

Über Loxodromen auf Zylindern 2. Grades.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 1 Textabbildung.

(Eingelangt am 15. Dezember 1955.)

1.

Unter den *Loxodromen* eines Ebenenbüschels, also jenen Kurven, die sämtliche Ebenen durch eine feste Achse a unter einem konstanten Winkel schneiden, gibt es bekanntlich auch *Kreise*, und diesen kommt eine besondere Bedeutung zu; es handelt sich bei ihnen im Grunde genommen um die *Villarcauschen Kreise* der *Torusflächen* mit der Achse a .¹ Diese Kreise erscheinen im Normalriß auf eine zu a senkrechte Ebene — in Hinkunft kurz als „Grundriß“ angesprochen — bekanntlich als *Ellipsen*, die einen Brennpunkt auf a haben. Dies mag zum Anlaß genommen werden, um allgemein nach jenen Loxodromen zu fragen, welche sich im Grundriß auf einen *Kegelschnitt* abbilden, der einen Brennpunkt auf a hat, d. h. nach Loxodromen, welche auf einem Zylinder 2. Grades verlaufen, der die Loxodromenachse zur Brennlinie hat. Man stößt dabei auf eine Sorte von speziellen Raumkurven, die auch noch in anderer Hinsicht bemerkenswert sind: Es sind *affine Böschungslinien*, die als *vierfache Loxodromen* angesehen werden können und die *D-Kurven* des Trägerzylinders 2. Grades darstellen; sie hängen überdies mehrfach mit den *Drehflächen konstanter Krümmung* zusammen.

2.

Sei mit $\varepsilon > 0$ und $p > 0$

$$r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = p \quad (1)$$

die Polargleichung des gegebenen Kegelschnitts \mathcal{L} . Die zum Schnitt-

¹ Vgl. hierzu E. Müller: Kreise als Loxodromen, Arch. Math. Phys. 26 (1918), 73–96 und W. Wunderlich: Kreise als Doppelloxodromen, Arch. Math. (im Druck).

winkel σ gehörigen Loxodromen des Ebenenbüschels $\varphi = \text{const}$ sind gekennzeichnet durch das Bogenelement $ds = r d\varphi \sin \sigma$, also durch die Differentialgleichung

$$dr^2 + dz^2 = m^2 r^2 d\varphi^2 \text{ mit } m = \text{ctg } \sigma. \quad (2)$$

Die gesuchten Loxodromen stellen sich bei gleichzeitigem Bestehen der Gleichungen (1) und (2) ein.

Die Elimination von φ aus (1) und (2) führt über

$$d\varphi = \frac{p dr}{r \sqrt{\varepsilon^2 r^2 - (p - r)^2}}$$

auf die Differentialgleichung

$$dz^2 = \frac{m^2 p^2 - \varepsilon^2 r^2 + (p - r)^2}{\varepsilon^2 r^2 - (p - r)^2} dr^2, \quad (3)$$

welche die *Trägerdrehflächen* der betrachteten Loxodromen charakterisiert. Jede der zur Untersuchung stehenden Loxodromen l verläuft ganz auf einer solchen Drehfläche Φ , ihre sämtlichen Meridiane unter dem konstanten Winkel σ schneidend.

Unter vorläufiger Zurückstellung des parabolischen Falls $\varepsilon = 1$ (vgl. diesbezüglich Abschn. 7) führen wir jetzt vermöge

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b^2 = pa, \quad e = \varepsilon a \quad (4)$$

die Halbachsen a, b und die lineare Exzentrizität e des Grundkegelschnitts l (1) ein; überdies vollziehen wir in (3) die Substitution

$$r = a - u. \quad (5)$$

Damit stellt sich der *Meridian* der Drehfläche Φ in den kartesischen Koordinaten u, z durch das elliptische Integral

$$z = \pm \int \sqrt{\frac{u^2 - f^2}{e^2 - u^2}} du \text{ mit } f^2 = e^2 - m^2 b^2 \quad (6)$$

dar. Dieser Meridian gehört nun auch zu jener *zweiten Drehfläche* Ψ , die durch Deutung von u und z als Zylinderkoordinaten erklärt ist und die sich bekanntlich durch *konstante Gaußsche Krümmung*

$$K = \frac{1}{e^2 - f^2} = \frac{1}{m^2 b^2} = \frac{1 - \varepsilon^2}{p^2 \text{ctg}^2 \sigma} \quad (7)$$

auszeichnet. Unsere Loxodromen verlaufen mithin für $\varepsilon \neq 1$ auf Drehflächen Φ , die als Hüllgebilde einer um die Loxodromenachse kreisenden

Drehfläche Ψ konstanter Krümmung entstehen, deren eigene Achse im Abstand a parallel zur Loxodromenachse angeordnet ist.

