

Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung

Von W. Wunderlich, Wien

Mit 5 Textabbildungen

Zusammenfassung. Ausgehend von dem genauen, elliptische Integrale enthaltenden Ausdruck für den Winkel des abgewickelten Mantels eines Kegels 2. Ordnung werden eine Tabelle, zwei Kurventafeln und schließlich eine Näherungsformel entwickelt, welche eine bequeme Auswertung mit Hilfe eines Leiternomogrammes oder eines Sonderrechenschiebers gestattet.

Veranlaßt durch verschiedentliche Anfragen aus Praktikerkreisen, betreffend die Bestimmung des Zentriwinkels, der dem in die Ebene ausgebreiteten Mantel eines schiefen Kreiskegels zukommt, hat sich der Verfasser bemüht, diese nicht so ganz einfache Aufgabe in einer den praktischen Bedürfnissen gerecht werdenden Weise zu erledigen.

Da es sich beim schiefen Kreiskegel bekanntlich um den allgemeinen Kegel 2. Ordnung handelt, so scheint es angezeigt, die Rechnung auf dessen charakteristische Abmessungen, nämlich die Hauptöffnungswinkel 2α und 2β zu gründen. Diese sind in jedem Fall elementar aus den Angabestücken des schiefen Kreiskegels zu ermitteln, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll¹. Auf prinzipielle Schwierigkeiten stößt man erst bei der Bestimmung des in der Abwicklung auftretenden Mantelwinkels 4ω , der eine ziemlich komplizierte Funktion der Größen α und β ist. Hauptzweck der vorliegenden Arbeit war es, brauchbare Hilfsmittel zur raschen Auswertung der Funktion $\omega(\alpha, \beta)$ bereitzustellen.

I. Genaue Formel für den Mantelwinkel

In einem Normalkoordinatensystem x, y, z , dessen Achsen mit den Hauptachsen des betrachteten Kegels zusammenfallen, kann dieser stets beschrieben werden durch

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{mit} \quad a = \operatorname{tg} \alpha, \quad b = \operatorname{tg} \beta; \quad (1)$$

hierbei darf ohne Einschränkung $0 \leq \beta \leq \alpha \leq \pi/2$ vorausgesetzt werden. Wir schneiden den Kegel mit der Ebene $z = 1$ ab und stellen die Schnittellipse mittels eines Hilfsparameters φ dar, wobei wir die Koordinaten eines laufenden Punktes zum Ortsvektor

$$\mathbf{r} = (a \sin \varphi, b \cos \varphi, 1) \quad (2)$$

zusammenfassen. Wir betrachten ferner das von zwei benachbarten Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ aufgespannte Mantelelement (Abb. 1) und drücken dessen Fläche dF nach den Elementen der Vektorrechnung auf zwei Arten aus:

$$2dF = |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|^2 d\psi; \quad (3)$$

über das Außenprodukt

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = (b \sin \varphi, -a \cos \varphi, -ab) d\varphi \quad (4)$$

gelangen wir so zum Mantelwinkelelement

$$d\psi = \frac{|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + a^2 b^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + 1} d\varphi. \quad (5)$$

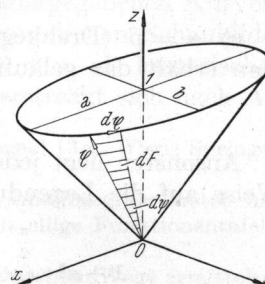


Abb. 1

¹ 2α tritt als Winkel zwischen der kürzesten und der längsten Erzeugenden des schiefen Kreiskegels auf; 2β ist der Winkel jener beiden Erzeugenden, die der Symmetralebene des Winkels 2α angehören.

* Herrn Professor Dr. Paul Funk zum 70. Geburtstag gewidmet.

