netzbildungen. Ein solcher Kreis

$$(x - \xi)^2 + y^2 = r^2$$

liefert zusammen mit (9) eine in  $x$  quadratische Gleichung, deren Diskriminante verschwinden muß, wenn der Kreis  $c^4$  doppelt berühren soll. Dies führt auf die Bedingung

$$r^2 = \xi^2 + \frac{w}{v}\xi + u + \frac{v}{\xi} \quad (12)$$

und auf die Gleichung der vierten Kreisreihe

$$\xi_0 : x^2 + y^2 - 2x\xi = \frac{w}{v}\xi + u + \frac{v}{\xi}. \quad (13)$$

Diese Reihe enthält drei Nullkreise:  $r^2 = 0$  führt auf

$$\xi_1 = -\frac{bc}{a}, \quad \xi_2 = -\frac{ca}{b}, \quad \xi_3 = -\frac{ab}{c}, \quad (14)$$

also auf die drei ordentlichen Brennpunkte  $F_1, F_2, F_3$ , die uns als Mittelpunkte der Bündelhauptkreise  $b_1, b_2, b_3$  bereits aus § 1 bekannt sind. Der außerordentliche Brennpunkt, wo einander die Spitzentangenten von  $I_1$  und  $I_2$  treffen, liegt im Ursprung  $O$ .

Weiters enthält  $\xi_0$  die Doppeltangente von  $c^4$ , deren Gleichung

$$x = -\frac{w}{2v} = -\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \quad (15)$$

man erhält, wenn man (13) durch  $\xi$  dividiert und  $\xi$  gegen  $\infty$  gehen läßt.

Schließlich enthält  $\xi_0$  auch noch vier Scheitelkrümmungskreise von  $c^4$ . Bezeichnen wir die Abszissen der Krümmungsmitteln von  $x_i$  (11) mit  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), so gelten wegen (12) die Beziehungen

$$(x_i - \sigma_i)^2 = \sigma_i^2 + \frac{w}{v}\sigma_i + u + \frac{v}{\sigma_i}. \quad (16)$$

Hieraus errechnen sich die Formeln

$$\frac{1}{\sigma_{0,1}} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \pm \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{\sigma_{2,3}} = -\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \mp \frac{1}{c}, \quad (17)$$

deren konstruktive Auswertung die Nebenfigur in Fig. 1 für  $\sigma_0$  veranschaulicht.

### § 3. Inversionen und Anallagmatien.

Die Inversion  $\mathfrak{S}_i$  mit dem Mittelpunkt  $F_i$  und dem Grundkreis  $b_i$  (§ 1) führt das ganze Kreisbündel über  $b_i$  kreisweise in sich über, mithin auch die Kreisreihe  $\xi_i$  und deren Hüllkurve  $c^4$ . Die beiden anderen Reihen gehen hierbei auch in sich über, jedoch nicht kreisweise.

Unser das Dreiecksnetz aufbauende Kreissystem ist somit samt seiner Hüllkurve dreifach anallagmatisch.<sup>12</sup> Die drei Hauptkreise  $b_1, b_2, b_3$  sind paarweise orthogonal.<sup>13</sup> Als vierte Anallagmatie ist die Symmetrie bezüglich der  $x$ -Achse zu rechnen. Auch letztere schneidet alle Hauptkreise senkrecht.

Die aufgewiesenen Anallagmatien lassen sich zu konstruktiven Einzelheiten verwerten (vgl. Fig. 1):

a) *Ermittlung der ordentlichen Brennpunkte.* Jene beiden Kreise der Reihe  $\xi_i$ , die ihre Mitten auf der  $x$ -Achse haben, werden durch  $\mathfrak{S}_2$  und  $\mathfrak{S}_3$  miteinander vertauscht.  $F_2$  und  $F_3$  sind daher die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise. Entsprechendes gilt für  $\xi_2$  und  $\xi_3$ .

b) *Konstruktion der Berührungspunkte eines Kreises mit der Hüllkurve.* Wir fassen etwa den Kreis mit dem Durchmesser  $EE_u$  ins Auge. Als Mitglied von  $\xi_2$  wird er durch  $\mathfrak{S}_2$  in sich transformiert, wobei die gesuchten Berührungspunkte miteinander vertauscht werden. Sie liegen also auf einer Geraden durch  $F_2$ , die überdies parallel zu  $OM_2$  verlaufen muß, da die Berührungspunkte (wie bei jeder Kreisreihe) symmetrisch zur Fortschrittsrichtung des Mittelpunktes  $M_2$  liegen. Die Gleichung dieser Hilfsgeraden ist übrigens in (8) aufgetreten.

