

Die in den Sitzungsberichten Abt. I und Abt. II der math.-nat. Klasse der Österr. Akad. d. Wiss. erscheinenden Abhandlungen werden auch einzeln abgegeben. Sie können durch jede Buchhandlung oder direkt durch die Auslieferungsstelle des Österreichischen Akademie der Wissenschaften (Wien I, Singerstraße 12) bezogen werden.

Nachfolgende Abhandlungen aus den Fächern **Mathematik** und **Technik** sind erschienen:

**1950 (S II a, Bd. 159):**

Hohenberg F.: Zur Geometrie des Funkmeßbildes (mit 2 Abbildungen), 14 Seiten. S 12.40

Jarosch W.: Matrizenbänder, 14 Seiten. S 5.20

Schmid H.: Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern und Zugrundelegung eines Orientierungspunktgitters (mit 13 Abbildungen), 31 Seiten. S 28.40

**1951 (S II a, Bd. 160):**

Hohenberg F.: Komplexe Erweiterung der gewöhnlichen Schraubenlinie (mit 1 Abbildung), 14 Seiten. S 7.80

Huber A.: Das Verhalten der Integrale der Gibbs-Duhem-Margules'schen Gleichung für binäre Gemische in der Umgebung ihrer festen singulären Stellen (mit 3 Abbildungen), 16 Seiten. S 10.50

Krames J.: Zur Geometrie der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen (mit 4 Abbildungen), 15 Seiten. S 7.—

Karkus H.: Wärmespannungen in Rotationsschalen mit drehsymmetrischer Temperaturverteilung (mit 1 Abbildung), 13 Seiten. S 7.50

Ströhner W.: Zur projektiven Differentialgeometrie ebener Kurven, 8 Seiten. S 6.—

Wunderlich W.: Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung (mit 8 Abbildungen), 38 Seiten. S 16.—

**1952 (S II a, Bd. 161):**

Federhofer K.: Über die Eigenschwingungen der Kreiszylinderschale mit veränderlicher Wandstärke, 16 Seiten. S 14.80

**1953 (S II a, Bd. 162):**

Nöbauer W.: Über Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen. S 19.40

Vietoris L.: Der Richtungsteiler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung einer Gleichung  $y' = f(x, y)$ . S 8.80

Vietoris L.: Der Richtungsteiler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung eines Systems von Gleichungen  $y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ , S 8.80

Wunderlich W.: Über die ebenen Loxodromen (mit 2 Abbildungen). S 6.30

**1954 (S II, Bd. 163):**

Federhofer K.: Die durch pulsierende Axialkräfte gedrückte Kreiszylinderschale. S 13.40

Báher W. und Selig F.: Die Verwendung der Motosymbolik in der theoretischen Mathematik. S 17.80

## Doppelloxodromen mit schneidendem Achsenpaar

ausgewählte Ergebnisse der math.-phys. Kl. Abt. II der Österr. Akad. d. Wiss. (Vierteljahr 1955), 14 Seiten. Von Walter Wunderlich (Wien)

ausgewählte Ergebnisse der math.-phys. Kl. Abt. II der Österr. Akad. d. Wiss. (Vierteljahr 1955), 14 Seiten. Von Walter Wunderlich (Wien)

### Einleitung

**L**oxodromen sind in der Auffassung von G. Scheffers' jene Kurven, die sämtliche Ebenen eines Büschels unter einem festen Winkel  $\sigma$  schneiden<sup>1</sup>. Unter ausdrücklicher Voraussetzung einer endlichen und nicht-isotropen Büschelachse  $a$  und Verwendung des zugehörigen Zylinderkoordinatensystems  $r, \varphi, z$  werden die Loxodromen durch das Bogen-element  $ds = r d\varphi / \sin \sigma$  gezeichnet. Die von Scheffers & a. O. (S. 252) aufgeworfene Frage nach den *Doppelloxodromen*, also jenen Kurven, die zwei vorgelegte Ebenenbüschel  $a, \tilde{a}$  unter vorgeschriebenen konstanten Winkeln  $\sigma, \tilde{\sigma}$  durchsetzen, führt in kartesischen Koordinaten zunächst auf ein System von zwei quadratischen Differentialgleichungen 1. Ordnung, das sich zwar als reduzibel erweist, für welches jedoch noch keine geschlossene allgemeine Lösung bekannt ist. Auf die als partikuläre Lösungen dieses Problems auftretenden Kreise hat der Verfasser erst kürzlich hingewiesen.<sup>2</sup>

Die im besonderen Fall eines schneidenden Achsenpaares  $a, \tilde{a}$  durchführbare Integration soll in der vorliegenden Arbeit dargelegt werden. Sie beruht gruppentheoretisch auf der Existenz von  $\infty^1$  zentrischen Ähnlichkeiten oder Translationen, welche das Achsenpaar und damit auch das zugehörige Loxodromensystem in sich transformieren. Die dabei auftretenden invarianten Kegel bzw. Zylinder, welche je  $\infty^1$

<sup>1</sup> G. Scheffers: Besondere transzendente Kurven. Enz. math. Wiss. III D 4, Nr. 34.

<sup>2</sup> W. Wunderlich: Kreise als Doppelloxodromen. Archiv d. Math. 6 (1955), 230—242.

ähnliche bzw. kongruente Doppelloxodromen tragen, sind naturgemäß von primärer Bedeutung, sie können unter Umständen sogar algebraisch ausfallen, während die Loxodromen selbst fast ausnahmslos transzendent sind.

Es erweist sich im übrigen als notwendig, die drei Annahmen eines Achsenpaars mit eigentlichem Schnittpunkt, eines parallelen Achsenpaars und der Kombination einer eigentlichen mit einer uneigentlichen Achse getrennt zu behandeln; dementsprechend gliedert sich die vorliegende Untersuchung in drei Teile. — Obwohl das Interesse grundsätzlich nur auf reelle Loxodromen gerichtet ist, muß doch die Möglichkeit konjugiert-imaginärer Achsen auch berücksichtigt werden, da hierzu bei gleichzeitiger Annahme konjugiert-komplexer Schnittwinkelwerte sehr wohl reelle Loxodromen gehören. Für diese an und für sich bemerkenswerten Kurven werden jeweils reelle Parameterdarstellungen abgeleitet.