Tabelle 1 (an der Diagonale gespiegelt zu denken). Mantelquadrant ω in

$\alpha \backslash \beta$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
90°	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00
85°	85°00	85°06	85°20	85°38	85°60	85°85	86°12	86°40	86°70
80°	80°00	80°12	80°41	80°77	81°21	81°71	82°24	82°81	83°40
75°	75°00	75°19	75°62	76°17	76°83	77°58	78°38	79°23	80°11
70°	70°00	70°26	70°83	71°58	72°47	73°46	74°53	75°66	76°84
65°	65°00	65°33	66°04	66°99	68°11	69°35	70°69	72°11	73°59
60°	60°00	60°40	61°27	62°42	63°77	65°27	66°88	68°58	70°35
55°	55°00	55°48	56°51	57°86	59°45	61°21	63°10	65°08	67°15
50°	50°00	50°56	51°76	53°33	55°16	57°19	59°35	61°63	64°00
45°	45°00	45°65	47°03	48°82	50°90	53°21	55°65	58°23	60°90
40°	40°00	40°75	42°32	44°36	46°70	49°28	52°02	54°88	57°85
35°	35°00	35°87	37°65	39°94	42°57	45°43	48°46	51°62	
30°	30°00	31°00	33°03	35°59	38°52	41°67	45°00		
25°	25°00	26°17	28°47	31°34	34°57	38°04			
20°	20°00	21°38	24°01	27°22	30°78				
15°	15°00	16°67	19°69	23°29					
10°	10°00	12°08	15°63						
5°	5°00	7°84							
0°	0°00								

Integration von 0 bis 2π würde den gesuchten Mantelwinkel liefern. Es ist jedoch zweckmäßiger, sich auf den Mantelquadranten

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + a^2 b^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + 1} d\varphi \quad (6)$$

zu beschränken. Der ganze Mantelwinkel hat dann den Wert 4ω .

Das vorliegende Integral läßt sich nur in drei Grenzfällen elementar auswerten, nämlich für

a) $\beta = 0$ (abgeplatteter Kegel): Der Kegel schrumpft auf den doppelt überdeckten Winkel 2α in der xz -Ebene zusammen, und somit ist

$$\omega = \alpha; \quad (6a)$$

b) $\alpha = \pi/2$ (zerfallender Kegel): Der Kegel artet zu einem den Winkel 2β einschließenden Ebenenpaar durch die x -Achse aus, und es wird

$$\omega = \frac{\pi}{2}; \quad (6b)$$

c) $\alpha = \beta$ (Drehkegel): Der Kegel besitzt die z -Achse zur Rotationsachse und man erhält das geläufige Resultat

$$\omega = \frac{\pi}{2} \sin \alpha. \quad (6c)$$

Ansonsten liegt jedoch ein elliptisches Integral vor, das sich in der folgenden Weise auf die Legendreschen Normalformen zurückführen läßt:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1+a^2}{a\sqrt{1+b^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+a^2 k^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1+a^2}{a\sqrt{1+b^2}} \Pi(a^2 k^2, k) - \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}} K(k) \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2(1+b^2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Das auftretende vollständige Integral 1. Gattung K liegt vertafelt vor, und das

Abhängigkeit von den halben Hauptöffnungswinkeln α und β

45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00
87°00	87°31	87°63	87°97	88°31	88°64	88°98	89°32	89°66	
84°01	84°64	85°28	85°94	86°61	87°28	87°95	88°63		
81°03	81°97	82°94	83°92	84°92	85°92	86°93			
78°06	79°32	80°61	81°92	83°24	84°57				
75°12	76°69	78°29	79°92	81°57					
72°19	74°08	75°99	77°94						
69°29	71°49	73°72							
66°44	68°94								
63°64									

vollständige Integral 3. Gattung II läßt sich bekanntlich ausdrücken durch vollständige und unvollständige Integrale 1. und 2. Gattung². Die so gewonnene Endformel

$$\omega = K(k) \cdot E(k', \alpha) - [K(k) - E(k)] \cdot F(k', \alpha) \quad \left. \begin{array}{l} \text{mit} \\ k' = \sqrt{1 - k^2} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + b^2}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \end{array} \right\} \quad (8)$$

kann mit Hilfe eines guten Tafelwerkes in jedem Einzelfall ohne weiteres ausgewertet werden³.

Die hier wiedergegebene, auf Grund der Formel (8) berechnete Tabelle 1 enthält auf Hundertstelgrade die Werte von ω für von 5 zu 5° fortschreitende Werte von α und β . Sie gestattet nunmehr ohne weitere Hilfsmittel durch bloße Interpolation die Bestimmung des Mantelwinkels ω mit einer für praktische Erfordernisse mehr als ausreichenden Genauigkeit⁴.

