Kreise als Doppelloxodromen

Von W. WUNDERLICH in Wien

Unter einer *Loxodrome* schlechtweg versteht man in der Auffassung von G. SCHEFFERS [7] eine Raumkurve, welche die Ebenen eines Büschels unter einem konstanten Winkel σ schneidet. Die Trägergerade a des Ebenenbüschels heißt die *Achse* der Loxodrome; sie kann als Achse einer Drehfläche angesehen werden, auf der die Loxodrome unter dem festen Kurswinkel σ gegen die Meridianschar verläuft. Es ist bekannt, daß unter den Loxodromen eines Ebenenbüschels a auch *Kreise* vorkommen: Es sind dies die VILLARCEAUschen Kreise der ∞^3 Torusflächen mit der Achse a, also insgesamt ∞^4 an der Zahl, solange über die Größe des Schnittwinkels σ nicht verfügt wird.

SCHEFFERS hat a. a. O. die Frage nach den „*Doppelloxodromen*" aufgeworfen, also nach jenen Kurven, die zwei vorgelegte Ebenenbüschel a, b unter vorgeschriebenen Winkeln σ, τ durchsetzen. Als Beitrag zu diesem, bisher noch nicht allgemein gelösten Problem wird hier gezeigt, daß unter den gesuchten Doppelloxodromen *acht Kreise* vorhanden sind. Ferner wird bei dieser Gelegenheit die Mannigfaltigkeit der ∞^2 Kreise untersucht, die als gemeinsame Loxodromen der beiden Ebenenbüschel auftreten, solange die Schnittwinkel beliebige Werte haben dürfen. Anschließend wird noch von zwei Gesichtspunkten aus die Verallgemeinerung betrachtet, die sich ergibt, wenn man die beiden Ebenenbüschel durch Kugelbüschel ersetzt.

1. In einer Arbeit „Kreise als Loxodromen" befaßte sich E. MÜLLER [5] mit den ∞^4 Loxodromenkreisen eines Ebenenbüschels und umgekehrt mit den zu einem vorgelegten Kreis gehörigen ∞^2 Loxodromenachsen. Er kommt dabei zu dem Schluß, daß ein Kreis l dann und nur dann Loxodrome mit der Achse a ist, wenn er die beiden durch a gehenden *Minimalebenen* α, $\overline{\alpha}$ berührt.

Nun, diese Aussage bedarf zunächst einmal einer gewissen Korrektur, da sie im Komplexen — und wenn von Minimalebenen die Rede ist, treibt man zwangsläufig komplexe Geometrie — nicht unbedingt hinreichend ist. Daß die Bedingung notwendig ist, liegt mehr oder weniger auf der Hand, denn wären die beiden Tangentialebenen aus a an l nicht isotrop, so würden sie den Schnittwinkel Null liefern. Um zu prüfen, ob die Bedingung hinreichend ist, betrachten wir den l enthaltenden, zu a parallelen Zylinder 2. Ordnung. Da er von dem Minimalebenenpaar α, $\overline{\alpha}$ berührt wird, ist a eine seiner vier *Fokalgeraden*. Diese sind aber nicht ganz gleichberechtigt, und wir haben zwei Fälle zu unterscheiden: a) a trifft die Rotationsachse m von l; b) a ist windschief zu m (trifft dafür aber den zu a normalen Durchmesser von l).

Zur Diskussion ist es zweckmäßig, die beiden LAGUERRE*schen Punkte* $L, \bar{L}$ des Kreises l einzuführen, das sind die Spitzen der beiden durch l legbaren Minimalkegel (Nullkugeln) $\lambda, \bar{\lambda}$. Sie liegen auf der Kreisachse m und sind vom Kreismittelpunkt um das $\pm\, i$-fache des Kreishalbmessers entfernt. Jede den Kreis l berührende Minimalebene berührt auch λ oder $\bar{\lambda}$ und enthält daher L oder $\bar{L}$.

Im Falle a) geht die Fokalgerade a durch einen der beiden LAGUERREschen Punkte, etwa L. Bezeichne P einen beliebigen Punkt des Kreises l, t die zugehörige Tangente und n die in P auf die Meridianebene $\varepsilon = Pa$ errichtete Normale. Der Winkel nt ist komplementär zum Schnittwinkel εt; beachtet man jedoch, daß n parallel zur Polaren von ε bezüglich λ verläuft, also zusammen mit t in der λ in P berührenden Minimalebene liegt, so erkennt man, daß hier von der üblichen Winkelmessung überhaupt keine Rede sein kann. Irgend zwei nichtisotrope Geraden einer Minimalebene, wie n und t, ergeben stets den Winkelwert Null — wie auch eine einfache Rechnung bestätigt —, so daß unser Kreis l in gewissem Sinne als „Orthogonaltrajektorie" des Ebenenbüschels a angesprochen werden kann, sicher aber keine eigentliche Loxodrome abgibt.

Im Falle b) enthält die Fokalgerade a keinen der beiden LAGUERREschen Punkte, und von den beiden durch a gehenden Minimalebenen berührt die eine den Minimalkegel λ, die andere $\bar{\lambda}$; a ist mithin eine gemeinsame Tangente des Kegelpaares $\lambda, \bar{\lambda}$. Bei Rotation um die Kreisachse m überstreicht a eine *Drehquadrik* Σ (unter reellen Voraussetzungen ein einschaliges Hyperboloid), die λ und $\bar{\lambda}$ berührend angeschrieben ist, also den Kreis l als Fokalkurve und $L, \bar{L}$ zu Brennpunkten hat. Der aus einem Kreispunkt P an Σ legbare Tangentialkegel ist nun, nach einem bekannten Satz der Fokaltheorie der Flächen 2. Grades, ein *Drehkegel* mit der Kreistangente t als Achse, und sein Öffnungswinkel $2\,\sigma$ ist, wie leicht einzusehen, supplementär zum Öffnungswinkel des Asymptotenkegels von Σ, also unabhängig von P. Das bedeutet aber mit anderen Worten, daß der Fokalkreis l sämtliche ∞^2 Tangentialebenen von Σ unter demselben Winkel σ schneidet, insbesondere also auch die ∞^1 die Erzeugende a enthaltenden Ebenen, womit seine Loxodromeneigenschaft erwiesen ist[1]).