### I. Achsenpaar mit eigentlichem Schnittpunkt

**§ 1.** Im Falle eines *eigentlichen Achsenpaars*  $a, \bar{a}$  mit *eigentlichem Schnittpunkt*  $O$  machen wir diesen zum Ursprung eines kartesischen Normalkoordinatensystems  $x, y, z$ , dessen  $x-y$ -Ebene mit der Verbindungsgeraden  $a \bar{a}$  zusammenfällt; die Achsen können dann stets angesetzt werden mit

$$(1. 1) \quad x : y : z = 1 : \pm m : 0.$$

Werden sie überdies als *nichtisotrop* vorausgesetzt ( $m^2 \neq -1$ ), so werden die zu den Schnittwinkeln  $\sigma, \bar{\sigma}$  gehörigen Doppelloxodromen durch das Bogenelement

$$(1. 2) \quad d s = r d \varphi / \sin \sigma = r d \bar{\varphi} / \sin \bar{\sigma}$$

charakterisiert, wobei  $r, \bar{r}$  die Achsenabstände eines laufenden Punktes  $P$  und  $\varphi, \bar{\varphi}$  deren Neigungswinkel gegen die Achsenebene  $z = 0$  bezeichnen (Abb. 1). Wegen

$$(1. 3) \quad z = r \sin \varphi = \bar{r} \sin \bar{\varphi}$$

gilt dann

$$(1. 4) \quad \frac{d \bar{\varphi}}{\sin \bar{\varphi}} = \varepsilon \cdot \frac{d \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{\sin \bar{\sigma}}{\sin \sigma}.$$

Diese Differentialgleichung läßt sich aber sofort integrieren zu

$$(1. 5) \quad \operatorname{tg} \frac{\bar{\varphi}}{2} = c \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right).$$

Diese Beziehung definiert nun ein von  $O$  ausstrahlendes System von *Triforkegegen*  $\Gamma$ , welches mit Benützung des halben Achsenwinkels  $\alpha = \operatorname{arctg} m$  und auf Grund der Darstellung der zu  $\varphi, \bar{\varphi}$  gehörigen Büschelebenen

$$(1. 6) \quad \begin{aligned} x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha + z \cdot \operatorname{ctg} \varphi &= 0 \\ x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha - z \cdot \operatorname{ctg} \bar{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben wird durch

$$(1. 7) \quad x : y : z = (\operatorname{ctg} \bar{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi) \cos \alpha : (\operatorname{ctg} \bar{\varphi} + \operatorname{ctg} \varphi) \sin \alpha : 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Die Beziehung (1. 7) ist in Abb. 1 graphisch nachgewiesen.

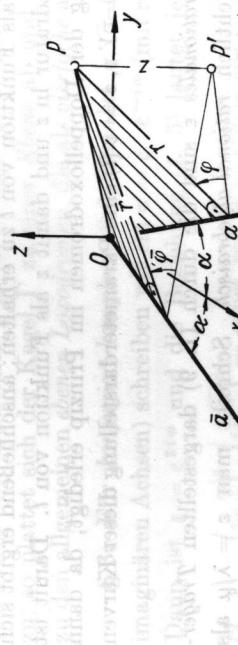


Abb. 1

Jeder dieser Kegel  $\Gamma$  trägt  $\infty^1$  untereinander *ähnliche Doppelloxodromen*, die durch zentrische Streckung von  $O$  aus untereinander vertauscht werden. Setzt man zur Abkürzung

$$(1. 8) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t, \quad \operatorname{tg} \frac{\bar{\varphi}}{2} = \bar{t},$$

so gilt  $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2} (t - 1 - \bar{t})$  und  $\operatorname{ctg} \bar{\varphi} = \frac{1}{2} (c - 1 t - \bar{s} - c t^s)$ , und der Kegel  $\Gamma$  stellt sich dann dar in der Form

$$(1. 9) \quad \frac{x : y : z = X(t) : Y(t) : 1}{X = \frac{1}{4 \sin \alpha} (c - 1 t - \bar{s} - c t^s - t - 1 + t), \quad \text{für } t \neq 1, \bar{s} \neq 1} \quad \text{und } \frac{X = \frac{1}{4 \sin \alpha} (c - 1 t - \bar{s} - c t^s - t - 1 + t), \quad \text{für } t = 1, \bar{s} = 1}{Y = \frac{1}{4 \cos \alpha} (c - 1 t - \bar{s} - c t^s + t - 1 - t), \quad \text{für } t = 1, \bar{s} \neq 1}.$$

Geht man dann mit  $x = Xz$  und  $y = Yz$  in die Loxodromenbedingung (1. 2) ein, so gelangt man mittels

$$d\dot{s}^2 = (X^2 + Y^2 + 1)dz^2 + 2(X\dot{X} + Y\dot{Y})dt \cdot dz + \\ + (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)d\vartheta^2 \cdot z^2$$

wobei der Punkt die Ableitung nach  $t$  bedeutet — und

$$ds = \frac{r d\varphi}{\sin \sigma} = \frac{z}{\sin \sigma} \cdot \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{z}{\sin \sigma} \cdot \frac{dt}{t} \quad (1. 1)$$

zu einer quadratischen Gleichung für  $\dot{z}/z$ :

$$(1. 10) \quad (X^2 + Y^2 + 1) \left( \frac{\dot{z}}{z} \right)^2 + 2(X\dot{X} + Y\dot{Y}) \frac{\dot{z}}{z} + \left( \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 - \frac{1}{t^2 \sin^2 \sigma} \right) = 0.$$

Hieraus ist  $\dot{z}/z$  als Funktion von  $t$  zu erhalten; anschließend ergibt sich durch eine Quadratur  $\ln z$  und damit  $z$  als Funktion von  $t$ . Damit ist die Bestimmung der Doppelloxodromen im Prinzip erledigt, da dann mit  $x = Xz, y = Yz, z = z(t)$  eine Parameterdarstellung dieser Kurven vorliegt.

**§ 2.** Für rationales  $\varepsilon$  sind die durch (1. 9) dargestellten *Trägerkegel*  $\Gamma$  offensichtlich rational-algebraisch. Schreibt man  $\varepsilon = \lambda/\mu$  als Quotienten zweier teilerfremden natürlichen Zahlen  $\lambda, \mu$  an, wobei man ohne Einschränkung  $\varepsilon \geq 1$ , also  $\lambda \geq \mu$  voraussetzen darf, so leistet der neue Parameter  $u = t^{1/\mu}$  die Rationalisierung. Geht man gleichzeitig vermöge  $\xi = x \sin \alpha - y \cos \alpha, \eta = x \sin \alpha + y \cos \alpha$  zu einem neuen Koordinatensystem über, welches  $a$  und  $\bar{a}$  zu Kordinatenachsen hat, so lautet die Kegeldarstellung jetzt

$$(2. 1) \quad \xi : \eta : z = \frac{1}{2}(u^\mu - u^{-\mu}) : \frac{1}{2}(c^{-1}u^{-\lambda} - c^{\lambda}) : 1.$$

Hieraus ist zu erkennen, daß  $\Gamma$  ein *Kegel 2n-ter Ordnung* ist, der für  $\varepsilon > 1$  die Achse  $a$  enthält ( $u = 0$  bzw.  $\infty$ ); dieselbe stellt für jeden der beiden hindurchgehenden Mantel eine  $(\lambda - \mu)$ -fache Erzeugende dar, deren sämtliche Tangentialebenen in der Achsenebene  $z = 0$  zusammengefügt sind.

Doppelloxodromen mit schneidendem Achsenpaar

Eine Sonderstellung kommt dem *Grenzfall 2. Grades* vor, die ein *konfokales System* mit den gemeinsamen Brennstrahlen  $a, \bar{a}$  bilden. Diesem Achsenpaar treten die imaginären Brennstrahlen  $b, \bar{b}$  ( $x : y : z = \pm n : 0 : 1$  mit  $m^2 + n^2 + 1 = 0$ ) und  $c, \bar{c}$  ( $x : y : z = 0 : \pm n : m$ ) gleichberechtigt zur Seite, so daß hier nicht bloß doppelte, sondern sogar *sechsfache Loxodromen* auftreten. Wie in einer eigenen Note nachgewiesen wurde, sind dieselben mit den *D-Linien* der Kegel  $\Gamma$  identisch, d. h. sämtliche Schmiekgugeln einer solchen Linie berühren ihren Trägerkegel<sup>3</sup>. Grundlegend ist dabei die Tatsache, daß sämtliche Tangenten der Kurve zu den Erzeugenden eines mit  $\Gamma$  konzyklischen Richtkegels parallel sind. Die naheliegende Vermutung, daß diese Eigenschaften auch noch für die zu beliebigem  $\varepsilon$  gehörigen Loxodromen zutreffen, hat sich nicht bestätigt. — Legt man schließlich der Konstante  $c$  in (1. 5) oder (2. 2) den Wert 1 oder  $-1$  zu, so plattet sich der Kegel  $\Gamma$  zu einer *Ebene* ab und man gelangt so zu den allgemeinen *ebenen Loxodromen*, die als *vierfache* anzusehen sind<sup>4</sup>.