II. Zwei Netztafeln

An Hand des nunmehr verfügbaren Zahlenmaterials lassen sich sofort geeignete graphische Darstellungen entwickeln, die bei geringeren Genauigkeitsansprüchen eine rasche Ablesung der ω -Werte gestatten. Die in Abb. 2 wiedergegebenen Kurven- tafeln beruhen im Grunde auf einfachen Projektionen jenes räumlichen Schaubildes der Funktion $\omega(\alpha, \beta)$, das bei Deutung der Veränderlichen α, β, ω als kartesischen Koordinaten entsteht. Die so erklärte Diagrammfläche Φ erstreckt sich nach Art

² Vgl. etwa W. Gröbner-N. Hofreiter: Integraltafel II, S. 42, Formel 13a. Wien: Springer-Verlag. 1950.

³ Etwa A. M. Legendre-F. Emde: Tafeln der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Stuttgart: Wittwer. 1931. Oder K. Hayashi: Fünfstellige Funktionentafeln. Berlin: Springer-Verlag. 1930.

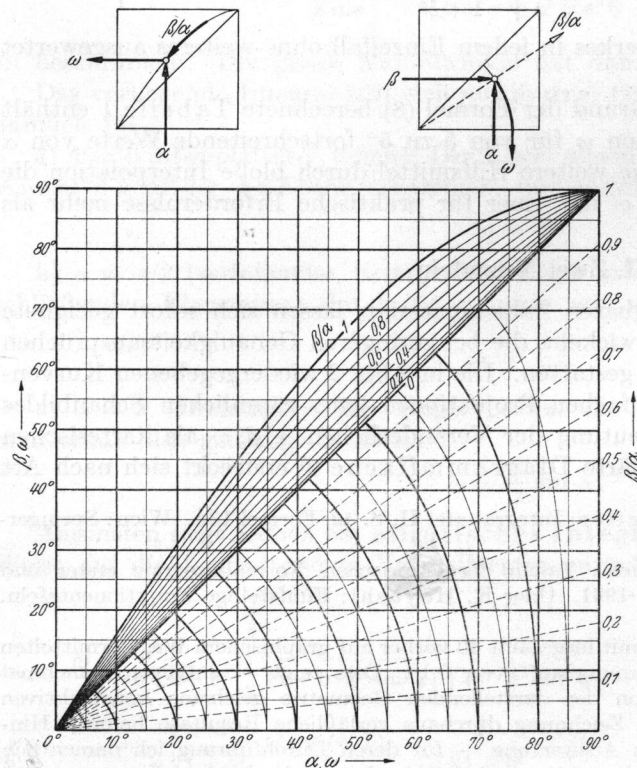
⁴ Vergleich der berechneten Werte mit insgesamt 30 vorher auf graphischem Wege ermittelten Werten ergab durchwegs Übereinstimmung auf etwa 0,1°. Dies zeigt — entgegen manchmal geäußerten Ansichten —, daß die von der darstellenden Geometrie gelehrt konstruktiven Abwicklungsmethoden bei sorgfältiger Zeichnung durchaus verlässliche Resultate liefern. Hingegen erwies sich bei der numerischen Auswertung — für deren Durchführung ich namentlich Herrn Ass. W. Fuhs zu Dank verpflichtet bin —, daß leider keines der beiden oben genannten Tafelwerke vollkommen fehlerfrei ist.

Tabelle 2 (an der Diagonale gespiegelt zu denken). Differenz

$\alpha \backslash \beta$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
90°	00	00	00	00	00	00	00	00	00
85°	00	03	03	03	01	—01	—04	—06	—08
80°	00	06	06	06	03	—02	—05	—10	—13
75°	00	08	09	08	05	—02	—07	—12	—16
70°	00	10	13	11	05	—01	—08	—14	—18
65°	00	13	16	14	07	00	—08	—15	—19
60°	00	15	19	16	08	00	—08	—14	—18
55°	00	17	21	18	09	00	—09	—14	—16
50°	00	19	23	18	09	—01	—09	—13	—14
45°	00	21	24	18	09	—02	—09	—12	—10
40°	00	22	24	16	07	—03	—08	—07	00
35°	00	22	23	14	02	—05	—06	00	
30°	00	22	19	09	—01	—05	00		
25°	00	20	14	04	—03	00			
20°	00	17	07	—01	00				
15°	00	11	01	00					
10°	00	05	00						
5°	00	00							
0°	00								