<sup>12</sup> Das Dreiecksnetz selbst kann nicht als anallagmatisch bezeichnet werden, wie wir in § 4 sehen werden.

<sup>13</sup> In Fig. 1 fällt  $b_2$  nullteilig aus. Statt dessen wurde der reelle Vertreter  $b_2'$  eingezeichnet; dieser gehört dem Büschel  $b_1 b_3$  an.

c) Die Nebenscheitel der Hüllkurve und die Krümmungskreise *dasselbst*. Nach *b*) liegen die Berührungspunkte eines Kreises  $k$  von  $\mathfrak{F}_3$  mit  $c^4$  auf einem Strahl durch  $F_3$  und ihre Symmetrale berührt den Deferenzen  $d_3$  im Mittelpunkt von  $k$ . Lassen wir nun den genannten Strahl zu einer Tangente von  $c^4$  werden, so rücken die Berührungspunkte in einem Nebenscheitel  $S$  zusammen, während die Symmetrale zur Kurvennormale geworden ist und  $d_3$  im zugehörigen Krümmungsmittelpunkt  $K$  berührt.  $S$  liegt als selbststprechender Punkt der Inversion  $\mathfrak{S}_3$  auf  $b_3$  und umgekehrt ist jeder der vier eigentlichen Schnittpunkte von  $b_3$  und  $c^4$  ein Nebenscheitel. Da Entsprechendes auch für  $b_1$  und  $b_2$  gilt (allerdings nicht im Reellen), besitzt  $c^4$  neben den vier Hauptscheiteln auf der  $x$ -Achse noch zwölf Nebenscheitel auf den Hauptkreisen. Wir erhalten diese Nebenscheitel samt den zugehörigen Krümmungsmitteln einfach als Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von  $b_i$  und  $d_i$ .<sup>14</sup>

Eine allgemeine Inversion transformiert das Cartesische Oval  $c^4$  in eine zweiteilige bizirkulare Quartik oder — falls das Inversionszentrum auf  $c^4$  liegt — in eine zirkulare Kubik. Aus den vier doppelt berührenden Kreisreihen  $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$  werden neuerlich vier Reihen doppelt berührender Kreise, die nun untereinander gleichberechtigt sind, wenn man von Realitätsverhältnissen absieht.<sup>15</sup> Das neue Kreissystem ist samt seiner Hüllkurve nunmehr vierfach anallagmatisch; die zugehörigen Hauptkreise, die paarweise orthogonal sind, stellen die inversen Bilder der  $x$ -Achse und der drei Hauptkreise  $b_1, b_2, b_3$  von  $c^4$  dar.

Da sich auch umgekehrt jede bizirkulare Quartik und zirkulare Kubik vom Geschlecht 1 durch Inversion in ein Cartesisches Oval verwandeln läßt, wenn man einen ihrer ordentlichen Brennpunkte als Inversionszentrum wählt, so gelangt man zur folgenden Verallgemeinerung von Satz I:

**Satz II.** Aus drei Reihen doppelt berührender Kreise einer zweiten bizirkularen Quartik oder zirkularen Kubik vom Geschlecht 1 läßt sich ein Dreiecksnetz aufbauen. Eine der vier vorhandenen doppelt berührenden Kreisreihen läßt sich allerdings nicht zum Aufbau eines reellen Netzes verwenden.

Über die Mittenorte (Deferenten) der vier Kreisreihen wird Näheres erst in § 5 ausgesagt.

<sup>14</sup> Man kann auch noch jene Kreise von  $\mathfrak{F}_1$  heranziehen, deren Mitten die Berührungspunkte der aus  $F_3$  an  $d_1$  gelegten Tangenten sind. Diese Kreise gehen auch vermöge  $\mathfrak{S}_3$  in sich über und ihre Berührung mit  $c^4$  muß auf  $b_3$  stattfinden (sonst würde jeder dieser Kreise viermal berühren), womit wieder die Nebenscheitel gefunden sind (Fig. 1).

<sup>15</sup> Diese Gleichberechtigung wird in § 5 besonders augenfällig. Bezüglich aller hier und später auftretenden Eigenschaften der bizirkularen Quartiken vgl. Enc. d. math. W., III C 5, Abschn. VIII.