Um nun die „unechte Loxodromenlage" a) auszuschalten (die E. MÜLLER offenbar übersehen hatte), können wir die „echte Loxodromenlage" b) etwa folgendermaßen kennzeichnen: *Ein Kreis ist dann und nur dann Loxodrome eines Ebenenbüschels, wenn seine beiden* LAGUERRE*schen Punkte den beiden Minimalebenen des Büschels angehören.*

[1]) Daß die durch Rotation von l um a entstehende Drehfläche ein *Torus* ist, bedürfte noch einer weiteren Überlegung, die für das Folgende jedoch ohne Belang ist.

2. Seien nun a und b zwei beliebig vorgegebene Geraden, die wir der Einfachheit halber ausdrücklich als reell voraussetzen wollen. Unter Verwendung eines passenden kartesischen Normalkoordinatensystems x, y, z können sie beschrieben werden durch

$$(1)\qquad \begin{aligned} a \ldots x : y &= \lambda : \mu, \quad z = h \\ b \ldots x : y &= -\lambda : \mu, \quad z = -h, \end{aligned}$$

wobei die Richtungskonstanten λ, μ noch durch die Bedingung $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ normiert werden mögen. Ferner sei in Hinkunft stillschweigend $h \neq 0$ angenommen, ohne jeweils auf die für $h = 0$ eintretenden Ausartungen eigens hinzuweisen. — Die Minimalebenen $\alpha, \overline{\alpha}$ durch a und $\beta, \overline{\beta}$ durch b werden nunmehr dargestellt durch

$$(2)\qquad \begin{aligned} \alpha, \overline{\alpha} \ldots \mu x - \lambda y \pm i(z-h) &= 0, \\ \beta, \overline{\beta} \ldots \mu x + \lambda y \pm i(z+h) &= 0. \end{aligned}$$

Für die restlichen Kanten des von diesen Ebenen gebildeten „isotropen Tetraeders“ [2]) findet man dann

$$(3)\qquad \begin{aligned} e = \alpha\beta, \overline{e} = \overline{\alpha}\overline{\beta} \ldots x : z = \mp i : \mu, \; y = \mp ih/\lambda; \\ f = \alpha\overline{\beta}, \overline{f} = \overline{\alpha}\beta \ldots y : z = \pm i : \lambda, \; x = \pm ih/\mu. \end{aligned}$$

Für einen Kreis l, der in Bezug auf a und b e c h t e Loxodromenlage aufweist — und bei einem r e e l l e n Kreis ist nur echte Loxodromenlage möglich — müssen die LAGUERREschen Punkte $L, \overline{L}$ zufolge § 1 den Minimalebenen $\alpha, \overline{\alpha}, \beta$ und $\overline{\beta}$ angehören, ohne auf a oder b selbst zu liegen; sie verteilen sich mithin auf die Gegenkanten e und $\overline{e}$ oder f und $\overline{f}$. Mit dieser Feststellung ist das Problem der *Doppelloxodromenkreise* im wesentlichen geklärt. Die Beantwortung gewisser Fragen, die im Zusammenhang mit der vorliegenden zweiparametrigen Kreismannigfaltigkeit („Kreiskongruenz“) interessieren, ist jetzt bloße Routinearbeit. Es sind dies vor allem die Fragen nach dem *Mittenort*, der *Hüllfläche der Kreisebenen* und der *Kongruenz der Kreisachsen.*

Nehmen wir, um die Vorstellung zu fixieren, an, L liege auf e und $\overline{L}$ auf $\overline{e}$. Für die zugehörige *Kreiskongruenz* $\mathfrak{C}$ kann die Rolle der Loxodromenachsen a und b jederzeit auch von f und $\overline{f}$ übernommen werden; die Gleichberechtigung dieser Achsenpaare wird gelegentlich in Erscheinung treten. Unter Verwendung zweier Hilfsparameter $t, \overline{t}$ können die LAGUERREschen Punkte $L, \overline{L}$ gemäß (3) festgelegt werden durch

$$(4)\qquad L(-it, -ih/\lambda, \mu t), \quad \overline{L}(i\overline{t}, ih/\lambda, \mu\overline{t}).$$

Für den die Strecke $L\overline{L}$ halbierenden *Kreismittelpunkt* M findet man so die Koordinaten

$$(5)\qquad M \ldots X = \frac{i}{2}(\overline{t} - t), \; Y = 0, \; Z = \frac{\mu}{2}(t + \overline{t}).$$

---

2) Zahlreiche merkwürdige Eigenschaften eines solchen Tetraeders entdeckte W. BLASCHKE [1].

Der *Mittenort* der Kreise ist mithin die *Ebene* $y = 0$. Die *Achsenkongruenz* ist natürlich das (elliptische) *Strahlnetz* mit den (hochimaginären) Brennlinien $e, \overline{e}$.