eines Kegels vom Nullpunkt zur Randkante $\alpha = \pi/2$, $0 \leq \beta \leq \pi/2$, $\omega = \pi/2$, wobei jedoch die in den Ebenen $\beta/\alpha = \text{konst.}$ verlaufenden „Meridianprofile“ im allgemeinen nicht geradlinig sind. Eine Ausnahme bildet lediglich das Randprofil $\beta = 0$, das gemäß (6a) gerade ist, während das zweite Randprofil $\beta/\alpha = 1$ zufolge (6c) vom

Teilbogen einer Sinuslinie gebildet wird; die dazwischen liegenden Meridianprofile sind gleichfalls monoton ansteigende Zwischenformen.

Abb. 2. Doppeltafel zur Ablesung von ω

Die in Abb. 2 unterhalb der Diagonale befindliche Diagrammhälfte stellt gewissermaßen den Schichtenplan von Φ im Grundriß dar. Diese Netztafel besteht aus der im (α, β) -Raster eingetragenen Kurvenschar $\omega = \text{konst.}$ und erlaubt nach der in der rechten Nebenfigur angedeuteten Vorschrift zu jedem Wertepaar α, β unmittelbar den entsprechenden ω -Wert abzulesen⁵.

⁵ Die auf der α -Achse liegenden Scheitel der Diagrammkurven $\omega = \text{konst.}$ haben verschwindenden Krümmungsradius; bei den Scheiteln auf der Diagonale findet man (mittels Potenzreihenentwicklung) für den Krümmungsradius den Wert $\varrho = 2 \sqrt{2} \sin 2\alpha / (3 - \cos 2\alpha) = 4 \sqrt{2} \omega \sqrt{\pi^2 - 4\omega^2} / (\pi^2 + 4\omega^2)$.

Näherungswert — Sollwert des Mantelquadranten in Hundertstelgraden

45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
—09	—09	—10	—11	—11	—09	—07	—04	00	
—15	—17	—17	—17	—15	—12	—06	00		
—19	—20	—21	—19	—15	—09	00			
—21	—22	—21	—17	—10	00				
—22	—21	—18	—11	00					
—20	—18	—11	00						
—15	—11	00							
—09	00								
00									

Die Diagrammhälfte oberhalb der Diagonale ist als Aufriß der vorhin erwähnten Meridianprofilschar von Φ aufzufassen. Diese Netztafel besteht aus der im (α, ω) -Raster eingetragenen Kurvenschar $\beta/\alpha = \text{konst.}$ Die Benützung dieses Diagramms verlangt wohl zunächst die Bestimmung von β/α — was mit dem Rechenschieber oder nomographisch mittels der gestrichelten Büschelskala in der anderen Tafelhälfte geschehen kann —, dafür ist aber (gemäß der linken Nebenfigur) ω in einer linearen Teilung abzulesen⁶.

Bei dieser Gelegenheit sei noch auf eine Netztafel von E. J. Nyström hingewiesen, die direkt auf die Verwendung für schiefe Kreiskegel zugeschnitten ist, allerdings nicht den ganzen Wertebereich erfaßt⁷.

III. Eine Näherungsformel

Betrachtung der Kurvenschar $\beta/\alpha = \text{konst.}$ in der zweiten Netztafel erweckt den Eindruck, daß die zwischen den Grenzlinsen $\beta/\alpha = 0$ und 1 liegenden Ordinatenabschnitte $(\pi/2) \sin \alpha - \alpha$ sämtlich in gleicher Weise, das heißt geometrisch ähnlich unterteilt werden. Genau kann dies wegen der höheren Transzendenz der Zwischenkurven natürlich nicht der Fall sein, doch bietet sich hier immerhin ein Ansatz für eine brauchbare und sehr bequeme Näherung.

