

Über die Evolutoiden der Ellipse

Verdreht man in der Ebene sämtliche Tangenten einer gegebenen Kurve k um ihre Berührungspunkte um den gleichen Winkel α , so erhält man im Hüllgebilde der Neulagen für $\alpha = \pi/2$ die *Evolute*, für $\alpha \neq \pi/2$ eine «*Evolutoide*» von k . Für die durch kontinuierliches Anwachsen des Drehwinkels α von 0 bis π über die Evolutoiden als Zwischenstadien bewirkte Umorientierung einer Kurve k hat L. LOCHER-ERNST kürzlich das Beispiel der *Ellipse* herangezogen¹⁾. Deren am angeführten Ort durch hübsche Figuren wiedergegebene Evolutoiden erwecken den Eindruck, *zwei schiefe Symmetrien* zu besitzen. Da es sich dabei keineswegs um eine einfache Folge der Symmetrieeigenschaften der Ausgangskurve handeln kann, soll diese Vermutung hier auf analytischem Wege nachgeprüft werden; es wird sich dabei auch ein bisher anscheinend nicht bemerkter Zusammenhang der Ellipseevolutoiden mit einer sehr bekannten Kurvenfamilie ergeben.

Wir gehen von der üblichen Parameterdarstellung der Ellipse in kartesischen Normalkoordinaten aus:

$$x = a \cos \omega, \quad y = b \sin \omega. \quad (1)$$

¹⁾ L. LOCHER-ERNST, *Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute*. *El. Math.* 8, 73–75 (1953).

Bezeichnet τ den Tangentenwinkel gegen die x -Achse, so gelangt man zu der um α verdrehten Lage der Tangente durch den Ansatz

$$\frac{y - b \sin \omega}{x - a \cos \omega} = \operatorname{tg}(\tau + \alpha) \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos \omega}{a \sin \omega}.$$

Auswertung führt unter Verwendung der Abkürzungen $\cos \alpha = \lambda$, $\sin \alpha = \mu$ auf die Darstellung

$$\left. \begin{aligned} (a \mu \sin \omega - b \lambda \cos \omega) x - (a \lambda \sin \omega + b \mu \cos \omega) y \\ = (a^2 - b^2) \mu \sin \omega \cos \omega - a b \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Es liegt nahe, vermöge

$$x' = \lambda x + \mu y, \quad y' = -\mu x + \lambda y \quad (3)$$

eine *Drehung des Koordinatensystems* um den Winkel α vorzunehmen und zur weiteren Vereinfachung die *affine Streckung*

$$x^* = x', \quad y^* = \frac{a}{b} y' \quad (4)$$

anzuschliessen. Die Evolutoiden l wird dabei in eine Kurve l^* transformiert, die durch die Tangentengleichung

$$x^* \cos \omega + y^* \sin \omega = p - q \sin \omega \cos \omega, \quad (5)$$

mit

$$p = \lambda a, \quad q = \frac{\mu (a^2 - b^2)}{b}$$

beschrieben wird. Der Vollständigkeit halber sei auch ihre Punktgleichung angeführt, die sich aus (5) und der Ableitung nach ω leicht berechnen lässt:

$$x^* = p \cos \omega - q \sin^3 \omega, \quad y^* = p \sin \omega - q \cos^3 \omega. \quad (6)$$

Durch Rückkehr über die Transformationen (4) und (3) gelangt man zu einer einfachen Parameterdarstellung der Ellipsenevolutoiden selbst.

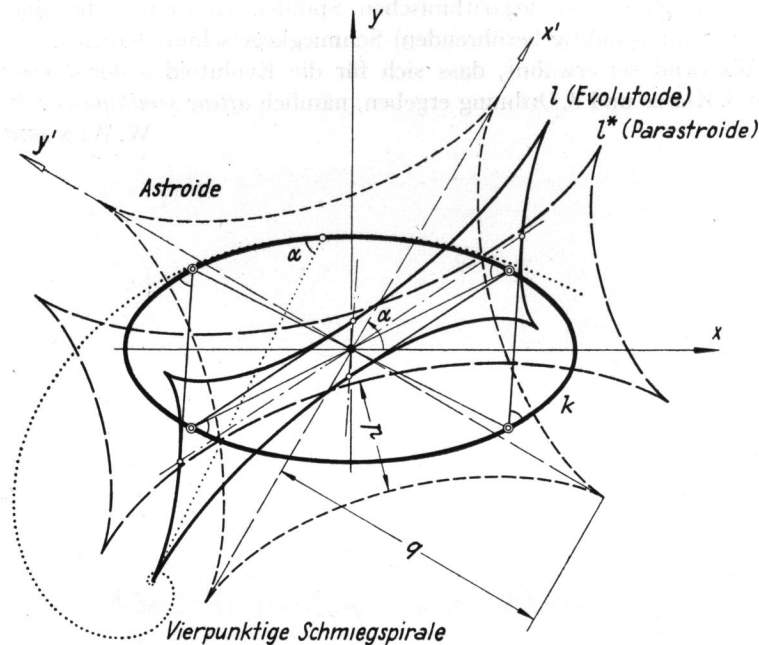
Zur Klärung der aufgeworfenen Frage nach den Symmetrien genügt aber bereits die Tangentengleichung (5). Vertauschung von ω mit $\pm \pi/2 - \omega$ lässt nämlich sofort erkennen, dass die Kurve l^* *spiegelsymmetrisch* bezüglich der Geraden $y^* = \pm x^*$ ist. Hieraus folgt nun sofort die vermutete Symmetrie der Evolutoiden l : Ihre Symmetrieachsen $a(-\mu x + \lambda y) = \pm b(\lambda x + \mu y)$ gehen durch Drehung um den Winkel α aus den beiden konjugierten Ellipsendurchmessern $a y = \pm b x$ hervor, welche die Punkte $\omega = \pm \pi/4$ und $\pm 3\pi/4$ tragen und durch Längengleichheit gekennzeichnet sind. Die zu diesen Punkten gehörigen Evolutoidentangenten sind parallel zu den Symmetrieachsen und berühren die Evolutoiden in ihren auf diesen Achsen gelegenen « Scheiteln » (vgl. Figur 1). Symmetrische Tangenten und damit Punkte der Evolutoiden stammen von solchen Punktepaaren der Ellipse, deren Verbindungssehne parallel zu einem der konjugierten Durchmesser gleicher Länge verläuft.