Die Richtung der Kreisachse $m = L\,\overline{L}$ und damit gleichzeitig die dazu normale Stellung der Kreisebene π ergibt sich in

$$u : v : w = i(t + \overline{t}) : 2\,ih/\lambda : \mu(\overline{t} - t)\,. \tag{6}$$

Vergleich von (5) und (6) liefert

$$M \ldots X = -\frac{hw}{\lambda\mu v}\,, \quad Y = 0\,, \quad Z = \frac{\mu h u}{\lambda v}\,, \tag{7}$$

und damit (unter Berücksichtigung der Normierungsbedingung $\lambda^2 + \mu^2 = 1$) als Gleichung der *Kreisebene*:

$$\pi \ldots u\,x + v\,y + w\,z = -\frac{\lambda h u w}{\mu v}\,. \tag{8}$$

Partielle Differentiation nach den Parametern u, v, w führt dann zum *Hüllgebilde* Π des Ebenensystems π in Parameterdarstellung:

$$\Pi \ldots x = -\frac{\lambda h w}{\mu v}\,, \quad y = \frac{\lambda h u w}{\mu v^2}\,, \quad z = -\frac{\lambda h u}{\mu v}\,; \tag{9}$$

die parameterfreie Form

$$\Pi \ldots \lambda\,h\,y = \mu\,x\,z \tag{10}$$

läßt erkennen, daß es sich dabei um ein *orthogonales hyperbolisches Paraboloid* handelt[3]). Man überzeugt sich leicht, daß Π das Erzeugendenvierseit $a f b \overline{f}$ enthält, dessen Diagonalen $e, \overline{e}$ mithin zu reziproken Polaren besitzt.

Für den *Kreisradius* r findet man

$$r = \frac{i}{2}\,(L\overline{L}) = \frac{h}{\lambda v}\,\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\,. \tag{11}$$

Betrachten wir in diesem Zusammenhang die Menge der ∞^2 *Kugeln* $\varkappa$, die durch die Loxodromenkreise l als Großkreise bestimmt sind, und deren Gleichung zufolge (7) und (11) lautet:

$$\varkappa \ldots x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2\,h w}{\lambda \mu v}\,x - \frac{2\,\mu h u}{\lambda v}\,z = \frac{h^2 u^2}{v^2} + \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{h^2 w^2}{\mu^2 v^2}\,. \tag{12}$$

Als *Hüllgebilde* dieses Kugelsystems ergibt sich unter Benützung der durch partielle Ableitung gewonnenen Berührungskoordinaten $x = -\lambda\,h\,w/\mu\,v$ und $z = -\lambda\,h\,u/\mu\,v$ das *einschalige Hyperboloid*

$$-\mu^2\,x^2 + \lambda^2\,y^2 + z^2 = h^2\,, \tag{13}$$

[3]) Dieses Hüllparaboloid kann als Erzeugnis jener *Korrelation* zwischen der Mittelebene $y = 0$ und der Fernebene aufgefaßt werden, welche sich aus der durch das Achsennetz vermittelten Kollineation und der absoluten Polarität zusammensetzt und durch (7) beschrieben wird.

das von jeder der Kugeln $\varkappa$ in zwei zur xz-Ebene spiegelbildlich liegenden Punkten berührt wird. Man sieht, daß es ebenfalls das Erzeugendenvierseit $a f b \bar{f}$ enthält.

Zusammenfassend läßt sich mithin aussprechen:

Satz 1. *Die zu zwei vorgelegten Ebenenbüscheln a, b gehörenden gemeinsamen Loxodromenkreise verteilen sich auf zwei gleichartige Kreiskongruenzen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$. Die Kreisachsen bilden zwei elliptische Strahlnetze, deren Brennlinien die restlichen Gegenkantenpaare $e, \bar{e}$ bzw. $f, \bar{f}$ des durch a, b bestimmten isotropen Vierflachs sind. Die Kreismittelpunkte erfüllen dementsprechend zwei das Gemeinlot von a und b enthaltende und die Winkel zwischen a und b halbierende Ebenen. Die Kreisebenen umhüllen zwei orthogonale hyperbolische Paraboloide, welche durch die Erzeugendenvierseite $a f b \bar{f}$ bzw. $a e b \bar{e}$ gehen. Die Kugeln, die die Loxodromenkreise zu Großkreisen haben, weisen mit je einem der beiden einschaligen Hyperboloide, welche das aus Gegenerzeugenden bestehende Vierseit $a f b \bar{f}$ bzw. $a e b \bar{e}$ enthalten, Doppelberührung auf.*

Man stellt im übrigen fest, daß *drei Ebenenbüschel a, b, c* insgesamt *vier gemeinsame Loxodromenkreise* haben: Deren LAGUERREsche Punktepaare ergeben sich im Schnitt der drei durch a, b, c legbaren Minimalebenenpaare. Die Mittelpunkte lassen sich im Schnitt von je drei Mittelebenen finden.

3. Es seien nun außerdem die zu den beiden Ebenenbüscheln a, b gehörenden *Schnittwinkel* σ, τ vorgeschrieben. Wir haben dann in den Netzen $e \bar{e}$ und $f \bar{f}$ jene Strahlen m auszuwählen, welche mit a den Winkel $\pi/2 - \sigma$ und mit b den Winkel $\pi/2 - \tau$ bilden: Dieselben werden als Achsen die gesuchten Loxodromenkreise bestimmen.

Alle Strahlen des Netzes $e \bar{e}$, welche der ersten Bedingung genügen, werden durch

$$(\lambda u + \mu v)^2 = (u^2 + v^2 + w^2) \cdot \sin^2 \sigma \tag{14}$$

gekennzeichnet und erfüllen eine gewisse *Regelfläche 4. Grades*, die von den Ebenen $y = \text{const.}$ nach Kurven 2. Ordnung geschnitten wird. Speziell der in der Mittelebene $y = 0$ gelegene Kegelschnitt

$$(\lambda^2 Z + \mu^2 h)^2 = (\lambda^2 \mu^4 X^2 + \lambda^2 Z^2 + \mu^2 h^2) \cdot \sin^2 \sigma \tag{15}$$

gibt den Ort der Kreismittelpunkte ab. Die Kreisebenen hüllen eine gewisse, dem Paraboloid Π umschriebene und gegen die Lotrichtung a unter dem Winkel σ geneigte *Böschungstorse 4. Klasse* ein.