**§ 3.** Für *konjugiert-komplexe Schnittwinkel*  $\sigma, \bar{\sigma}$  (bei konjugiert-imaginären Achsen) schreiben wir sin  $\sigma = \rho \cdot e^{-i\omega}$  (mit realem  $\rho$  und  $\omega$ ). Dann ist  $\varepsilon = e^{2i\omega}$  und die Beziehung (1. 5) lautet jetzt

$$(3. 1) \quad \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\varepsilon} : \left( \operatorname{tg} \frac{\bar{\varphi}}{2} \right)^{\bar{\varepsilon}} = \text{const mit } \tau = e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega.$$

Konjugierte Winkelwerte  $\varphi, \bar{\varphi}$  sind gewährleistet, wenn die auftretende Konstante Einheitsbetrag hat, also etwa durch  $e^{2i\gamma}$  (mit realem  $\gamma$ ) angesetzt wird. Setzt man schließlich noch

$$(3. 2) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = e^{u+i\vartheta}, \text{ also } \operatorname{ctg} \varphi = -\operatorname{sh} u \cos \vartheta - i \operatorname{ch} u \sin \vartheta,$$

dann läuft (3. 1) auf die reelle Bedingung

$$(3. 3) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u \cdot \sin \omega + v \cdot \cos \omega = \gamma$$

hinaus. — Die in (1. 1) festgelegten Achsen  $a, \bar{a}$  sind *konjugiert-imaginär*, wenn  $m = -\bar{m}$ , also reinimaginär ist; wir setzen demgemäß  $m = \operatorname{tg} \alpha =$

<sup>3</sup> W. Wunderlich: Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D-Kurven von Kegeln 2. Grades. *Mh. Math.* **58** (1954), 57—62.  
<sup>4</sup> W. Wunderlich: Über die ebenen Loxodromen. *Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien* **162** (1953), 285—292.

$= i \operatorname{th} \beta$  (mit reelem  $\beta$ ), was bei nichtisotropen Achsen stets möglich ist. Dann ist  $\sin \alpha = i \operatorname{sh} \beta$  und  $\cos \alpha = \operatorname{ch} \beta$ , und die Darstellung (1. 7) des *Trägerkegels* lautet jetzt

$$(3. 4) \quad x : y : z = X : Y : 1$$

Diese Trägerkegel sind mithin *reell* und im allgemeinen *transzendent*, ausgenommen die Fälle  $\varepsilon = \pm 1$  ( $\omega = 0$  oder  $\pi/2$ ), welche auf die schon in § 2 erwähnten Kegel 2. Grades (in anderer Aufstellung) führen.

Die hiergehörigen *Loxodromen* können nun wieder durch  $x = X z$ ,  $y = Y z$  angesetzt werden, wobei  $X$  und  $Y$  gemäß (3. 3) und (3. 4) etwa als Funktionen von  $u$  aufzufassen sind. Es ist dann

$$ds^2 = (X^2 + Y^2 + 1) d z^2 + 2(X\dot{X} + Y\dot{Y}) d u \cdot z d z +$$

$$+ (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) d u^2 \cdot z^2,$$

während die Loxodromenbedingung (1. 2) besagt:

$$ds = \frac{r d \varphi}{\sin \sigma} = \frac{z}{\sin \sigma} \cdot \frac{d \varphi}{\sin \varphi} = \frac{z e^{i \omega}}{\rho \cos \omega} \cdot d(u + i v) = \frac{z d u}{\rho \cos \omega}.$$

Dies gibt zusammen eine durchaus reelle Bestimmungsgleichung für  $z(u)$ :

$$(3. 5) \quad (X^2 + Y^2 + 1) \left( \frac{z}{u} \right)^2 + 2(X\dot{X} + Y\dot{Y}) \frac{z}{u} + \left( \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 - \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \omega} \right) = 0.$$

Wie man sieht, gibt es demnach bei beliebiger Vorgabe eines konjugiert-imaginären (vorläufig nichtisotropen) schneidenden Achsenpaars und für beliebig vorgeschriebene konjugiert-komplexe Schnittwinkelwerte  $\omega$  vollständig reelle Loxodromen. Daß dies auch im Falle windschiefer Achsen gilt, wäre unschwer einzusehen.

§ 4. Ausständig ist jetzt noch der bisher ausgeschlossene Fall *isotoper Achsen* ( $m = i$ ), der einer eigenen Behandlung bedarf, da die übliche Winkelmessung um eine isotrope Achse ihren Sinn verliert und daher die Verwendung der Winkel  $\varphi, \bar{\varphi}$  unmöglich wird.

Das Achsenpaar  $a, \bar{a}$  sei somit gemäß (1. 1) durch

$$(4. 1) \quad x : y : z = 1 : \pm i : 0$$

festgelegt. Soll die Fortschreitungsrichtung  $d x : d y : d z$  eines Loxodromenpunktes  $P(x, y, z)$  mit der Büschelebene  $P a$  den Winkel  $\sigma$ ,

also mit deren Normalenrichtung  $-z : -i z : (x + iy)$  den komplementären Winkel einschließen, so muß (unter Einführung des Bogenelements  $d s^2 = d x^2 + d y^2 + d z^2$ ) die Bedingung

$$(4. 2) \quad (x + iy) d z - z \cdot d(x + iy) = (x + iy) d s \cdot \sin \sigma$$

erfüllt sein. Diese Bedingung, ergänzt durch die konjugierte, tritt jetzt an Stelle von (1. 2).

Im Hinblick auf die zu den automorphen *Streckungen* des Loxodromensystems vom Ursprung aus nun hinzutretenden automorphen *Drehungen* um die  $z$ -Achse liegt es nahe, vermöge

$$(4. 3) \quad x = R \cos \varphi \cos \psi, \quad y = R \sin \varphi \cos \psi, \quad z = R \sin \psi$$

zu *Kugelkoordinaten*  $R, \varphi, \psi$  überzugehen. In diesen schreibt sich die Loxodromenbedingung (4. 2) folgendermaßen:

$$(4. 4) \quad \frac{ds}{R} \cdot \sin \sigma = \frac{d\psi}{\cos \psi} - i \sin \psi \cdot d\varphi.$$

Zerlegen wir  $\sin \sigma = \alpha + i \beta$  in Real- und Imaginärteil, so erhalten wir aus (4. 4) und der konjugierten Beziehung das die *reellen Loxodromen* bestimmende Gleichungssystem

$$(4. 5) \quad \frac{ds}{R} = \frac{d\psi}{\alpha \cos \psi} = - \frac{\sin \psi \cdot d\varphi}{\beta}.$$