#### § 4. Endliche Dreiecksnetze.

Wir erklären zunächst den Begriff des „regulären Punktsystems“ auf einem Kreis oder einer Geraden. Wir verstehen darunter jene Anordnung von  $n$  Punkten, die durch eine Inversion (Möbius'sche Kreisverwandtschaft) aus den Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Eckes hervorgeht. Dieser Begriff ist offenbar Inversionen (Möbius'schen Kreisverwandtschaften) gegenüber invariant. In projektiver Hinsicht ist ein solches System dadurch ausgezeichnet, daß je zwei Nachbarpunkte mit zwei festen, konjugiert komplexen „Meßpunkten“ des Trägers dasselbe Doppelverhältnis einschließen. Liegen diese Meßpunkte einmal in den absoluten Kreispunkten, dann bilden die  $n$  Systempunkte selbst ein regelmäßiges  $n$ -Eck und wir sprechen von einem „absolut regulären“ Punktsystem.

Wählen wir den Grundkreis der in der obigen Erklärung erwähnten Inversion senkrecht zum Umkreis des  $n$ -Ecks, so geht dieser in sich über und die Eckpunkte erscheinen aus dem Inversionszentrum  $Z$  auf den Umkreis zurückprojiziert. Die absoluten Kreispunkte werden hiebei in das Meßpunktpaar des entstehenden regulären Punktsystems übergeführt, für welches  $Z$  einen sogenannten Laguerre'schen Vertreter abgibt.

**1. Hilfssatz.** Projiziert man die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Eckes aus einem beliebigen Punkt auf dessen Umkreis, so erhält man ein reguläres Punktsystem. Umgekehrt kann jedes auf einem Kreis liegende reguläre Punktsystem auf diese Weise erzeugt werden, wenn man als Projektionszentrum einen der beiden Laguerre'schen Vertreter des Meßpunktpaares wählt.

Aus der projektiven Kennzeichnung der regulären Punktsysteme folgt der für uns wichtige

**2. Hilfssatz.** Ein reguläres Punktsystem auf einer Geraden wird durch Netzprojektion wieder in ein reguläres Punktsystem übergeführt.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu unserem Drehhyperboloid  $\Phi$  zurück. Wir greifen in jeder Schar  $n$  Erzeugende heraus, die in gleichen Abständen aufeinanderfolgen, also die Parallelkreise von  $\Phi$  nach absolut regulären Punktsystemen schneiden. Jede Erzeugende wird von den Erzeugenden der anderen Schar in  $n$  Punkten eines regulären Punktsystems getroffen, was mittels des 2. Hilfssatzes einzusehen ist, wenn man sich für den Augenblick die Erzeugenden der anderen Schar in ein Drehnetz eingebettet denkt. Die Schnittpunkte der Erzeugenden untereinander verteilen sich zu je  $n$  auf  $n$  Parallelkreise, die zusammen mit den  $2n$  Erzeugenden ein endliches Dreiecksnetz mit  $n^2$  Knoten und  $2n^2$  Maschen bilden.

Wenden wir nun unsere Netzprojektion aus § 1 an, so erhalten wir ein endliches Dreiecksnetz aus Kreisen, welches das Ringgebiet eines Cartesischen Ovals doppelt überdeckt (Fig. 2).

Die Knotenpunkte sind auf den Kreisen der Reihe  $\xi_1$  (5) — die ja aus der Parallelkreisschar von  $\Phi$  hervorgegangen ist — absolut regulär verteilt. Die Mittelpunkte der Parallelkreise bilden auf der Hyperboloidachse ein reguläres Punktsystem mit den konjugiert komplexen Scheiteln  $J_1, J_2$  von  $\Phi$  als Meßpunkten. Durch die Netzprojektion gelangen wir zu den Kreismittelpunkten von  $\xi_1$ , die nach dem 2. Hilfssatz auf dem Deferenten  $d_1$  ein reguläres Punktsystem mit den Netzrissen von  $J_1, J_2$  als Meßpunkten bilden. Um letztere zu erhalten, denken wir uns die vier Minimalerzeugenden durch  $J_1, J_2$  abgebildet: Es ergeben sich vier isotrope Tangenten des Netzumrisses  $c^4$  von  $\Phi$ , deren konjugiert komplexes Schnittpunktpaar die Bilder von  $J_1, J_2$  — also die gesuchten Meßpunkte — darstellt, während die zwei reellen Schnittpunkte deren Laguerre'sche Vertreter abgeben. Diese müssen offenbar mit zwei reellen Brennpunkten von  $c^4$  zusammenfallen, und zwar mit jenen, die bezüglich  $d_1$  invers liegen, also mit  $F_2$  und  $F_3$ .<sup>16</sup>