Die zweite Bedingung drückt sich analog aus durch

$$(\lambda u - \mu v)^2 = (u^2 + v^2 + w^2) \cdot \sin^2 \tau . \tag{16}$$

Aus (14) und (16) errechnet sich

$$u : v : w = \mu(1 + \theta) : \lambda(1 - \theta) : \pm \sqrt{4 \lambda^2 \mu^2 \csc^2 \sigma + 2(\lambda^2 - \mu^2)\, \theta - (1 + \theta^2)}, \tag{17}$$

wobei θ für $\pm \sin\tau/\sin\sigma$ steht. Damit sind die Richtungen der Achsen von vier Loxodromenkreisen erhalten worden, deren weitere Bestimmungsstücke sich mittels (7), (8) und (11) ermitteln lassen. Naturgemäß liegen diese Kreise paarweise symmetrisch bezüglich der das Gemeinlot von a und b abgebenden z-Achse.

Mit Rücksicht auf vier analoge Kreise aus $\mathfrak{F}$ gilt

Satz 2. *Unter den zu vorgeschriebenen Schnittwinkeln gehörigen gemeinsamen Loxodromen zweier Ebenenbüschel (Doppelloxodromen) befinden sich acht Kreise.*

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß diese acht Kreise mit Lineal und Zirkel konstruierbar sind.

Geben wir anstelle des Schnittwinkels σ den *Kreisradius* r vor, so wird aus der Kreiskongruenz $\mathfrak{C}$ eine einparametrige Schar von Kreisen ausgesondert, deren Achsen zufolge der aus (11) fließenden Beziehung

$$u^2 + v^2 + w^2 = \left(\frac{\lambda r}{h}\right)^2 v^2 \tag{18}$$

gegen die Mittelebene $y = 0$ feste Neigung aufweisen, also wieder eine gewisse *Regelfläche 4. Grades* bilden. Die Mittelpunkte erfüllen die *Ellipse*

$$\mu^2 X^2 + \frac{Z^2}{\mu^2} = r^2 - \frac{h^2}{\lambda^2}, \quad Y = 0, \tag{19}$$

und die Kreisebenen umhüllen wieder eine dem Paraboloid Π angeschriebene *Böschungstorse 4. Klasse.*

4. Durch Ausübung einer räumlichen *Inversion* werden die Loxodromen eines Ebenenbüschels unter Erhaltung des Schnittwinkels in die Loxodromen des entsprechenden *Kugelbüschels* transformiert, wobei insbesondere Kreise wieder zu Kreisen werden. Diesen verallgemeinerten Loxodromenbegriff zugrundelegend, möge nun im folgenden unter „*Loxodrome*" stets eine Kurve verstanden werden, welche die Kugeln eines Büschels unter festem Winkel σ schneidet. Das Büschel wird dabei durch seinen (allen Kugeln gemeinsamen) „Grundkreis" bestimmt. Unter den Loxodromen eines Kugelbüschels gibt es wiederum ∞^4 *Kreise*, und das transformierte Kriterium aus § 1 besagt: *Ein Kreis ist dann und nur dann Loxodrome eines Kugelbüschels, wenn seine beiden* LAGUERRE*schen Punkte den beiden Minimalkegeln des Büschels angehören.*

Umgekehrt liegen dann auch die LAGUERREpunkte des Büschelgrundkreises auf den beiden durch den Loxodromenkreis gehenden Minimalkegeln; die Beziehung zwischen den beiden Kreisen ist mithin eine durchaus wechselseitige[4]).

[4]) Vgl. hierzu E. v. WEBER [8]. Dort wird, nach Orientierung der Kreise, die „minimale Lage zweier Zykel" dadurch gekennzeichnet, daß deren LAGUERREsche Punkte auf einem Minimalstrahl liegen.

Die Vorgabe des *Schnittwinkels* σ sondert aus den Loxodromenkreisen eines vorgelegten Kugelbüschels eine dreiparametrige Mannigfaltigkeit aus, einen *Kreiskomplex* $\mathfrak{S}$, über dessen Aufbau wir uns genauere Kenntnis verschaffen wollen. Der Büschelgrundkreis

(20) $$a \ldots x^2 + y^2 = a^2\,, \quad z = 0$$

sei dabei ausdrücklich als reell vorausgesetzt, einerseits um die Vorstellung zu fixieren, andererseits weil nur bei einem solchen Kugelbüschel auch reelle Loxodromenkreise auftreten. Die Ebene π eines Loxodromenkreises l muß, wegen der eben erwähnten Gleichberechtigung von l und a, den Grundkreis a ebenfalls unter dem Winkel σ schneiden. Solcher Ebenen gibt es aber bloß ∞^2, und diese umhüllen das schon in § 1 betrachtete *einschalige Drehhyperboloid* Σ vom Öffnungswinkel $\pi - 2\sigma$, welches a zum Fokalkreis und die zugehörigen LAGUERREpunkte $A(0, 0, ai)$, $\bar{A}(0, 0, -ai)$ zu Brennpunkten hat:

(21) $$\Sigma \ldots \frac{x^2+y^2}{\cos^2\sigma} - \frac{z^2}{\sin^2\sigma} = a^2\,.$$

Die ∞^3 Kreise von $\mathfrak{S}$ verteilen sich mithin zu je ∞^1 auf die ∞^2 Tangentialebenen von Σ. Zur Untersuchung der *Kreisschar* in einer solchen Ebene π wollen wir dieselbe durch ihren Neigungswinkel ψ und Zentralabstand p festlegen; wir dürfen sie ohne Einschränkung als y-parallel annehmen:

(22) $$\pi \ldots x \sin\psi - z\cos\psi = p \qquad \text{mit} \qquad p^2 = a^2(\sin^2\psi - \sin^2\sigma)\,.$$

Es empfiehlt sich, die Koordinatentransformation

(23) $$\xi = x\cos\psi + z\sin\psi\,, \quad \eta = y\,, \quad \zeta = p - x\sin\psi + z\cos\psi$$

vorzunehmen (vgl. Abb. 1), derzufolge die Ebene π die Gleichung $\zeta = 0$ erhält. Zur Ermittlung der Loxodromenkreise von π haben wir nun jene LAGUERREpaare $L, \bar{L}$ aufzusuchen, die zu π symmetrisch liegen und den Minimalkegeln $\alpha, \bar{\alpha}$ durch a angehören. Mit Benützung der zu $\alpha, \bar{\alpha}$ bezüglich π symmetrischen Minimalkegel $\beta, \bar{\beta}$ können wir sagen, daß sich die Punkte $L, \bar{L}$ auf die beiden imaginären Kreise $k = \alpha\bar{\beta}$ und $\bar{k} = \bar{\alpha}\beta$ verteilen:

(24) $$k \begin{cases} \alpha \ldots (\xi - a\,i\sin\psi)^2 + \eta^2 + (\zeta - p - a\,i\cos\psi)^2 = 0 \\ \bar{\beta} \ldots (\xi + a\,i\sin\psi)^2 + \eta^2 + (\zeta + p - a\,i\cos\psi)^2 = 0\,. \end{cases}$$

Der Kreis k liegt in der imaginären Ebene

(25) $$\varepsilon \ldots a\,i\,\xi\sin\psi + p(\zeta - a\,i\cos\psi) = 0$$

und projiziert sich normal auf die Ebene π (gleichzeitig mit $\bar{k}$) als *reelle Hyperbel*

(26) $$k' = \bar{k}' \ldots \frac{-\xi^2}{\sin^2\psi - \sin^2\sigma} + \frac{\eta^2}{\sin^2\sigma} = a^2\,.$$

Diese Hyperbel stellt den *Mittenort* der Loxodromenkreisschar in π dar, die im übrigen die beiden (imaginären) Spurkreise $\alpha\,\pi$ und $\bar{\alpha}\,\pi$ der Minimalkegel berührt und allgemein von den Spurkreisen der Büschelkugeln unter bestimmten konstanten Winkeln durchsetzt wird[5]). Für den *Radius* ϱ der Loxodromenkreise findet man

$$\varrho = \zeta\, i = \frac{a \sin\psi}{p}\,(\xi - p \operatorname{ctg} \psi)\,. \tag{27}$$

Aus der Tatsache, daß die Hyperbel k' die konstante Hauptachse $a \cdot \sin\sigma$ hat und die Normalrisse A' und $\overline{A}'$ von A und $\overline{A}$ zu (konjugiert-imaginären) Brennpunkten besitzt, schließt man, daß der normal zu π über k' errichtete Zylinder der Rotationsachsen $m = L\,\overline{L}$ einem von ψ unabhängigen *Drehhyperboloid* Λ umschrieben ist, das durch den Kehlradius $a \cdot \sin\sigma$ und die Brennpunkte $A, \overline{A}$ bestimmt ist:

$$\Lambda \ldots \frac{x^2 + y^2}{\sin^2\sigma} - \frac{z^2}{\cos^2\sigma} = a^2\,. \tag{28}$$

Satz 3. *Die ∞^3 zu einem vorgeschriebenen Schnittwinkel σ gehörigen Loxodromenkreise eines Kugelbüschels mit reellem Grundkreis a verteilen sich zu je ∞^1 auf die ∞^2 Tangentialebenen eines einschaligen Drehhyperboloides Σ mit dem Öffnungswinkel $\pi - 2\sigma$ und dem Fokalkreis a. Die zugehörigen Rotationsachsen der Loxodromenkreise bestehen aus den ∞^3 Tangenten eines zweiten, konfokalen Drehhyperboloides Λ, das den Öffnungswinkel 2σ besitzt.*

Abb. 1 zeigt neben der im Aufriß (auf die xz-Ebene) dargestellten Situation dieser Gebilde im Seitenriß die Anordnung der ∞^1 Loxodromenkreise in einer Tangentialebene π von Σ. Die wichtigsten der auftretenden imaginären Elemente sind in üblicher Weise durch ihre „reellen Vertreter" (Symmetrieelemente der sie definierenden elliptischen Involutionen) repräsentiert; mit deren Hilfe läßt sich die Kreisschar in π leicht konstruieren.

5. Und nun zum Problem der *gemeinsamen Loxodromenkreise zweier Kugelbüschel*, deren Grundkreise a, b von vornherein als reell vorausgesetzt seien. Dieses Problem ist allgemeiner als das vorhin behandelte, zwei Ebenenbüschel betreffende, da zwei Kugelbüschel nur dann durch eine konforme Abbildung in zwei Ebenenbüschel überführt werden können, wenn ihre Grundkreise einen Punkt gemein haben. Nach Einführung der Minimalkegelpaare $\alpha, \overline{\alpha}$ durch a und $\beta, \overline{\beta}$ durch b läßt sich jedoch auf Grund des in § 4 aufgestellten Kriteriums die Antwort sofort geben: Die Laguerreschen Punktepaare $L, \overline{L}$ der Doppelloxodromenkreise verteilen sich auf die (konjugiert-imaginären) *Kreispaare* $e = \alpha\,\beta, \overline{e} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ oder $f = \alpha\,\overline{\beta}, \overline{f} = \overline{\alpha}\,\beta$. Die zweiparametrige Mannigfaltigkeit der gemeinsamen Loxodromenkreise besteht also auch hier aus zwei gleichwertigen *Kreiskongruenzen* $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, deren erste anschließend näher betrachtet werden soll.