Aus dem zweiten Teil von (4. 5) folgt zunächst

$$(4. 6) \quad \operatorname{ctg} \psi = c \cdot \exp(\alpha/\beta).$$

Diese Beziehung zwischen Längenwinkel  $\varphi$  und Breitenwinkel  $\psi$  legt die *Trägerkegel*  $\Gamma$  unserer Loxodromen fest. Die untereinander kongruenten Kegel  $\Gamma$  sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, als Schichtenlinien  $z = \text{const}$  im allgemeinen *logarithmische Spiralen* vom Schnittwinkel  $\operatorname{arc ctg}(\alpha/\beta) = \arg \sin \sigma$  zu besitzen<sup>5</sup>. Zwei Grenzfälle bedürfen dabei einer besonderen Erwähnung: Für  $\alpha = 0$  gilt  $\psi = \text{const}$  und man gelangt zu den auf *Drehkegeln*  $\Gamma$  verlaufenden, wohlbekannten *zylindrokonischen Spiralen* (Bahnenkurven eingeschlossener Ähnlichkeitsgruppen im Raum);  $\beta = 0$  führt hingegen auf  $\varphi = \text{const}$

<sup>5</sup> Diese Bemerkung findet sich — als eine der wenigen über Doppelloxodromen — bereits bei G. Scheffers, a. O. S. 248, Fußnote 169.

und damit auf *ebene Loxodromen* mit isotropem Achsenpaar, die bereits bei früherer Gelegenheit betrachtet und als die Orthogonaltrajektorien linearer Kreisreihen charakterisiert wurden; sie fallen für rationales  $\alpha$  sogar algebraisch aus<sup>4</sup>.

Im allgemeinen Fall ( $\alpha \neq 0$ ) gelangt man durch Elimination von  $\varphi$  aus  $d\vartheta^2 = R^2 \cos^2 \psi d\vartheta^2 + R^2 d\psi^2$  und (4. 5) zur Differentialgleichung

$$(4. 7) \text{ somit } \alpha \frac{dR}{R} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + (1 - \alpha^2 - \beta^2) - \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \psi \cdot d\psi}$$

einer gewissen Ähnlichkeitsschar von *Drehflächen*  $\Delta$  mit der Achse  $z$ , welche aus den Kegeln  $\Gamma$  die fraglichen Loxodromen ausschneiden. Die Integration von (4. 7) läßt sich elementar ausführen; mit Unterdrückung der etwas umständlichen Zwischenrechnung sei gleich eine fertige Parameterdarstellung des Flächenmeridians angegeben, welche die Polarkoordinaten  $R, \psi$  mittels eines Hilfswinkels  $\theta$  ausdrückt:

$$R = \frac{(1 - \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta \operatorname{tg} \theta)^{\frac{1}{2}} \alpha}{(1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta \operatorname{tg} \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (4. 8)$$

Drückt man vermöge (4. 6) auch noch  $\varphi$  durch  $\theta$  aus, so hat man zusammen mit (4. 8) eine Parameterdarstellung der fraglichen *Doppelloxodromen*.

Abgesehen von den schon erwähnten Sonderfällen  $\alpha = \beta = 0$  sind die Drehflächen  $\Delta$  durchwegs transzendent und bestehen aus unendlich vielen, untereinander bezüglich des Ursprungs zentrisch-ähnlichen Manteln. Abb. 2 zeigt das Aussehen eines solchen Mantels für die Annahme  $\alpha = \beta = 1$ . Der auftretende Rückkehrkreis ist in jedem Fall vorhanden und gehört zu einem Parameterwert, für welchen  $\operatorname{tg} 2\theta = 2\beta/(1 - \alpha^2 - \beta^2)$ , da hierfür  $dR = d\psi = 0$ . Es ist im Wesen schon der Problemstellung begründet, daß der Flächenmantel und die auf ihm verlaufenden Doppelloxodromen die *Inversion* bezüglich jener Kugel  $\Omega$  gestatten, die ihren Mittelpunkt im Ursprung hat und dem genannten Rückkehrkreis entsält;  $\Omega$  muß  $\Delta$  mithin längs dieses Kreises berühren.

Es erweist sich im übrigen, daß die Differentialgleichung der zum Flächensystem  $\Delta$  gehörigen koaxialen *Orthogonalflächen*  $\Theta$ , nämlich

$$(4. 9) \quad \frac{dR}{R} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + (1 - \alpha^2 - \beta^2) - \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \psi}, \quad (\text{v. G.})$$

leichter und einfacher zu integrieren ist als (4. 7) selbst. Man findet nach Algebraisierung und Rationalisierung die folgende Parameterdarstellung der Drehflächen  $\Theta$

$$(4. 10) \quad R = C \cdot \sqrt{\frac{1 - \alpha + u}{1 + \alpha + u}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{\beta^2 + u^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2 + 2u}}. \quad (\text{v. G.})$$

Die Kurve  $\Delta$  ist in Abb. 2 als gestrichelter Kreis gezeichnet, wobei hierauf der Wert  $u = 0$  eingezeichnet ist, so möglicherweise eine geometrische Aufgabe. Die Kurve  $\Theta$  ist ebenfalls gestrichelt gezeichnet, wobei hierauf  $u = 0$  eingezeichnet ist, was zusammen mit  $\alpha = \beta = 1$  aus deren Parameterdarstellung folgt. Unter dem unverkennbaren Kreisbogen  $\Omega$  verläuft die Kurve  $\Theta$  unter dem unverkennbaren Kreisbogen  $\Delta$ .

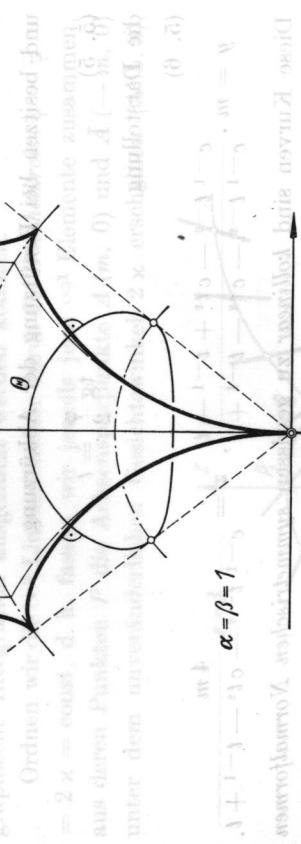


Abb. 2

Es handelt sich hierbei um eine Ähnlichkeitsschar von *Flächen 4. Ordnung*, die den absoluten Kegelschnitt doppelt enthalten („Drehzykliden“). Sie gehen aus einer von ihnen, etwa der zu  $C = 1$  gehörigen Fläche

$$(4. 11) \quad [(1 + \alpha)^2 + \beta^2] (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(1 - \alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - 2(1 + \alpha^2 + \beta^2)z^2 + [(1 - \alpha)^2 + \beta^2] = 0,$$

durch Streckung vom Ursprung aus hervor (vgl. Abb. 2).