Für $\varepsilon < 1$ — Ellipse als Loxodromengrundriß — ist die erzeugende Drehfläche Ψ gemäß (7) von positiver konstanter Krümmung. Die drei bekanntesten Formen solcher Flächen, der *Spindeltypus*, die *Kugel* und der *Wulsttypus*, stellen sich ein, je nachdem $f^2 \stackrel{<}{=} 0$, also $|\cos \sigma| \stackrel{<}{=} \varepsilon$. Im zweiten Fall stößt man auf die Villarceauxschen Loxodromenkreise des Torus, welche den Ausgangspunkt bildeten; der dritte Fall ist in Abb. 1 illustriert.

Für $\varepsilon > 1$ — Hyperbel als Loxodromengrundriß — ist die Drehfläche Ψ von negativer konstanter Krümmung, und zwar stets vom Ringtypus.

Die übrigen Loxodromen auf den Drehflächen Φ gehen aus den hier betrachteten Loxodromen durch die einfache Raumtransformation $\varphi' = k\varphi$ (mit konstantem k) hervor, die von E. Müller „*achbiale Winkelstreckung*“ genannt wurde¹. Ihre Grundrisse sind mithin vom Brennpunkt aus winkelgezernte Kegelschnitte².

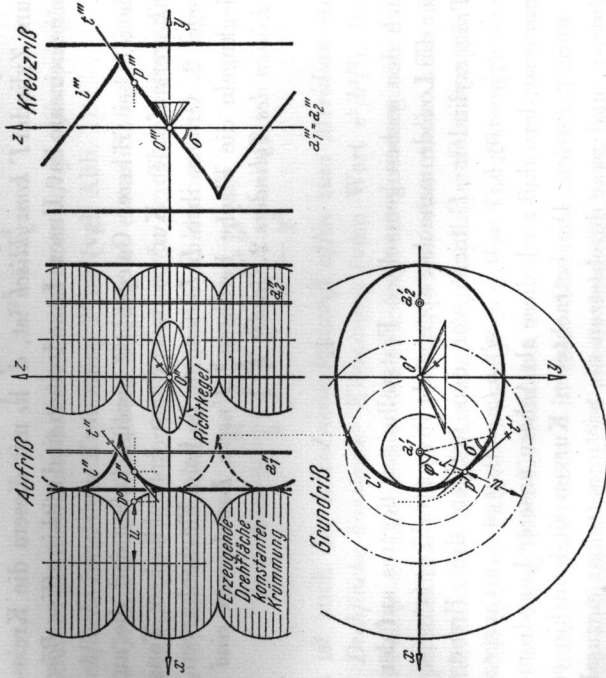


Abb. 1: Darstellung einer zur Annahme $\varepsilon = 2/3, \sigma = 52,5^\circ$ gehörigen Loxodrome.

² Eine ausführliche Darstellung der Verhältnisse auf dem Torus findet man bei W. Wunderlich: Über die Torusloxodromen, *Mh. Math.* 56 (1952), 313 — 334.

3.

Gehen wir nun — weiterhin unter Beschränkung auf $\varepsilon \neq 1$ — mittels

$$x = e + r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \tag{8}$$

zu kartesischen Koordinaten über, dann kommt dem über dem Grundkegelschnitt l (1) errichteten Zylinder 2. Grades Γ die Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{9}$$

zu. Für die auf Γ verlaufenden Loxodromen nimmt die Bedingung $r \, d\varphi = ds \cdot \sin \sigma$ wegen

$$r = a - \varepsilon x \tag{10}$$

und

$$\begin{aligned} (r \, d\varphi)^2 &= dx^2 + dy^2 - dr^2 = (1 - \varepsilon^2) dx^2 + dy^2 \\ & b^2 dx^2 + a^2 dy^2 = a^2 \sin^2 \sigma \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) \end{aligned} \tag{11}$$

an. Man ersieht daraus, daß die Tangenten der Loxodrome parallel sind zu den Erzeugenden eines Kegels 2. Grades, der durch (11) gekennzeichnet, also zum Zylinder Γ konzyklisch ist, d. h. mit diesem die Kreisschnitt-ebenen gemeinsam hat. Unsere Loxodromen sind mithin affine Böschungslinien.

Wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe, sind die auf einer Quadrik verlaufenden Kurven mit einem konzyklischen Tangentenrichtkegel 2. Grades ihre *D-Linien*, d. h. jene Flächenkurven, deren Schmiegekugeln die Fläche berühren.³ Unsere Loxodromen sind mithin die *D-Linien* des Zylinders 2. Grades Γ .

4.

Nach den soeben gemachten Feststellungen liegt es auf der Hand, daß der die Loxodromenachse abgebende Brennstrahl a_1 ($x = e, y = 0$) des Trägerzylinders Γ nicht vor den übrigen drei Brennstrahlen $a_2(x = -e, y = 0), b_1(x = 0, y = e), b_2(x = 0, y = -e)$ ausgezeichnet sein kann, sondern daß auch diese als Achsen unserer Loxodrome angesehen werden dürfen. Die betrachteten Kurven sind mithin *viertache Loxodromen*, und zwar durchsetzen sie, wie unmittelbar einzusehen ist, die Ebenenbüschel a_1 und a_2 unter demselben konstanten Winkel σ ,

³ W. Wunderlich: Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien auf Quadriken, *Mh. Math.* 55 (1951), 76—81.

die (imaginären) Büschel b_1 und b_2 hingegen unter einem anderen (u. U. gleichfalls reellen) gemeinsamen Winkel τ , wobei

$$\sin^2 \sigma : \sin^2 \tau = b^2 : a^2 = (1 - \varepsilon^2) : 1. \tag{12}$$

Diese Beziehung ergibt sich, wenn man in der invarianten Bedingung (11) x und y, a und b , sowie σ und τ vertauscht.

Es liegt hier ein Sonderfall eines allgemeineren, bei anderer Gelegenheit dargelegten Sachverhaltes vor, demzufolge die D-Linien eines Kegels 2. Grades Loxodromen der sechs Brennebenenbüschel des Kegels sind,⁴ im gegenständlichen Grenzfall des elliptischen oder hyperbolischen Zylinders bleiben nur vier eigentliche Büschel übrig.

5.

Vergleich von (5) und (10) liefert $u = \varepsilon x$ und damit auf Grund von (6) die folgende Darstellung für den Aufriß (zx -Projektion) unserer Loxodromen:

$$z = \pm \varepsilon \int \sqrt{\frac{x^2 - \varepsilon^{-2} f^2}{a^2 - x^2}} dx. \tag{13}$$

Das bedeutet geometrisch, daß der Loxodromenaufriß affin zum Meridian der Drehfläche konstanter Krümmung Ψ ist (vgl. Abb. 1).

Aus Gründen der Gleichberechtigung ist etwas Entsprechendes für den Kreuzriß (yz -Projektion) zu erwarten. In der Tat, geht man in (13) mittels (9) zur Veränderlichen y über, so erhält man

$$z = \pm \frac{e\iint}{b} \int \sqrt{\frac{y^2 - m^2 b^4 e^{-2}}{b^2 - y^2}} dy. \tag{14}$$

Mithin ist auch der Loxodromenkreuzriß affin zum Meridian einer gewissen Drehfläche konstanter Krümmung (vom Wert e^2/b^2). Im elliptischen Fall ($\varepsilon < 1$) handelt es sich allerdings um eine imaginäre Affinität, im hyperbolischen Fall ($\varepsilon > 1$) liegt jedoch eine reelle Affinität vor.

Denkt man sich bei elliptischem Grundzylinder Γ in dem der Abb. 1 zugrundeliegenden Fall $\cos^2 \sigma < \varepsilon^2 (\varepsilon^2 > 0)$ den Tangentenrichtkegel (11) durch Streckung der z -Koordinaten in einen Drehkegel verwandelt, so gehen unsere Loxodromen l in echte Böschungslinien auf dem unveränderten Zylinder über. Wird dieser schließlich durch Streckung der y -Abstände in einen Drehzylinder transformiert, so hat man (mit y als

⁴ W. Wunderlich: Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D-Kurven von Kegeln 2. Grades, *Mh. Math.* 58 (1954), 57—62.

Lotrichtung) das Ergebnis, daß die auf einem waagrechteten Drehzylinder verlaufenden Böschungslinien im Grundriß affin zu den Meridiankurven wulstartiger Drehflächen konstanter positiver Krümmung erscheinen.⁵

6.