[5]) Solche Kreisscharen sind in der Zyklographie wohlbekannt („*Zykelkreise*"); vgl. E. Müller-J. Krames [6].

Die *Ortsfläche de Kreismittelpunkte* M, die ja die *Strecken* $L\,\overline{L}$ halbieren, ist eine *zyklische Schiebfläche 4. Ordnung*, deren erzeugende (imaginäre) Kreise von M durchlaufen werden, wenn L bzw. $\overline{L}$ fest bleibt.

Die *Kongruenz der Kreisachsen* $m = L\,\overline{L}$ ist durch die Brennkreise $e, \overline{e}$ bestimmt, hat also im allgemeinen den *Feld- und Bündelgrad 4.*

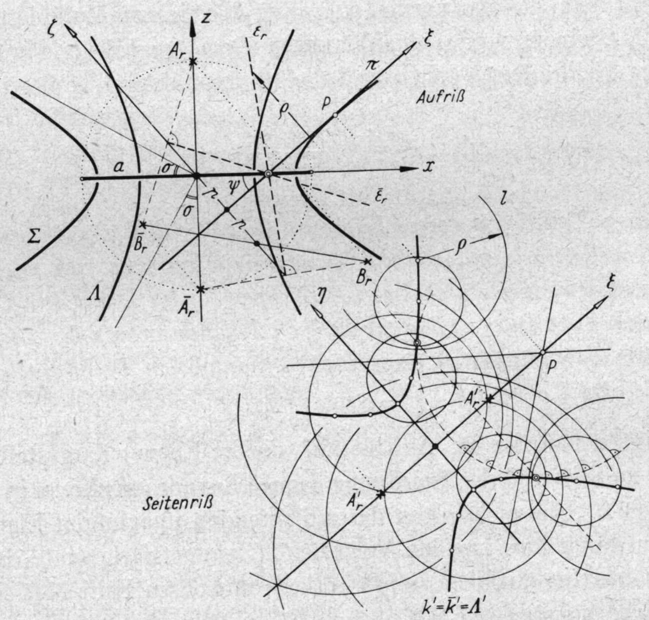

Abb. 1: Anordnung der zu einem bestimmten Schnittwinkel gehörigen Loxodromenkreise eines Kugelbüschels

Das *Hüllgebilde* Π *der Kreisebenen* π, die ja die Symmetrieebenen der Punktepaare $L, \overline{L}$ darstellen, ist, wie man unschwer einsieht, identisch mit dem Mittenort jener ∞^2 Kugeln ω, welche e und $\overline{e}$ berühren. Unter diesen Kugeln sind zwei, die den Kreis e enthalten, ebenso zwei weitere, die durch $\overline{e}$ gehen; die zugehörigen Mittelpunkte seien mit E_1, E_2 bzw. $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$ bezeichnet. Lassen wir nun etwa $\overline{L}$ auf dem Kreis $\overline{e}$ wandern, während wir L auf e festhalten, so umhüllt die Ebene π einen der Fläche Π umschriebenen *Kegel 2. Grades* Γ, der seine Spitze im Zentrum der Kugel $L\,\overline{e}$ hat. Der Mittelpunkt P der zugehörigen Kugel ω durchläuft dabei die Berührungslinie von Γ und Π; da dieselbe der Normalebene von e in L angehören muß, handelt es sich um einen *Kegelschnitt*, der überdies die Punkte E_1 und E_2 enthält, weil unter den Kugeln ω auch jene beiden vorkommen, die durch e gehen. Die fragliche Hüllfläche Π ist demnach eine *Fläche 4. Ordnung und 4. Klasse* vom Typus der DUPINschen

Zyklide, nämlich mit vier konischen Knotenpunkten $E_1, E_2, \overline{E}_1, \overline{E}_2$ und einem Doppelkegelschnitt[6]).

Besonders hervorzuheben wäre die spezielle Annahme, bei welcher sich die Grundkreise a und b selbst *in loxodromischer Lage* befinden, so daß etwa α und β und ebenso $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ einander berühren. Die früheren Schnittkreise $e, \overline{e}$ sind jetzt zu (doppelt zählenden) *Minimalgeraden* entartet, und beim zugehörigen Kreissystem $\mathfrak{E}$, das Rotationssymmetrie um das Gemeinlot von e und $\overline{e}$ aufweist, treten bedeutende Reduktionen ein: Die Achsenkongruenz ist das *Drehnetz* $e\overline{e}$, die Kreismitten erfüllen die *Symmetrieebene* des Gemeinlots von e und $\overline{e}$, und die Kreisebenen bilden ein *Bündel*, dessen Scheitel das Gemeinlot halbiert. Bemerkenswert ist außerdem, daß *irgend zwei Kreise aus* $\mathfrak{E}$ *stets loxodromisch zueinander liegen.*

Erwähnt sei weiterhin, daß *drei Kugelbüschel* im allgemeinen insgesamt *acht gemeinsame Loxodromenkreise* haben; dieselben lassen sich mit Lineal und Zirkel konstruieren, denn ihre LAGUERREpunkte werden im Schnitt von je drei in den Büscheln enthaltenen Nullkugeln erhalten. Eine Ausnahme tritt ein, wenn die Büschelgrundkreise paarweise loxodromisch liegen, weil dann zufolge der vorhin gemachten Bemerkung ∞^2 gemeinsame Loxodromenkreise existieren.