## II. Paralleles Achsenpaar

**§ 5.** Im Falle eines *parallelen Achsenpaares*  $a, \bar{a}$  möge dasselbe die Richtung der  $x$ -Achse haben und durch

$$(5. 1) \quad y = \pm m, \quad z = 0$$

festgelegt werden. Die zugehörigen Doppelloxodromen mit den vorgegebenen Schnittwinkeln  $\sigma, \bar{\sigma}$  werden wieder durch das Bogen-element

$$(5. 2) \quad d s = r d \varphi / \sin \sigma = \bar{r} d \bar{\varphi} / \sin \bar{\sigma}$$

gekennzeichnet, wobei wie in § 1  $r, \bar{r}$  die Achsenabstände eines laufenden Kurvenpunktes und  $\varphi, \bar{\varphi}$  deren Neigungswinkel gegen die  $x$ - $y$ -Ebene bedeuten. Es folgt genau wie dort

$$(5. 3) \quad \operatorname{tg} \frac{\bar{\varphi}}{2} = c \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\varepsilon} \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{\sin \bar{\sigma}}{\sin \sigma}.$$

Durch diese Beziehung zwischen  $\varphi$  und  $\bar{\varphi}$  werden jetzt <sup>o1</sup> *Trägerzyylinder*  $\Gamma$  der Loxodromen definiert. Ihre Basiskurven in der  $y$ - $z$ -Ebene berechnen sich aus

$$(5. 4) \quad z = (y - m) \cdot \operatorname{tg} \varphi = (y + m) \cdot \operatorname{tg} \bar{\varphi}$$

und besitzen bei Benützung der Abkürzung

$$(5. 5) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t \quad \text{aus } \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

die Darstellung

$$(5. 6) \quad y = m \cdot \frac{c^{-1} t^{-\varepsilon} - c t^{\varepsilon} + t^{-1} - t}{c^{-1} t^{-\varepsilon} - c t^{\varepsilon} - t^{-1} + t}, \quad z = \frac{4m}{c^{-1} t^{-\varepsilon} - c t^{\varepsilon} - t^{-1} + t}.$$

Diese Kurven sind *kollinear* zu gewissen *symmetrischen Normalformen*

$$(5. 7) \quad \eta = \frac{y - m}{z} = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2} (t^{-1} - t),$$

$$\zeta = \frac{y + m}{z} = \operatorname{ctg} \bar{\varphi} = \frac{1}{2} (c^{-1} t^{-\varepsilon} - c t^{\varepsilon}),$$

die ein näheres Studium erleichtern.

Vertauschung der Zuwächse  $d r$  und  $r d \varphi$ , verbunden mit einem Vorzeichenwechsel, bewirkt den Übergang von einem Linienelement zum orthogonalen. Das System der *Orthogonaltrajektorien* der Zylinderbasen wird demnach mit Rücksicht auf (5. 2) charakterisiert durch

$$(5. 8) \quad d r / \sin \sigma = d \bar{r} / \sin \bar{\sigma}$$

und demnach gebildet von einer Schar *kartesischer Ovalen*. Läßt man  $r - \varepsilon \rho = \text{const}$ , wobei  $\rho, \bar{\rho}$  die Winkel eines (5. 9)  $r - \varepsilon r = \text{const}$  gehenden Strahls mit den Achsen  $a, \bar{a}$  bezeichnen; diese Orthogonalkegel mit den zwei gemeinsamen Brennpunkten  $(\pm m, 0)$ <sup>6</sup>,

Um schließlich zu den *Doppelloxodromen* selbst zu gelangen, hat man mit den Ausdrücken für  $y$  und  $z$  aus (5. 6) in die Bedingung (5. 2) einzutragen. Über  $d s^2 = d x^2 + (y^2 + z^2) d t^2$  und

durchsetzt in  $d s = \frac{r d \varphi}{\sin \sigma} = \frac{r d \varphi}{\sin \sigma} \cdot d \varphi = \sin \sigma \cdot d \varphi$  erhält man dann

$$(5. 10) \quad x = \int \sqrt{\frac{z^2}{t^2 \sin^2 \sigma} - (y^2 + z^2)} d t, \text{ d.h. fñgt (5. 6)}$$

**§ 6.** Wenngleich das durch die Differentialgleichung (5. 2) in der Basisebene  $x = 0$  bestimmte *Richtungsfeld* durch (5. 3) bereits integriert ist, so mögen doch noch zwei einfache Bemerkungen über dessen *geometrischen Aufbau* angeschlossen werden, die insbesondere für eine graphische Integration ausgenützt werden könnten.

Ordnen wir die <sup>o2</sup> Linienelemente durch die *Büschelkreise*  $\varphi = \bar{\varphi} = 2 \kappa = \text{const}$ , d. h. fassen wir jeweils jene Elemente zusammen, aus deren Punkten  $P$  die Achsenpunkte  $A(m, 0)$  und  $\bar{A}(-m, 0)$  unter dem unveränderlichen Gesichtswinkel  $2 \kappa$  erscheinen (Abb. 3),

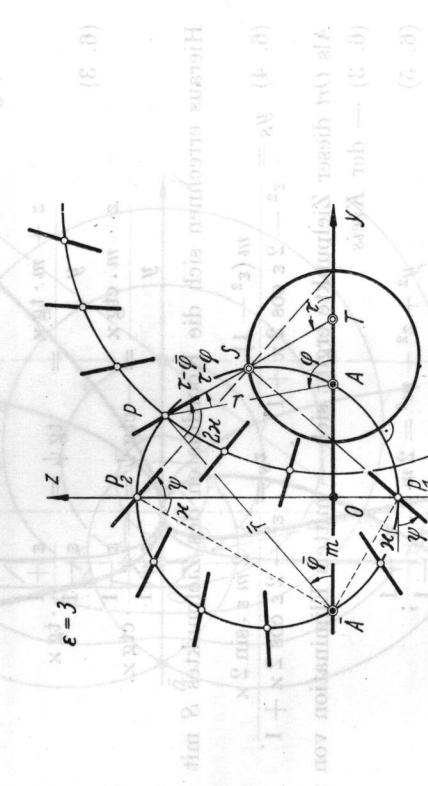


Abb. 3 Radialversatz durch einen schiefen

<sup>6</sup> Analog stellt man fest, daß das System der Trägerkegel  $\Gamma$  aus § 1 orthogonal durchsetzt wird von den Kegeln  $\bar{\rho} - \varepsilon \rho = \text{const}$ , wobei  $\rho, \bar{\rho}$  die Winkel eines (5. 9)  $r - \varepsilon r = \text{const}$  gehenden Strahls mit den Achsen  $a, \bar{a}$  bezeichnen; diese Orthogonalkegel brauchen jedoch keineswegs von 4. Ordnung, ja nicht einmal algebraisch zu sein.

dann haben die Tangenten dieser Linienelemente gegen die Schenkel des Winkels  $2\alpha$  feste Lage und gehen durch einen bestimmten, dem Ordnerkreis  $\varphi - \bar{\varphi} = 2\alpha$  gehörenden Punkt  $S$ .