Die Bauart der Tangentengleichung (5) lässt es angezeigt erscheinen, zu *polaren Speerkoordinaten* überzugehen, die eine (orientierte) Gerade durch ihren (vorzeichen-

begabten) Ursprungsabstand h und dessen Richtungswinkel ω festlegen. Die Gleichung der Kurve l^* schreibt sich dann

$$h = p - q \sin \omega \cos \omega \quad (7)$$

und lässt in dieser einfachen Gestalt unmittelbar erkennen, dass l^* eine im Abstand p verlaufende *Parallelkurve* der *Astroide* $\bar{h} = -q \sin \omega \cos \omega$ ist, die als Hüllkurve einer Strecke von der Länge q aufgefasst werden kann, deren Endpunkte auf den



Figur 1. Ellipsenevolutoiden und dazu affine Parastroide ($a:b = 2:1$, $\alpha = \pi/3$)

Koordinatenachsen x' , y' gleiten: Als Parallelkurve einer Hypozykloide ist die wohlbekannte «Parastroide»¹⁾ eine Radlinie 3. Stufe²⁾. Die Evolutoiden der Ellipse sind *mithin affine Parastroiden*, als solche rationale Kurven 4. Klasse und 6. Ordnung und im übrigen Radlinien 4. Stufe.

Die vier Spitzen der Parastroide l^* – und damit jene der Ellipsenevolutoiden l – ergeben sich durch Nullsetzen des Krümmungshalbmessers

$$\rho = h + h'' = p + 3q \sin \omega \cos \omega$$

für

$$\sin 2\omega = -\frac{2p}{3q} = -\frac{2ab \operatorname{ctg} \alpha}{3(a^2 - b^2)}. \quad (8)$$

¹⁾ H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Sammlg. Schubert 56, Leipzig 1908), 110ff. und 301.

²⁾ W. WUNDERLICH, *Höhere Radlinien*. Österr. Ing.-Archiv 1, 277–296 (1946). «Radlinie n -ter Stufe» wird die Bahnkurve des Endpunktes eines n -gliedrigen, gelenkigen Polygonzuges genannt, dessen Anfangspunkt fest ist und dessen einzelne (starre) Seiten mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten rotieren.

Während jeder gewöhnliche Evolutoidenpunkt als Zentrum einer *logarithmischen Krümmungsspirale* vom Schnittwinkel $-\alpha$ angesehen werden kann, welche die Grundkurve k dreipunktig berührt, ist jede Evolutoidenspitze Zentrum einer vierpunktig berührenden Spirale. Rücken schliesslich zwei Spitzen zusammen (zu einem dreifachen Punkt mit vereinigten Tangenten), so wird die Schmiegspirale sogar eine fünfpunktig berührende: Im vorliegenden Fall kann dies aus Symmetriegründen nur für $\omega = \pm\pi/4$ und $\pm 3\pi/4$ eintreten, also gemäss (8) für $\operatorname{tg}\alpha = \pm 2ab/3(a^2 - b^2)$. Auf diese Weise ergibt sich übrigens eine direkte Lösung der seinerzeit von R. BEREIS gestellten Aufgabe, jene logarithmischen Spiralen zu finden, die eine vorgelegte Ellipse zum (fünfpunktig berührenden) Schmiegschnitt haben¹).

Abschliessend sei erwähnt, dass sich für die Evolutoiden der *Parabel* rationale Kurven 3. Klasse und 3. Ordnung ergeben, nämlich *affine semikubische Parabeln*.

W. WUNDERLICH, Wien.

¹) Aufgabe 159, *El. Math.* 7, 92 (1952); Auflösung ebenda 8, 91 (1953).