Die Mittelpunkte der beiden anderen Kreisreihen  $\xi_2^*, \xi_3^*$  — die aus den Erzeugenden von  $\Phi$  hervorgegangen sind — bilden auf den Deferenten  $d_2$  und  $d_3$  absolut reguläre Punktsysteme, was durch den Stern ausdrücklich angedeutet werden soll.

Wenden wir nun auf unser endliches Dreiecksnetz  $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$  die Inversion  $\mathfrak{S}_2$  aus § 3 an. Hierbei bleibt  $\xi_2^*$  kreisweise fest.  $\xi_3^*$  wird in eine Kreisreihe  $\xi_3$  übergehen, deren Mittelpunkte auf  $d_3$  nicht mehr absolut regulär verteilt sind, sondern nur mehr regulär (1. Hilfssatz), und zwar ist das Meßpunktpaar durch die Laguerreschen Vertreter  $F_2$  und  $F_1$  festgelegt.<sup>16</sup>  $\xi_1$  hingegen wird nach dem 1. Hilfssatz vermöge  $\mathfrak{S}_2$  in eine Reihe  $\xi_1^*$  mit absolut regulärem Mittelpunktsystem übergeführt, da vorhin  $F_2$  als Laguerre'scher Vertreter der Meßpunkte von  $\xi_1$  erkannt wurde.

Analoges ergibt sich bei Anwendung von  $\mathfrak{S}_3$ . Üben wir hingegen auf unser Netz  $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$  die Inversion  $\mathfrak{S}_1$  aus, so bleibt  $\xi_1$  fest,  $\xi_2^*$  und  $\xi_3^*$  verlieren aber beide ihr absolut reguläres Mittelpunktsystem und gehen in die bloß regulären Reihen  $\xi_2, \xi_3$  über.

Wir sind also ergänzend zu Satz I zu der Erkenntnis gelangt, daß sich aus drei Reihen doppelt berührender Kreise eines Cartesischen Ovals im wesentlichen auf vierfach verschiedene Weise Dreiecksnetze aufbauen lassen, die in der folgenden Art zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 : (\xi_1 \xi_2 \xi_3) &\longleftrightarrow (\xi_1^* \xi_2^* \xi_3^*); & (\xi_1^* \xi_2^* \xi_3^*) &\longleftrightarrow (\xi_1^* \xi_2 \xi_3) \\ \mathfrak{S}_2 : (\xi_1 \xi_2 \xi_3) &\longleftrightarrow (\xi_1^* \xi_2 \xi_3^*); & (\xi_1^* \xi_2 \xi_3^*) &\longleftrightarrow (\xi_1^* \xi_2^* \xi_3) \\ \mathfrak{S}_3 : (\xi_1 \xi_2 \xi_3) &\longleftrightarrow (\xi_1^* \xi_2^* \xi_3); & (\xi_1^* \xi_2^* \xi_3) &\longleftrightarrow (\xi_1 \xi_2^* \xi_3^*) \end{aligned} \quad (18)$$

Damit sind auch alle Aufbaumöglichkeiten erschöpft. Da durch jeden Punkt im Innern des Ringgebietes von  $c^4$  genau zwei Kreise

<sup>16</sup> Bekanntlich liegen die Laguerre'schen Vertreter zweier konjugiert komplexer Punkte eines Kreises stets invers zu demselben. Daß  $F_2$  und  $F_3$  invers sind bezüglich  $d_1$ , folgt aus § 3, a) oder aus (14):  $\xi_2 \xi_3 = a^2$ .

jeder Reihe gehen, haben wir im ganzen  $2^3 = 8$  Möglichkeiten, dort ein Dreiecksnetz zu beginnen. Nachdem das Ringgebiet aber doppelt überdeckt wird, sind im wesentlichen doch nur vier davon verschieden.