Lassen wir p und ε gleich stark über alle Grenzen wachsen ($p/\varepsilon \rightarrow e$), so plattet sich der hyperbolische Grundzylinder zur yz -Ebene ab und wir gelangen mit $a \rightarrow 0$, $b^2 \rightarrow -e^2$ zu ebenen (Doppel-) Loxodromen

$$z = \pm \int \sqrt{\frac{m^2 e^2 - y^2}{e^2 + y^2}} dy \tag{15}$$

mit dem parallelen Achsenpaar $x = \pm e$, $y = 0$. Jede dieser speziellen Loxodromen, auf die schon bei früherer Gelegenheit hingewiesen wurde⁶, ist der Meridian einer Drehfläche konstanter negativer Krümmung vom konischen Typ und liegt auf zwei weiteren, spiegelgleichen Drehflächen konstanter negativer Krümmung vom Ringtypus, beschrieben durch

$$z = \pm \int \sqrt{\frac{(1+m^2)e^2 - r^2}{r^2 - e^2}} dr. \tag{16}$$

Die übrigen Loxodromen einer solchen pseudosphärischen Drehfläche gehen aus den hier genannten ebenen durch achsiale Winkelzerrung hervor, erscheinen also im Grundriß als sogenannte *Ährenkurven*⁷.

7.

In dem bisher zurückgestellten Grenzfall $\varepsilon = 1$ liegt ein parabolischer Grundzylinder Γ vor. Die Differentialgleichung (3) der auf ihm verlaufenden Loxodromen des Brennebenenbüschels reduziert sich jetzt auf

$$dz^2 = \frac{(1+m^2)p - 2r}{2r - p} dr^2 \tag{17}$$

und ist elementar integrierbar. Setzen wir etwa

⁵ Eine solche Böschungslinie findet sich bei E. Müller-J. Krames: Die Zyklographie (Wien 1929), 368.

⁶ W. Wunderlich: Über die ebenen Loxodromen, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 162 (1953), 285-292.

⁷ Die Loxodromen der eigentlichen Pseudosphäre (mit einer Traktrix als Meridian) bilden sich im Grundriß auf hyperbolische Spiralen ab.

$$r - \frac{p}{2} = \frac{q}{2} (1 - \cos \theta) \text{ mit } q = \frac{m^2 p}{2}, \tag{18}$$

so geht (17) über in

$$dz = \pm \frac{q}{2} (1 + \cos \theta) d\theta,$$

so daß — bei Beschränkung auf das obere Vorzeichen und Unterdrückung der Integrationskonstante —

$$z = \frac{q}{2} (\theta + \sin \theta). \tag{19}$$

Gehen wir vermöge

$$x = r \cos \varphi - \frac{p}{2}, y = r \sin \varphi \tag{20}$$

zu kartesischen Koordinaten über, so kommt dem Grundzylinder die Gleichung

$$2p x + y^2 = 0 \tag{21}$$

zu, und mit Rücksicht auf $x = \frac{1}{2} p - r$ finden wir über (18)

$$x = -\frac{q}{2} (1 - \cos \theta), y = \pm mp \sin \frac{\theta}{2}, \tag{22}$$

womit zusammen mit (19) eine vollständige Parameterdarstellung unserer Loxodrome vorliegt. Dieselbe erscheint im *Aufriß* (auf die xz -Ebene) als *gemeine Zykloide*, deren Rollkreisdurchmesser den Wert q hat. Eine kongruente Zykloide gibt den Meridian der Trägerdrehfläche Φ ab. Die im *Kreuzriß* auftretende Bildkurve kann als *Orthogonaltrajektorie einer Translationsschar von Sinuslinien* $y = mp \cdot \sin(z/p + \text{const})$ gedeutet werden.

Die vorliegende Loxodrome durchsetzt auch das uneigentliche Brennebenenbüschel $y = \text{const}$ unter dem festen Winkel σ , ist daher eine *echte Böschungslinie* für die Lotrichtung y und genügt der Tangentenbedingung

$$dx^2 + dz^2 = m^2 dy^2. \tag{23}$$

Diese Böschungslinien haben als Grenzform der wohlbekannteren Kurven konstanter Steigung auf Drehquadraten mit lotrechter Achse gelegentlich Beachtung gefunden.⁸

⁸ Z. B. bei Müller-Krames, a. a. O., S. 372.