Schreiben wir schließlich, wieder zum Ausgangsproblem zurückkehrend, für die beiden gegebenen Kugelbüschel a, b auch noch die *Schnittwinkel* σ bzw. τ vor, so wird es unter den zugehörigen Doppelloxodromen im allgemeinen nur mehr endlich viele Kreise geben. Ihre Ebenen müssen einerseits, solange wir im System $\mathfrak{E}$ bleiben, die zugehörige Fläche 4. Grades Π berühren, andererseits aber auch (gemäß Satz 3) jene beiden Drehhyperboloide Σ und T, die durch die Fokalkreise a bzw. b und die Öffnungswinkel $\pi - 2\sigma$ bzw. $\pi - 2\tau$ bestimmt sind. Solcher Ebenen gibt es $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, und ebensoviele im System $\mathfrak{F}$. Es gilt somit

Satz 4. *Unter den zu vorgeschriebenen Schnittwinkeln gehörigen gemeinsamen Loxodromen zweier Kugelbüschel (Doppelloxodromen) befinden sich im allgemeinen 32 Kreise.*

Die Möglichkeit von *Büschelpaaren mit unendlich vielen gemeinsamen Loxodromenkreisen* folgert man aus der Betrachtung der VILLARCEAU*schen Kreise eines Torus* Φ, welche nicht nur Loxodromen des Meridianbüschels a, sondern auch eines dazu und zum Torus orthogonalen Kugelbüschels b sind; die Schnittwinkel σ, τ sind dabei komplementär. Durch konforme Abbildung gelangt man zu zwei *orthogonalen Kugelbüscheln* a, b, unter deren zu komplementären Schnittwinkeln gehörigen

[6]) Enz. Math. Wiss. III C 10, 1571. — Daß die Hüllfläche π die *Klasse 4* hat (was später benötigt wird), kann man rasch direkt einsehen. Es geht darum, die Ebenen π durch eine allgemeine Gerade g abzuzählen. Man lasse den Kreis $\overline{e}$ um g rotieren und schneide die so erzeugte Drehfläche 4. Ordnung mit dem Kreis e: Von den 8 Schnittpunkten liegen zwei doppelt zählende auf dem absoluten Kegelschnitt (Doppelkurve), und die restlichen vier, die als LAGUERREpunkte L brauchbar sind, führen auf 4 Ebenen durch g.

Doppelloxodromen sich ∞^1 Kreise finden, nämlich die VILLARCEAUschen Kreise einer gewissen DUPINschen *Zyklide* Φ, die a und b zu Fokalkreisen hat[7]). Im Rahmen der hier entwickelten Vorstellungen ist dieser Spezialfall dadurch ausgezeichnet, daß die LAGUERREschen Punkte $A, \bar{A}$ von a auf b, und daher auch die LAGUERREpunkte $B, \bar{B}$ von b auf a liegen. Das Vierseit $A B \bar{A} \bar{B} = e f \bar{e} \bar{f}$ besteht aus Minimalstrahlen und die Kreise a, b liegen sozusagen „doppelt-loxodromisch". Die beiden Ebenenörter Π sind zu einem und demselben Ebenenbündel ausgeartet, dessen Scheitel P das Zentrum der (eindeutig bestimmten und nullteiligen) Kugel ω ist, die das genannte Minimalvierseit enthält. Jede Ebene durch P schneidet die Kreise a und b stets unter komplementären Winkeln. Jede der ∞^1 aus P an das Hyperboloid Σ gehenden Tangentialebenen π berührt mithin auch das Hyperboloid T, falls σ und τ komplementär sind; hierzu gehören dann auch sowohl in $\mathfrak{E}$ wie in $\mathfrak{F}$ je ∞^1 gemeinsame Loxodromenkreise. Sind σ und τ hingegen nicht komplementär, so kann es offenbar überhaupt keine eigentlichen Doppelloxodromenkreise geben.

6. Das Problem der Doppelloxodromen zweier Kugelbüschel a, b läßt sich noch von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachten, nämlich als nichteuklidische Verallgemeinerung des Problems der Doppelloxodromen zweier Ebenenbüschel, wenn man sich des POINCARÉ-WELLSTEIN*schen „konformen" Raummodells* bedient[8]). Dieses stützt sich auf eine euklidische (reelle oder nullteilige) *Fundamentalkugel* Ω und sieht die zu Ω inversen Punktepaare, bzw. die zu Ω orthogonalen Kreise und Kugeln als die „Punkte", „Geraden" und „Ebenen" einer nichteuklidischen Raumgeometrie an, deren Winkelmetrik sich im übrigen mit der euklidischen deckt. Nimmt man nun für Ω die (im allgemeinen eindeutig bestimmte) *Orthogonalkugel* von a und b — sie enthält die vier LAGUERREpunkte $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ — so sind die Kugelbüschel a und b als „Ebenenbüschel" im Sinne der erklärten nichteuklidischen Geometrie anzusehen; die Loxodromen und allfällige Kreise unter ihnen behalten auch in der neuen Auffassung ihre Bedeutung.

Mittels einer quadratischen, von G. DARBOUX angegebenen Punkttransformation, die jedem zu Ω inversen Punktepaar den Pol seiner Symmetrieebene bezüglich Ω zuordnet [2], läßt sich nun sofort der Übergang zum *„projektiven" Raummodell* CAYLEY-KLEINscher Prägung vollziehen, in welchem die Punkte, Geraden und Ebenen wieder ihre gewohnte Bedeutung haben. Dafür unterscheidet sich jedoch die Messung der Winkel (und Längen) von der euklidischen; sie gründet sich in bekannter Weise auf Doppelverhältnisbeziehungen zur „absoluten" Quadrik Ω [3]. Als „Kreise" sind jetzt die Ω doppeltberührenden Kegelschnitte anzusehen.