Um diesen „Zielpunkt“  $S$  genauer festzulegen, führen wir den Richtungswinkel  $\tau$  der Tangente gegen die  $y$ -Achse ein. Die Winkel  $2\alpha$  betragen dann  $\tau - \varphi$  bzw.  $\tau - \bar{\varphi}$ , und die Differentialgleichung (5. 2) besagt nichts anderes als

$$(6. 1) \quad \sin(\tau - \varphi) : \sin(\tau - \bar{\varphi}) = 1 : \varepsilon.$$

Durch einfache Umformung folgt hieraus

$$(6. 2) \quad \operatorname{tg}\left(\tau - \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}\right) = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Der auftretende Winkel  $\psi = \tau - \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})$  bedeutet die Neigung der Tangente gegen die Symmetrale des Gesichtswinkels! Die zu den beiden Scheitellagen  $P_1(0, -m \operatorname{tg} \alpha)$  und  $P_2(0, m \operatorname{ctg} \alpha)$  gehörigen Tangenten (vgl. Abb. 3) haben die Gleichungen

$$(6. 3) \quad \begin{aligned} \frac{z + m \cdot \operatorname{tg} \alpha}{y} &= \operatorname{tg} \psi = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ \frac{z - m \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{y} &= -\operatorname{ctg} \psi = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Diese Kurven sind

$$(6. 4) \quad y_S = \frac{m(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos 2\alpha + 1}, \quad z_S = \frac{2m\varepsilon \cdot \sin 2\alpha}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos 2\alpha + 1}.$$

Als Ort dieser Zielpunkte ergibt sich — mittels Elimination von  $\alpha$  aus (6. 3) — der Kreis

$$(6. 5) \quad y^2 + z^2 + m^2 = 2my \cdot \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1}; \quad \text{d. h. der Zylinder}$$

derselbe wäre auch darstellbar in der Form

$$(6. 6) \quad \vec{r} : r = \varepsilon : 1.$$

Fassen wir hingegen die Linienelemente längs der Kreise des Orthogonalbüschels  $r/\vec{r} = \lambda = \text{const}$  zusammen, so laufen die zugehörigen

Tangenten jeweils durch einen gewissen **Zielpunkt  $T$**  auf der  $y$ -Achse. Aus Abb. 3 liest man nämlich für den Tangentenfußpunkt  $T$  auf  $y$  vermöge des Sinussatzes und der Bedingung (6. 1) die Beziehung zwischen  $T$  und  $S$  ab:

$$(6. 7) \quad \frac{AT}{AT} = \frac{\vec{r} \cdot \sin(\tau - \bar{\varphi})}{\vec{r} \cdot \sin(\tau - \varphi)} = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \text{const}$$

ab, woraus seine Unveränderlichkeit hervorgeht; seine Koordinaten bestrengen demzufolge ab abgesehen davon, daß  $(\vec{r}, \lambda)$  sonst frei bleibt. Man folgt hieraus beispielsweise für  $\lambda = \pm 1$ , daß sich die Asymptoten der Zylinderbasis auf zwei Strahlbüschel verteilen (vgl. Abb. 4 und 5).

Man folgt hieraus beispielsweise für  $\lambda = \pm 1$ , daß sich die Asymptoten der Zylinderbasis auf zwei Strahlbüschel verteilen (vgl. Abb. 4 und 5).

Man folgt hieraus beispielsweise für  $\lambda = \pm 1$ , daß sich die Asymptoten der Zylinderbasis auf zwei Strahlbüschel verteilen (vgl. Abb. 4 und 5).

Man folgt hieraus beispielsweise für  $\lambda = \pm 1$ , daß sich die Asymptoten der Zylinderbasis auf zwei Strahlbüschel verteilen (vgl. Abb. 4 und 5).

Man folgt hieraus beispielsweise für  $\lambda = \pm 1$ , daß sich die Asymptoten der Zylinderbasis auf zwei Strahlbüschel verteilen (vgl. Abb. 4 und 5).

Man folgt hieraus beispielsweise für  $\lambda = \pm 1$ , daß sich die Asymptoten der Zylinderbasis auf zwei Strahlbüschel verteilen (vgl. Abb. 4 und 5).

hier  $\varepsilon = \lambda/\mu \geq 1$  als gekürzten Bruch an, so leistet der neue Parameter  $u = t^{1/\mu}$  die Rationalisierung:

$$(7.1) \quad \eta = \frac{y - m}{z} = \frac{1 - u^{2\mu}}{2u^\mu}, \quad \zeta = \frac{y + m}{z} = \frac{c - 1 - cu^2}{2u^\lambda}.$$

Der Zylinder  $\Gamma$  hat mithin die *Ordnung*  $2\lambda$  und enthält für  $\varepsilon > 1$  die Achse  $a$  ( $u = 0$  bzw.  $\infty$ ); dieselbe stellt für jeden der beiden hindurchgehenden Mäntel eine  $(\lambda - \mu)$ -fache Erzeugende dar, deren sämtliche Tangentialebenen in der Achsenebene  $z = 0$  zusammenrücken sind. Abb. 2 zeigt für  $\varepsilon = 2$  die Basen zweier Trägerzylinger (4. Ordnung) samt einigen kartesischen Ovalen des Orthogonalsystems.

Eine Sonderstellung kommt wieder dem *Grenzfall*  $\varepsilon = 1$  ( $\lambda = \mu = 1$ ) zu. Hier liegen *Trägerzylinger 2. Grades* vor, die ein *konfokales System* mit den gemeinsamen Brennstrahlen  $a, \bar{a}$  bilden. Diesem Achsenpaar treten die imaginären Brennstrahlen  $b, \bar{b}$  ( $y = 0, z = \pm m i$ ) gleichberechtigt zur Seite, so daß hier nicht bloß doppelte, sondern sogar *verfache Loxodromen* festzustellen sind. Sie sind wieder affine Böschungslien mit konzyklischem Tangentenrichtkegel und stellen die *D-Linien* der Trägerzyylinder dar. Sie liegen auf Drehflächen, die als Hüllgebilde einer Drehfläche konstanter Krümmung entstehen, wenn diese um eine zu ihrer eigenen Achse parallele Achse kreist<sup>7</sup>. Für  $c = \pm 1$  stellen sich entsprechende *eine Loxodromen* ein, die auf je drei Drehflächen konstanter negativer Krümmung liegen<sup>4</sup>.

**§ 8.** Im Falle *konjugiert-imaginärer Achsen*  $a, \bar{a}$  setzen wir  $m = n i$  (mit realem  $n$ ) und nehmen ansonsten dieselben Substitutionen vor wie in § 3, setzen also insbesondere  $\operatorname{tg}(\varphi/2) = \exp(u + iv)$ . Unter gleichzeitiger Voraussetzung *konjugiert-komplexer Schnittwinkel*  $\sigma, \bar{\sigma}$  sind  $u$  und  $v$  wieder durch die Beziehung