Einige Worte zur Konstruktion von Fig. 2, wo ein Netz  $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$  für  $n = 12$  gezeichnet wurde. Zunächst wurden alle drei Deferenten, von der  $x$ -Achse ausgehend, in zwölf gleiche Teile geteilt. Diese Teilpunkte stellen auf  $d_2$  und  $d_3$  bereits die Mittelpunktsysteme dar, während jenes auf  $d_1$  erst durch Projektion aus  $F_2$  oder  $F_3$

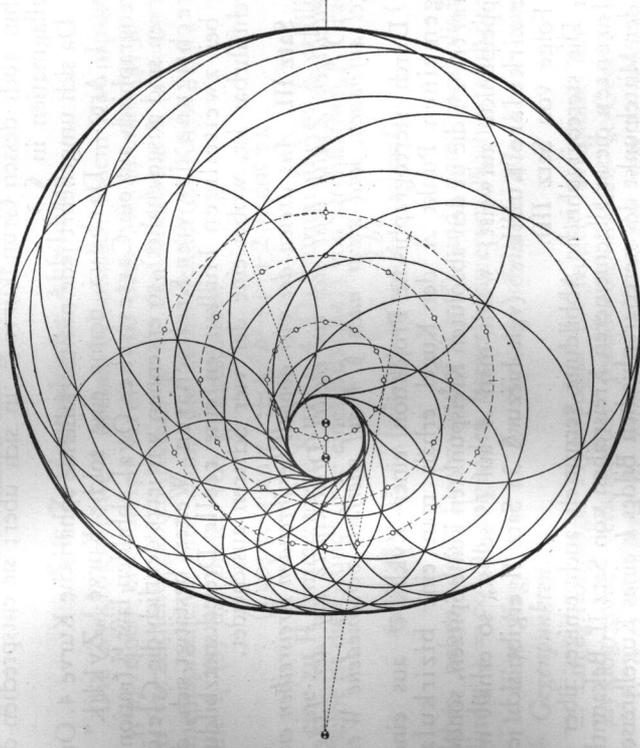


Fig. 2.

erhalten wird. Die zugehörigen Kreisradien erhält man am einfachsten mittels der Formeln (2), (3) und (4), dieselben als Kosinussatz ge- deutet (vgl. Fig. 1:  $M_2 E = NM_3$ ). Um die durch die doppelte Über- deckung des Ringgebietes auftretenden Störungen zu vermeiden, wurde die „Sichtbarkeit“ bei der Netzprojektion berücksichtigt.

§ 5. Stereographische Abbildung.

Projizieren wir unser Cartesisches Oval samt seinen vier doppelt berührenden Kreisreihen  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$  auf eine Kugel, und zwar aus einem Endpunkt des zu  $\Pi$  normalen Kugeldurchmessers, so erhalten wir daselbst eine zweiteilige Kurve 4. Ordnung, I. Art  $\tilde{c}^4$ , deren doppelt berührende Kreisscharen auf der Kugel von den Tangential-

ebenen der Doppeltorse von  $\tilde{c}^4$  ausgeschnitten werden. Diese Doppeltorse zerfällt bekanntlich in die vier Kegel 2. Grades, die in dem durch  $\tilde{c}^4$  hindurchgehenden Flächenbüschel 2. Grades enthalten sind. Die Tangentialebenen jedes Kegels sind in einem Bündel enthalten, so daß jede Kreistreife einem Kreisbündel angehört (§ 1); die Hauptkreise derselben werden auf der Kugel von den Ebenen des gemeinsamen Poltetraeders ausgeschnitten und stehen mithin paarweise aufeinander senkrecht (§ 3). Die harmonischen perspektiven Kollineationen mit den Ecken und Gegenebenen des Poltetraeders als Fixelementen führen die Kugel und das ganze Flächenbüschel, mithin auch dessen Grundkurve  $\tilde{c}^4$ , in sich über; sie entsprechen den Anallagmaten in § 3.

Da sich umgekehrt jede nichtzerfallende sphärische Kurve 4. Ordnung, I. Art. — Darboux nennt eine solche Kurve „Zyklid“ — stereographisch auf ein Cartesisches Oval abbilden läßt<sup>17</sup> (rationale Kurven sind ausgeschaltet), so erkennen wir jetzt deutlich die Gleichberechtigung der vier Kreisscharen. Weiters bestätigt sich, daß nur bei zweitheiligen Hüllkurven eine reelle Dreiecksnetzbildung durchführbar ist, wobei eine der vier Scharen ausscheidet.

**Satz III.** Aus dreien der vier doppelt berührenden Kreisreihen einer zweitheiligen Zyklid läßt sich ein reelles Dreiecksnetz auf der Trägerkugel aufbauen, und zwar nach § 4 auf vierfach verschiedene Weise.