Zur Prüfung des Sachverhaltes wird man für verschiedene feste Werte von α die Abhängigkeit des Teilverhältnisses

$$\frac{\omega - \alpha}{(\pi/2) \sin \alpha - \alpha} = \lambda \quad (9)$$

von β/α graphisch darstellen. Es zeigt sich, daß die so erhaltenen Diagrammkurven tatsächlich fast identisch ausfallen. Als nächstes wird man trachten, diese Diagrammkurven durch eine gemeinsame, analytisch möglichst einfach beschreibbare Linie

⁶ Mit Rücksicht auf die verkleinerte Wiedergabe wurde bei allen graphischen Tafeln davon abgesehen, die Unterteilung weiter zu verfeinern.

⁷ E. J. Nyström: Abwicklung von Kegelflächen zweiter Ordnung. Soc. Sci. Fennica, Comm. phys. math. 12 (1944).

anzunähern. Die nebenstehende Darstellung im doppelt-logarithmischen Raster läßt erkennen, daß die als Prototyp verwendete Kurve $\alpha = 50^\circ$ mit guter Näherung durch das Potenzgesetz

$$\lambda \approx \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1.4} \quad (10)$$

wiedergegeben wird. Über (9) führt dieser Ersatz zur Näherungsformel

$$\omega \approx \alpha + \left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha - \alpha\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1.4}, \quad (11)$$

welche natürlich nur unter der Voraussetzung $\alpha \geq \beta$ verwendet werden darf.

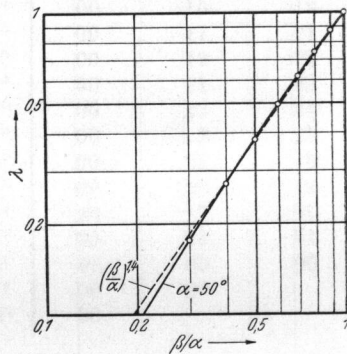


Abb. 3

Ein Urteil über die Güte der Approximationsformel (die in den drei Grenzfällen $\beta = 0$, $\alpha = \pi/2$ und $\alpha = \beta$ den genauen Wert liefert) erlaubt die vorstehende Tabelle 2, die in Hundertstelgraden die Differenzen zwischen dem Näherungswert gemäß Formel (11) und dem Sollwert gemäß Tabelle 1 aufzeigt⁸. Wie man sieht, übersteigt der Fehlerbetrag nirgends $1/4$ Grad, was für die meisten Zwecke als tragbar anzusehen sein dürfte. Es ist klar, daß sich der Fehler noch herunterdrücken läßt, wenn man

sich auf einen entsprechend kleinen Ausschnitt des Variabilitätsbereiches beschränkt, und dies ist fraglos in jedem bestimmten Anwendungsgebiet von vornherein möglich.

IV. Eine Leitertafel

Schreiben wir die Näherungsformel (11) unter gleichzeitigem Übergang vom Bogen- zum Gradmaß in der Gestalt

$$\omega \approx \alpha + p \cdot \beta^{1.4} \quad \text{mit} \quad p = \frac{90 \sin \alpha - \alpha}{\alpha^{1.4}}, \quad (12)$$

so stellt sie sich als lineare Beziehung zwischen ω und $\beta^{1.4}$ mit nur von α abhängigen Koeffizienten dar. Eine solche Abhängigkeit ist bekanntlich in Form einer Leitertafel nomographierbar, welche eine krumme Skala für α und zwei gerade Skalen für β und ω aufweist.

Abb. 4 zeigt eine solche für den ganzen Variabilitätsbereich angelegte Leitertafel, deren Skalen in einem geeigneten schiefwinkligen Koordinatensystem ξ, η durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \dots \xi &= \frac{90}{1 + 6p}, & \eta &= -\frac{\alpha}{1 + 6p}; \\ \beta \dots \xi &= 0, & \eta &= \frac{1}{6} \beta^{1.4}; \\ \omega \dots \xi &= 90, & \eta &= -\omega. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingung dafür, daß drei Skalenpunkte mit den obigen Koordinaten auf einer (Ablese-) Geraden liegen, der Gl. (12) äquivalent ist. Bei der Benützung des Nomogramms ist wieder darauf zu achten, daß die Bedingung $\alpha \geq \beta$ eingehalten wird.

⁸ Negatives Vorzeichen bedeutet also, daß die Näherungsformel einen zu kleinen Wert liefert.