$$(8.1) \quad u \cdot \sin \omega + v \cdot \cos \omega = \gamma$$

gekoppelt. Für die *Trägerzylinger*  $\Gamma$  gilt dabei die Darstellung

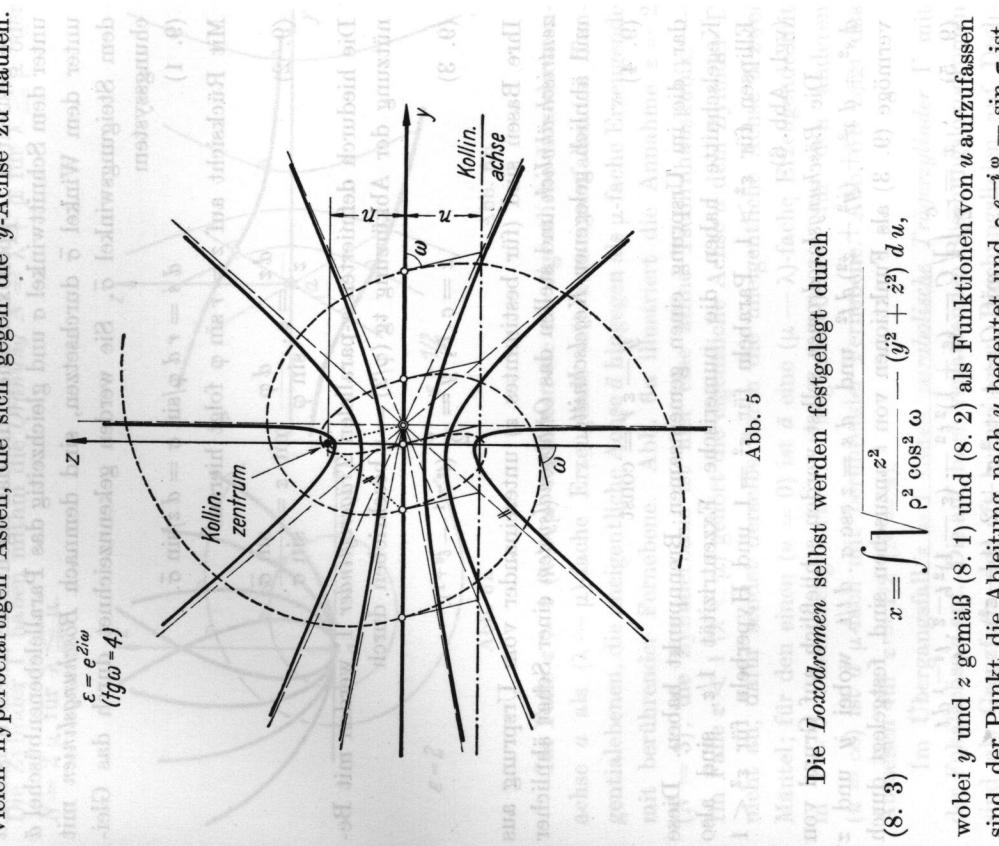
$$(8.2) \quad y = -n \cdot \operatorname{th} u \operatorname{ctg} v, \quad z = n \operatorname{ch} u \sin v.$$

Abgesehen von den Sonderfällen  $\omega = 0$  oder  $\pi/2$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ), die die schon erwähnten Zylinder 2. Grades kennzeichnen, handelt es sich

<sup>7</sup> W. Wunderlich: Über Loxodromen auf Zylindern 2. Grades. *Mh. Math.*

**59** (1955), 111–117.

durchwegs um transzidente Zylinder. Abb. 5 zeigt ihr Aussehen für die Annahme  $\operatorname{tg} \omega = 4$ ,  $\gamma = 0$ . — Die auftretenden Basiskurven sind im übrigen affin zu den Schichtenlinien  $x = \text{const}$  der in § 3 festgestellten Trägerkegel (3. 4). Sie gehen durch die harmonische Zentral-Kollineation  $y' = -ny/z, z' = n^2/z$  aus der Doppelspirale  $y' =$   
 $= n \operatorname{sh} u \cos v, z' = n \operatorname{ch} u \sin v$  hervor und bestehen aus unendlich vielen hyperbelartigen Ästen, die sich gegen die  $y$ -Achse zu häufen.



Die *Loxodromen* selbst werden festgelegt durch

$$(8.3) \quad x = \int \sqrt{\frac{z^2}{\rho^2 \cos^2 \omega} - (y^2 + z^2)} \, d u,$$

wobei  $y$  und  $z$  gemäß (8.1) und (8.2) als Funktionen von  $u$  aufzufassen sind, der Punkt die Ableitung nach  $u$  bedeutet und  $\rho e^{-i\omega} = \sin \sigma$  ist.

### III. Böschungsloxodromen mit inzidentem Achsenpaar

**§ 9.** Abschließend bleibt noch der Grenzfall zu behandeln, der sich einstellt, wenn bei parallelem Achsenpaar dessen Abstand  $2m$  über alle Grenzen wächst. Sei  $a$  die im Endlichen verbliebene eigentliche Loxodromenachse, die jetzt mit der  $x$ -Achse identifiziert wird; die zweite Achse  $\tilde{a}$  falle mit der Ferngerade der  $x$ - $y$ -Ebene zusammen.

Die gesuchten Doppelloxodromen, die das eigentliche Ebenenbüschel  $a$  unter dem Schnittwinkel  $\sigma$  und gleichzeitig das Parallellebenenbüschel  $\tilde{a}$  unter dem Winkel  $\tilde{\sigma}$  durchsetzen, sind demnach *Böschungslinien* mit dem Steigungswinkel  $\bar{\sigma}$ . Sie werden gekennzeichnet durch das Gleichungssystem

$$(9.1) \quad d s = r d \varphi / \sin \sigma = d z / \sin \bar{\sigma}.$$

Mit Rücksicht auf  $z = r \sin \varphi$  folgt hieraus

$$(9.2) \quad \frac{d z}{z} = \varepsilon \cdot \frac{d \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{\sin \bar{\sigma}}{\sin \sigma}.$$

Die hierdurch definierten  $x$ -parallelen *Trägerzylinder*  $\Gamma$  werden mit Benutzung der Abkürzung  $\operatorname{tg}(\varphi/2) = t$  beschrieben durch

$$(9.3) \quad z = c \cdot t^{\varepsilon}, \quad y = \frac{c}{2} (t^{\varepsilon-1} - t^{\varepsilon+1}).$$

Ihre Basen sind (für bestimmtes  $\varepsilon$ ) untereinander vom Ursprung aus *zentrisch-ähnlich* und stellen das *Orthogonalsystem* einer Schar ähnlicher und ähnlich gelegener *Kegelschnitte*

$$(9.4) \quad y - \varepsilon r = \text{const}$$

dar, die im Ursprung einen gemeinsamen Brennpunkt haben. Diese Kegelschnitte haben die numerische Exzentrizität  $1/\varepsilon$ , sind also Ellipsen für  $\varepsilon^2 > 1$ , Parabeln für  $\varepsilon^2 = 1$  und Hyperbeln für  $\varepsilon^2 < 1$  (vgl. Abb. 6).

Die *Böschungsloxodromen* selbst werden schließlich auf Grund von  $d s^2 = d x^2 + (y^2 + z^2) d t^2$  und  $d s = z \csc \sigma \cdot d t/t$ , wobei  $y$  und  $z$  vermöge (9.3) als Funktionen von  $t$  anzusehen sind, festgelegt durch

$$(9.5) \quad x = \frac{c}{2} \int \sqrt{C - (\varepsilon + 1)^2 t^2 - (\varepsilon - 1)^2 t^{-2} \cdot t^{\varepsilon-1}} dt$$

mit  $C = 4 \operatorname{ctg}^2 \sigma + 2 (1 - \varepsilon^2)$ .

**§ 10.** Im Falle eines rationalen  $\varepsilon$ -Wertes sind die auftretenden *Trägerzylinder*  $\Gamma$  wieder *rational-algebraisch*. Schreibt man  $\varepsilon = \lambda/\mu > 0$  als gekürzten Bruch an, so leistet der neue Parameter  $u = t^{1/\mu}$  die Rationalisierung in der Form

$$(10.1) \quad y = \frac{c}{2} (u^{\lambda-\mu} - u^{\lambda+\mu}), \quad z = c \cdot u^{\lambda}.$$

Die Zylinder  $\Gamma$  haben mithin die *Ordnung*  $N = \lambda + \mu$  für  $\lambda \geq \mu$  oder  $N = 2\mu$  für  $\lambda \leq \mu$ .