Durch stereographische Projektion einer Zyklid  $\tilde{c}^4$  aus einem allgemeinen Punkt  $A$  der Kugel erhält man eine bizirkuläre Quartik  $c^4$ , die in den absoluten Kreispunkten keine Spitzen, sondern Doppelpunkte aufweist; wählt man  $A$  auf  $\tilde{c}^4$  selbst, so erhält man eine zirkuläre Kubik  $c^3$  (vgl. hierzu § 3. Satz II ergibt sich jetzt als Folge von Satz III).

Die stereographische Abbildung vermittelt auch einiges über die Deferenten dieser allgemeineren Kreisreihen von Satz II. Bekanntlich ist der Mittelpunkt des stereographischen Bildes  $k$  eines Kugelkreises  $\tilde{k}$  die Projektion des Poles der Ebene von  $\tilde{k}$  bezüglich der Kugel. Wir haben daher die vier Polarkegelschnitte der singulären Flächen des Büschels  $\tilde{c}^4$  aus  $A$  zu projizieren; diese sind die singulären Flächen jener Flächenschar, die durch Polarisation des Flächenbüschels an der Kugel hervorgeht, und daher die Doppelkurven der der Kugel längs  $\tilde{c}^4$  umschriebenen Torse 4. Klasse I. Die scheinbaren Umrisse aller Flächen der Schar  $\Gamma$  für  $A$ , also auch die Projektionen der Doppelkegelschnitte bilden eine Schar von Kegelschnitten in  $\Pi$ , die den vier Umrisserzeugenden von  $\Gamma$  eingeschrieben sind. Diese Umrisserzeugenden sind aber isotrop, da der Umriss der Kugel (die ja auch der Schar angehört), in die Minimalstrahlbüschel  $I_1, I_2$  zerfällt. Diese vier Minimalstrahlen berühren außerdem das Bild  $c^4$  der auf  $\Gamma$  gelegenen Zyklid  $\tilde{c}^4$  in  $I_1$  und  $I_2$ . Wir können somit sagen:

<sup>17</sup> G. Darboux, Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré. Nouv. Ann. de Math., II, 3 (1864), p. 199.

**Satz IV.** Die Deferenten der vier doppeltberührenden Kreisreihen einer allgemeinen bizirkulären Quartik vom Geschlecht 1 sind konfokale Brennpunkten der Hüllkurve zusammen.<sup>18</sup>

Im Falle des Cartesischen Ovals rücken alle vier Brennpunkte zusammen; drei der Deferenten werden zu konzentrischen Kreisen, während der vierte in einen Durchmesser ausartet.

Im Falle der zirkulären Kubik sind drei Brennpunkte ins Unendliche gerückt; die Deferenten sind konfokale Parabeln.

## § 6. Zyklidographische Abbildung.

Die Zyklidographie<sup>19</sup> ordnet bekanntlich jedem Raumpunkt  $(x, y, z)$  einen orientierten Kreis mit dem Mittelpunkt  $(x, y)$  und dem vorzeichenbegabten Radius  $z$  in der Bildebene  $\Pi$  ( $z=0$ ) zu. Dementsprechend sind dann die nichtorientierten Kreise etwa der Reihe  $\xi_1$  (5) die Bilder von Punktepaaren

$$(a \cos \varphi, a \sin \varphi, \pm \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \varphi}),$$

die eine zu  $\Pi$  symmetrische Kurve 4. Ordnung, I. Art  $k_1$  erfüllen. Dieselbe ist die Grundkurve eines Büschels von Drehflächen 2. Grades

$$(x^2 + y^2 - a^2) + \lambda \left( z^2 - b^2 - c^2 - \frac{2bc}{a} x \right) = 0, \quad (19)$$

welches neben dem Drehzylinder  $\lambda=0$  und dem parabolischen Zylinder  $\lambda=\infty$  die folgenden bemerkenswerten Flächen enthält:

1. Eine Kugel  $\lambda=1$ . Ihr Äquator schneidet alle Kreise von  $\xi_1$  nach Gegenpunkten.
2. Ein gleichseitiges Hyperboloid („c-Kugel“ im Sinne der mit der Zyklidographie verknüpften pseudoeuklidischen „c-Geometrie“)  $\lambda=-1$ . Sein Kehlkreis  $b_1$  schneidet alle Kreise von  $\xi_1$  orthogonal (vgl. § 1).  $k_1$  kann sowohl als Zyklid wie als c-Zyklid bezeichnet werden; sie berührt den absoluten Kreis und den c-Kreis in  $I_1$  und  $I_2$ .
3. Zwei Drehkegel  $\lambda=a^2/b^2$  und  $\lambda=a^2/c^2$ , deren Spitzen in  $F_2$  und  $F_3$  liegen. Wir bemerken, daß die Radien der Kreise von  $\xi_1$  deren Zentralabständen vom Brennpunkt  $F_2$  oder  $F_3$  proportional sind.