Die Genauigkeit des Nomogramms läßt sich beträchtlich steigern, wenn man den Anwendungsbereich einschränkt und die Skalengleichungen (13) entsprechend modifiziert.

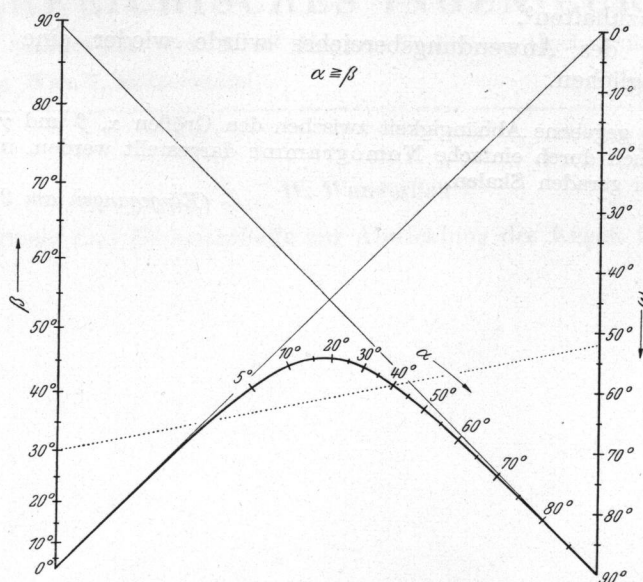


Abb. 4. Approximative Leitertafel für ω . Ablesebeispiel: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 30^\circ$; $\omega \approx 52^\circ$

V. Ein Sonderrechenstab

Schreiben wir die Näherungsformel (11) in der Gestalt

$$\omega - \alpha \approx \frac{\beta^{1.4}}{q} \quad \text{mit} \quad q = \frac{\alpha^{1.4}}{90 \sin \alpha - \alpha}, \quad (14)$$

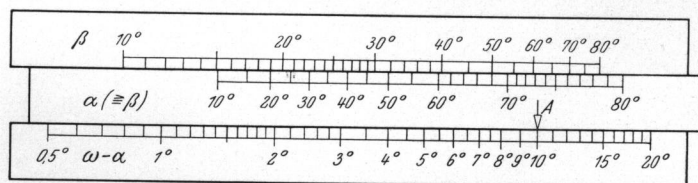


Abb. 5. Sonderrechenstab für die Differenz $\omega - \alpha$. Ablesebeispiel: $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 19^\circ$;
 $\omega - \alpha \approx 10^\circ$, $\omega \approx 30^\circ$

dann liegt eine reine Produktrelation vor, die sich nach Logarithmierung durch einen entsprechenden Rechenschieber darstellen läßt. Abb. 5 zeigt eine Ausführungsform, bei der die Skalen für α , β und $\gamma = \omega - \alpha$ durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha \dots x &= \lg q = 1.4 \cdot \lg \alpha - \lg (90 \sin \alpha - \alpha), \\ \beta \dots y &= 1.4 \cdot \lg \beta, \\ \omega - \alpha \dots z &= \lg \gamma = \lg (\omega - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

beschrieben werden. Der Rechenstab verwirklicht die zu (12) äquivalente Beziehung

$$z = y - x. \quad (16)$$

Zur Berechnung von ω stellt man die α -Marke der verschiebbaren Zunge unter die β -Marke auf der oberen Hälfte des Grundkörpers, worauf sich unterhalb der auf

der Zunge befindlichen Ablesemarke A die Differenz $\omega - \alpha = \gamma$ ablesen läßt; anschließend ergibt sich dann mittels Kopfrechnung $\alpha + \gamma = \omega$. Auch hier ist unbedingt $\alpha \geq \beta$ einzuhalten⁹.

Einschränkung des Anwendungsbereiches würde wieder eine Steigerung der Genauigkeit ermöglichen.

⁹ Die durch (14) gegebene Abhängigkeit zwischen den Größen α , β und $\gamma = \omega - \alpha$ könnte selbstverständlich auch durch einfache Nomogramme dargestellt werden, insbesondere durch Leitertafeln mit drei geraden Skalen.

(Eingegangen am 24. Januar 1956)