Die Kugelbüschel a, b werden vermöge der erwähnten DARBOUX-*Transformation* in zwei Ebenenbüschel a^*, b^* verwandelt, deren nichteuklidisches (CAYLEY-KLEIN-

[7]) Die übrigen Doppelloxodromen verlaufen auf den konfokalen Zykliden und sind invers zu den bekannten *Torusloxodromen*, die der Verfasser kürzlich genauer untersucht hat. Vgl. W. WUNDERLICH [10].

[8]) Siehe WEBER-WELLSTEIN [9]. Vgl. auch E. KRUPPA [4].

sches) Problem gemeinsamer Loxodromenkreise in weitgehender Analogie zum euklidischen Vorbild in § 2 behandelt werden kann. Unter „Minimalebenen" hat man jetzt die Ω berührenden Ebenen, unter „Minimalkegeln" die Ω umschriebenen Kegel zu verstehen. Ein Paar „Laguerrescher Punkte" bestimmt jetzt allerdings im Schnitt der von ihnen ausstrahlenden Minimalkegel zwei Kreise. Die Laguerreschen Punktepaare der *Doppelloxodromenkreise* verteilen sich nun auf die restlichen Gegenkantenpaare $e^*, \overline{e}^*$ und $f^*, \overline{f}^*$ des „isotropen Tetraeders", das von den durch a^* und b^* legbaren Minimalebenen gebildet wird. Für den *Mittenort* wie für den *Ebenenort* der beiden zugehörigen Kreiskongruenzen $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{F}^*$ findet man durchwegs *Quadriken.* Der Nachweis stützt sich auf die Tatsache, daß die Mittelpunkte $M, \overline{M}$ der zu einem Laguerrepaar $L, \overline{L}$ gehörigen Kreise — als Halbierungspunkte der Strecke $L\overline{L}$ — durch $L, \overline{L}$ wie auch durch Ω harmonisch getrennt werden; sie sind daher wechselseitig die absoluten Pole der Kreisebenen π bzw. $\overline{\pi}$. Innerhalb $\mathfrak{E}^*$ etwa entsprechen einander M und $\overline{M}$ in der windschiefen Involution $\mathfrak{J}$ mit den Achsen e^* und $\overline{e}^*$. Da ferner M und π vereinigt liegen, sind sie Kernelemente jener Korrelation, die sich aus $\mathfrak{J}$ und der Polarität an Ω zusammensetzt: Der Ort aller M (und $\overline{M}$) ist mithin die *Punktkernquadrik*, das Hüllgebilde Π aller π (und $\overline{\pi}$) die dazu polare *Ebenenkernquadrik* der genannten Korrelation; Π enthält das Erzeugendenvierseit $afb\overline{f}$.

Nach Vorgabe der *Schnittwinkelwerte* σ und τ zu den beiden Büscheln sind nur mehr endlich viele Loxodromenkreise zu erwarten. Unter Berufung auf die auch im Nichteuklidischen geltende (und unschwer direkt einzusehende) Tatsache, daß die Ebene π jedes zum Winkel σ gehörenden Loxodromenkreises l^* des ersten Ebenenbüschels dessen Achse a^* unter demselben Winkel σ schneidet, stellt man zunächst fest, daß sich die ∞^3 Kreise l^* zu je ∞^1 auf ∞^2 Ebenen verteilen. Diese Ebenen werden offenbar durch die ∞^2 nichteuklidischen Bewegungen, welche die Achse a^* festlassen (zusammensetzbar aus Drehungen um a^* bzw. die absolute Polare $\overline{a}^*$), untereinander vertauscht, hüllen also eine Clifford-*Quadrik* Σ ein. Eine analoge Rolle übernimmt für das andere Ebenenbüschel eine zweite Clifford-Quadrik T mit den Achsen $b, \overline{b}^*$. Innerhalb der Kreiskongruenz $\mathfrak{E}^*$ gelangen wir dann über die acht gemeinsamen Tangentialebenen π der drei Quadriken Σ, T und Π zu *acht Doppelloxodromenkreisen*, wozu *weitere acht* innerhalb $\mathfrak{F}^*$ treten.

Machen wir anschließend die Darboux-Transformation wieder rückgängig, so erhalten wir — in Übereinstimmung mit Satz 4 — insgesamt 32 gemeinsame und die vorgeschriebenen Schnittwinkel σ, τ aufweisende (euklidische) Loxodromenkreise der ursprünglichen Kugelbüschel a, b; diese Kreise liegen übrigens paarweise invers zur Orthogonalkugel Ω.

Der oben erwähnte Ausnahmefall mit ∞^1 gemeinsamen Loxodromenkreisen beruht in nichteuklidischer Deutung darauf, daß die beiden Clifford-Quadriken Σ und T wegen $a^* = \overline{b}^* (\overline{a}^* = b^*)$ und $\sigma + \tau = \pi/2$ zusammenfallen.

Literaturverzeichnis

[1] W. Blaschke, Isotrope Vierflache. Arch. der Math. **1**, 182—189 (1949).

[2] G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. Paris 1873. 173 ff.

[3] F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Berlin 1928.

[4] E. Kruppa, Darstellende Geometrie im Kugelgebüsch. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa, **140**, 369—397 (1931).

[5] E. Müller, Kreise als Loxodromen. Arch. Math. Phys. **26**, 73—96 (1918).

[6] E. Müller-J. Krames, Die Zyklographie. Wien 1929. S. 56, 94.

[7] G. Scheffers, Besondere transzendente Kurven. Enz. Math. Wiss. III D 4, Nr. 34.

[8] E. v. Weber, Zur Geometrie der Kreise im Raum. Arch. Math. Phys. **7**, 286—295 (1904).

[9] H. Weber-J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. Leipzig 1905, Bd. II, S. 52—82.

[10] W. Wunderlich, Über die Torusloxodromen. Monatsh. Math. **56**, 313—334 (1952).

Eingegangen am 21. 8. 1954