Die zyklidographischen Umrisse der Flächen des Büschels (19) stellen durchwegs Kreise aus  $\xi_0$  (13) dar. Insbesondere liefert der parabolische Zylinder  $\lambda=\infty$  in der Spur seiner Leitebene die Doppeltangente (15) der Hüllkurve  $c^4$ .

Ähnliche Verhältnisse wie für  $\xi_1$  liegen bei den Reihen  $\xi_2$  und  $\xi_3$  vor.  $\xi_0$  hingegen ist das Bild einer ebenen c-zirkulären Kubik  $\xi_0$  vom Geschlecht 1, deren Gleichung unmittelbar aus (12) folgt:

<sup>18</sup> Enc. d. math. Wiss., III C 5, Nr. 84.

<sup>19</sup> E. Müller-J. Krames, Vorlesungen über darstellende Geometrie, II. Bd. Die Zyklidographie.

$$z^2 = x^2 + \frac{\omega}{\nu}x + \mu + \frac{\nu}{x}, \quad y = 0. \quad (20)$$

Sie schneidet die  $x$ -Achse in den Brennpunkten  $F_1, F_2, F_3$  von  $c^4$  (14) und besitzt neben der  $z$ -Achse noch zwei unter  $45^\circ$  geneigte Asymptoten, die einander auf der Doppeltangente (15) von  $c^4$  schneiden.

Die allen vier Kreisreihen gemeinsame Hüllkurve  $c^4$  ist die Spurkurve einer bemerkenswerten  $c$ -Torse 14. Ordnung, 12. Klasse  $\Theta^{14}$ , deren Doppelkurve in fünf Bestandteile zerfällt, nämlich in das Cartesische Oval  $c^4$ , die Kubik  $k_0$  und drei Zykliken  $k_1, k_2, k_3$ ; den absoluten  $c$ -Kreis enthält  $\Theta^{14}$  sechsfach.

Eine Inversion in  $\Pi$  ist das zyklographische Bild einer  $c$ -Inversion an einer zu  $\Pi$  symmetrischen  $c$ -Kugel.  $\Theta^{14}$  geht hiebei in eine neue  $c$ -Torse  $\Theta^{16}$  16. Ordnung und 16. Klasse über, deren Doppelkurven, zyklographisch abgebildet, das in Satz II angegebene Dreiecksnetz aufbauen. Diese Doppelkurven gehen aus jenen von  $\Theta^{14}$  hervor und sind vier  $c$ -Zykliken  $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$  sowie der Grenzfall einer solchen, die bizirkulare Hüllquartik  $\bar{c}^4$ .<sup>20</sup> Den  $c$ -Kreis enthält  $\Theta^{16}$  achtfach. Aus Symmetriegründen ist der Grundriß von  $k_i$  ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte überdies mit den außerordentlichen Brennpunkten von  $\bar{c}^4$  zusammenfallen; letzteres folgt unmittelbar daraus, daß jene Tangentialebenen von  $\bar{k}_i$ , die den  $c$ -Kreis in  $I_1$  oder  $I_2$  berühren, isotrope und ersprojizierende Tangentialebenen von  $\Theta^{16}$  sind. Damit ist Satz IV neuerlich bestätigt.

### § 7. Sonderfälle und Ausartungen.

Abschließend soll nun auf die Sonderfälle und Ausartungen des bisher ausschließlich betrachteten allgemeinen Falles eingegangen werden, die dadurch zustandekommen, daß von den drei wesentlichen Konstanten  $a, b, c$  der drei das Dreiecksnetz erzeugenden Kreisreihen (5) eine verschwindet oder zwei dem Betrage nach gleich werden.

1.  $a = 0$ .