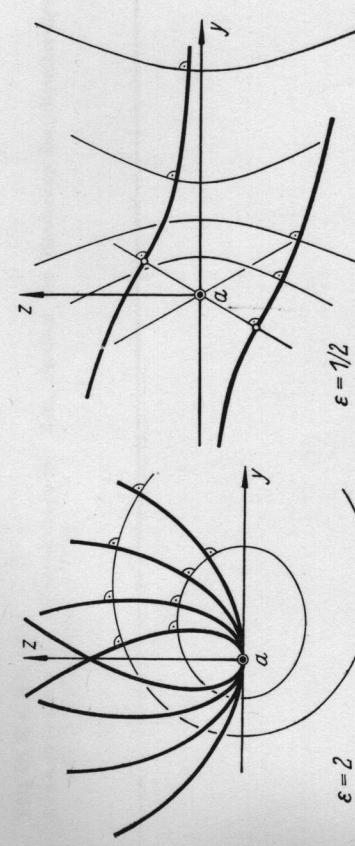


Abb. 6a

Im Falle  $\varepsilon > 1$  ( $\lambda > \mu$ ) enthalten sie die eigentlichen Loxodromenachse  $a$  als  $(\lambda - \mu)$ -fache Erzeugende mit zusammenfallenden Tangentialebenen, die uneigentliche Achse  $\tilde{a}$  hingegen als  $\mu$ -fache Erzeugende mit berührender Fernebene. Abb. 6a illustriert die Annahme  $\varepsilon = 2$  ( $N = 3$ ); die Zylinderbasis ist hier eine affine Tschirnhaußkubik. Im Falle  $\varepsilon < 1$  ( $\lambda < \mu$ ) gehört die eigentliche Achse  $a$  dem Zylinder  $\Gamma$  nicht an, dafür sendet derselbe durch die uneigentliche Achse  $\tilde{a}$  zwei Mantel; für den einen ( $u = 0$ ) ist  $\tilde{a}$  eine  $(\mu - \lambda)$ -fache Erzeugende mit in  $z = 0$  zusammengerückten Tangentialebenen, für den anderen ( $u = \infty$ ) ist  $\tilde{a}$   $\mu$ -fach mit berührender Fernebene. Abb. 6b zeigt das Aussehen für  $\varepsilon = 1/2$  ( $N = 4$ ).

Im Übergangsfall  $\varepsilon = 1$  treten *parabolische Trägerzylinder*  $\Gamma$  mit der Fokalachse  $a$  auf. Die auf ihnen verlaufenden Böschungsloxodromen sind als *Grenzform* der oft betrachteten Böschungslinien auf Dreh-

flächen **2.** Ordnung (mit lotrechter Achse) wohlbekannt<sup>8</sup>; sie bilden sich im Normalriff auf die  $x-y$ -Ebene als *gemeine Zykloiden* ab. Sie stellen natürlich wieder die *D-Kurven* ihrer Trägerzylinder dar, doch kommt ihnen diese Eigenschaft in der vorliegenden Kurvenfamilie durchaus allein zu.

<sup>8</sup> Z. B. bei E. Müller-J. Krames: Die Zyklographie (Vorl. über Darstellende Geometrie, Bd. II; Wien 1929), S. 372.

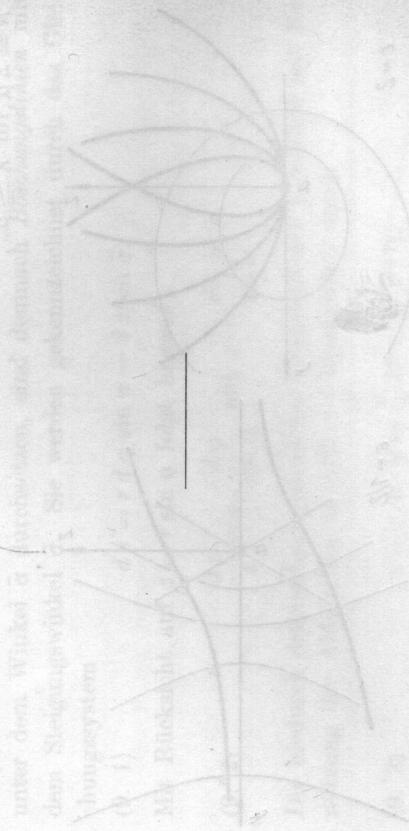
Die in den Sitzungsberichten Abt. I und Abt. II der math.-nat. Klasse der Österr. Akad. d. Wiss. erscheinenden Abhandlungen werden auch einzeln abgegeben. Sie können durch jede Buchhandlung oder direkt durch die Auslieferungsstelle der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (Wien I, Singerstraße 12) bezogen werden.

Nachfolgende Abhandlungen aus den Fächern **Meteorologie** und **Geophysik** sind erschienen

**1951 (S II a, Bd. 1160):**  
Höinkes H.: Über Nordföhnerscheinungen nördlich des Alpenhauptkamms (mit 13 Abbildungen), 23 Seiten. [S 7.—]

**1952 (S II a, Bd. 1161):**  
Untersteiner N.: Über Schwankungen der barometrischen Mitteltemperatur an einem tropischen Stationspaar (mit 2 Abbildungen), 11 Seiten. S 9.—

**1953 (S II a, Bd. 1162):**  
Schwarzacher W., Untersteiner N.: Zum Problem der Bänderung des Gletschercircles (mit 14 Abbildungen). S 23.40



Bei der Bearbeitung von untenstehender vom Verfasser geschriebener Arbeit habe ich folgendes Gesagtes aufmerksam beachtet: Es ist eine Kurve  $\Gamma$  gegeben, welche die Punkte  $(x, y)$  des  $xy$ -Koordinatensystems verbindet. Der Ursprung  $O$  liegt auf  $\Gamma$ . Der Punkt  $A$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(a, 0)$ . Der Punkt  $B$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(b, c)$ . Der Punkt  $C$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(d, e)$ . Der Punkt  $D$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(e, f)$ . Der Punkt  $E$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(f, g)$ . Der Punkt  $F$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(g, h)$ . Der Punkt  $G$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(h, i)$ . Der Punkt  $H$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(i, j)$ . Der Punkt  $I$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(j, k)$ . Der Punkt  $J$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(k, l)$ . Der Punkt  $K$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(l, m)$ . Der Punkt  $L$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(m, n)$ . Der Punkt  $M$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(n, o)$ . Der Punkt  $N$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(o, p)$ . Der Punkt  $P$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(p, q)$ . Der Punkt  $Q$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(q, r)$ . Der Punkt  $R$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(r, s)$ . Der Punkt  $S$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(s, t)$ . Der Punkt  $T$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(t, u)$ . Der Punkt  $U$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(u, v)$ . Der Punkt  $V$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(v, w)$ . Der Punkt  $W$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(w, x)$ . Der Punkt  $X$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(x, y)$ . Der Punkt  $Y$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(y, z)$ . Der Punkt  $Z$  liegt auf  $\Gamma$  und hat die Koordinaten  $(z, a)$ .