Das Hyperboloid  $\Phi$  und das Drehnetz haben die gemeinsame Achse  $z$ .  $\ddot{k}_1$  besteht aus konzentrischen Kreisen,  $\ddot{k}_2$  und  $\ddot{k}_3$  aus je einer Drehschar von Kreisen, so daß  $c^4$  in zwei konzentrische Kreise zerfällt. Das Dreiecksnetz stellt einen Sonderfall des dritten Beispiels der Einleitung dar.

2.  $b = 0$  oder  $c = 0$ .

Nach (1) ist dann  $m = \mp n$  und die Scheiteltangentialebenen  $z = \pm ni$  von  $\Phi$  enthalten dann auch die Brennlinsen des Netzes. Wir erhalten denselben Sonderfall wie für  $a = 0$ , nur bildet jetzt  $\ddot{k}_2$ , bzw.  $\ddot{k}_3$  das konzentrische Kreissystem.

<sup>20</sup> Diese fünf  $c$ -Zykliken stellen einen Sonderfall des  $c$ -metrischen Seitenstücks der fünf „Fokalzyklen“ dar, die von G. Darboux (a. a. O.) und Moutard (Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre. Nouv. Ann. II, 3, p. 536) betrachtet wurden.

3.  $|a| = |b|$  oder  $|a| = |c|$ .

Nach (1) ist  $|m \pm n| = |2a|$ , das Hyperboloid  $\Phi$  und das Drehnetz haben eine zu  $x = 0$  parallele Erzeugende gemeinsam. In deren Spurpunkt besitzt die Hüllkurve  $c^4$  einen Doppelpunkt, in den auch zwei der Brennpunkte gerückt sind.  $c^4$  ist demnach eine Pascalschnecke, wobei aber der Fall der Kardioiden ausgeschlossen ist. Die Reihen  $\ddot{k}_1$  und  $\ddot{k}_3$ , bzw.  $\ddot{k}_1$  und  $\ddot{k}_3$ , fallen zusammen und bestehen aus Kreisen, die  $c^4$  einfach berühren und den Doppelpunkt enthalten. Die dritte Reihe besteht aus doppelt berührenden Kreisen.

**Satz V.** Aus einer Reihe doppelt berührender Kreise einer Pascalschnecke (rationalen bizirkularen Quartik) und der doppelt zu nehmenden Reihe einfach berührender Kreise durch den Doppelpunkt läßt sich ein Dreiecksnetz aufbauen.

Die stereographische Bildkurve von  $c^4$  (vgl. § 5) ist jetzt eine rationale Zyklik mit Doppelpunkt. Durch stereographische Projektion aus demselben erhält man ein einfacheres Dreiecksnetz, das auch durch Inversion vom Doppelpunkt der  $c^4$  aus unmittelbar gewonnen werden kann.

**Satz VI.** Aus einer Reihe doppelt berührender Kreise eines Mittelpunktskegelschnittes und dessen Tangenten läßt sich ein reelles Dreiecksnetz aufbauen.

Zu diesem Netz gelangt man auch durch Zentralprojektion des Netzes auf dem Hyperboloid  $\Phi$  auf die Bildebene  $\Pi$ . Der Mittelpunktskegelschnitt tritt hiebei als scheinbarer Umriß von  $\Phi$  auf. Wählt man das Auge auf  $\Phi$  selbst, so zerfällt der Umriß in zwei Strahlbüschel; dieselben bilden zusammen mit dem über ihren Scheiteln errichteten Kreisbüschel ein Dreiecksnetz,<sup>7</sup> das durch Inversion sofort zum zweiten Beispiel der Einleitung verallgemeinert werden kann.

4.  $|b| = |c|$ .

Diese Annahme bedeutet nach (1)  $m = 0$  oder  $n = 0$ ; es artet entweder  $\Phi$  oder das Drehnetz aus und man erhält auf geometrischem Wege kein Dreiecksnetz. Selbstverständlich gelangt man aber zu dem Netz aus Satz V, wenn man die Spezialisierung  $b = \pm c$  erst in den Gleichungen (5) vornimmt.

**Zusatz bei der Korrektur:** Wie W. Schmid in einer inzwischen erschienenen Arbeit (Über Dreiecksnetze aus Berührungskegelschnitten einer ebenen Kurve vierter Ordnung. Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 47 [1938]) mitteilt, lassen sich aus gewissen Tripeln der 63 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte einer allgemeinen Quartik Dreiecksnetze aufbauen. Unsere Kreisnetze können dort eingeordnet werden, wenn man bizirkulare Quartiken betrachtet.