Sonderdruck aus
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
Akademie-Verlag
Band 36 Heft 3/4 März/April 1956

Zur angenäherten Geradführung durch symmetrische Gelenkvierecke

Von *W. Wunderlich* in Wien

Für die seinerzeit von Tschebyschew entwickelten, durch achsialsymmetrische Koppelkurven mit dreifach berührender Scheiteltangente vermittelten angenäherten Geradführungen wird eine elementar-algebraische Theorie dargelegt, die eine einfache Berechnung und übersichtliche Erfassung der vielfältigen Annahmen gestattet.

An elementary algebraic theory, permitting an easy computation and giving a clear insight into the various possibilities, is presented for the approximate straightline motion, developped by Chebychev by means of axially symmetric three-bar curves with a triple vertex tangent.

Une théorie algébrique élémentaire, permettant une computation simple et une vue claire des possibilités diverses, est présentée pour les guidages approximativement rectilignes, développés par Tchebycheff, au moyen de courbes du trois-barres symétriques avec une tangente triple au sommet.

Для приближенного представления прямолинейного движения при помощи дуги симметричной около одной оси, имеющей три точки соприкасания с горизонтальной прямой, предложенного П. Л. Чебыщевым, предлагается элементарный алгебраический метод, который упрощает вычисления и позволяет наглядно представить разнообразные предположения.

1. Grundlagen

Den klassischen, von P. L. Tschebyschew unter Anwendung seines Approximationsprinzips der „kleinsten Maximalabweichung" entwickelten angenäherten Geradführungen, denen symmetrische Gelenkvierecke mit bestimmten Abmessungen zugrundeliegen[1]), wurde neuerdings durch die deutsche Übersetzung der ausführlichen Bearbeitung von S. Sch. Bloch[2]) wieder ein gewisses Interesse zuteil, das sie wohl verdienen. Leider weisen weder die Originalabhandlungen noch die späteren Darstellungen jene wünschenswerte Durchsichtigkeit auf, die vor allem der Techniker schätzt, weil sie ihm die Nutzbarmachung theoretischer Ergebnisse erleichtert[3]). Es soll daher hier der Versuch gemacht werden, unter Fortlassung alles überflüssigen Beiwerks eine ganz elementare Theorie dieser Geradführungen zu geben. Als Frucht der wesentlich vereinfachten Behandlungsweise werden sich neben der bisher fehlenden Übersicht auch einige grundsätzlich neue Ergebnisse einstellen.

Betrachtet wird ein symmetrisches Gelenkviereck $A_1 B_1 B_2 A_2$ mit festem Steg $A_1 A_2 = 2a$, beweglicher Koppel $B_1 B_2 = 2b$, gleichen Kurbelradien $A_1 B_1 = A_2 B_2 = r$ und gleichschenkligem Koppeldreieck $B_1 B_2 C$, festgelegt durch seine Höhe c (Bild 1). Zur analytischen Beschreibung der vom Punkt C im Verlauf der Bewegung durchlaufenen symmetrischen Koppelkurve diene ein kartesisches Normalkoordinatensystem x, y, dessen Ursprung O in der Mitte des die x-Achse abgebenden Stegs liegt, so daß den Lagerpunkten A_1, A_2 die Koordinaten $(\pm a, 0)$ zukommen[4]). Als Bewegungsparameter wird nach dem Vorbild von Tschebyschew der von den Kurbeln eingeschlossene Winkel 2ϑ verwendet, der jeweils ein Paar symmetrischer Lagen kennzeichnet.

---

[1]) P. L. Tchebychef, Sur les parallélogrammes composés de trois éléments et symétriques par rapport à un axe; Zap. Akad. Nauk 34 (1879); Oeuvres II, 285—297. — Vgl. auch N. Delaunay, Die Tschebyscheffschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen; Z. Math. Phys. 44 (1899), 101—111.

[2]) S. Sch. Bloch, Angenäherte Synthese von Mechanismen (Berlin 1951).

[3]) Nur so ist es wohl erklärlich, daß beispielsweise in dem soeben erschienenen Spezialwerk von R. Kraus, Geradführungen durch das Gelenkviereck (Düsseldorf 1955) die Untersuchungen Tschebyschews keinerlei Niederschlag gefunden haben.

[4]) Damit ist auch die Bedeutung des Vorzeichens von a geregelt; b und r seien stets positiv, während c das Vorzeichen des Umlaufsinns im Koppeldreieck $B_1 B_2 C$ haben soll.

Ergänzt man mit Bloch das Stabpaar $A_1B_1B_2$ zu einem Parallelogramm $A_1B_1B_2N$, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck A_2NB_2 mit dem Scheitelwinkel $2\,\vartheta$ bei B_2 (Bild 1). Seine Höhe MB_2 und die zur Koppelmitte D zielende Strecke OD sind der Richtung und Länge nach gleich und gehen durch Vierteldrehung und Multiplikation mit $\operatorname{ctg}\vartheta$ aus dem Vektor A_2M hervor, der die Komponenten $a - b\cos\varphi$ und $-b\sin\varphi$ besitzt, wenn φ den Neigungswinkel der Koppel gegen die x-Achse bezeichnet. Damit ergeben sich für den Koppelpunkt C die Koordinaten

$$x = (b\operatorname{ctg}\vartheta + c)\sin\varphi, \quad y = a\operatorname{ctg}\vartheta - (b\operatorname{ctg}\vartheta + c)\cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (1.1).$$

Elimination von φ auf Grund des im Dreieck OA_2M geltenden Kosinussatzes

$$a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\varphi = r^2\sin^2\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.2)$$

führt dann schließlich auf die für das folgende benötigte Parameterdarstellung der Koppelkurve:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b\operatorname{ctg}\vartheta + c}{2\,ab}\sqrt{4\,a^2b^2 - (a^2 + b^2 - r^2\sin^2\vartheta)^2}\,, \\ y &= a\operatorname{ctg}\vartheta - \frac{b\operatorname{ctg}\vartheta + c}{2\,abc}(a^2 + b^2 - r^2\sin^2\vartheta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1.3).$$

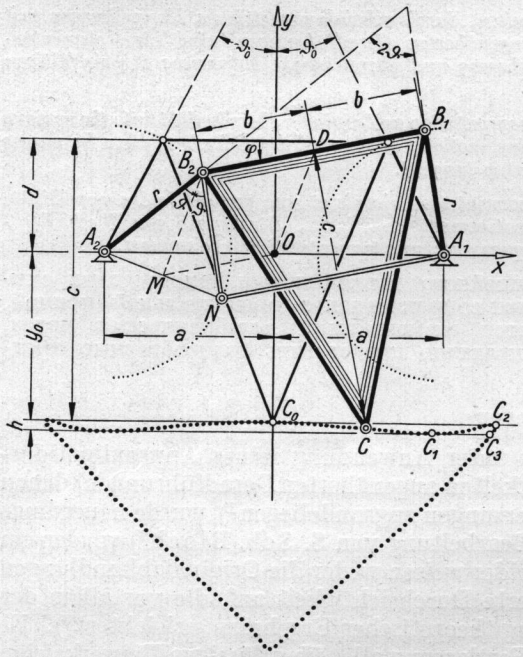

Bild 1. Koppelkurve mit dreifach berührender Scheiteltangente ($a = 1{,}506\,b = 1$; $c = 2{,}5$; $d = 1$)

Es empfiehlt sich im übrigen, anstatt des Kurbelhalbmessers r die zur Nullstellung $\varphi = 0$ gehörige Koppelordinate d einzuführen, welche ohne Einschränkung als positiv vorausgesetzt werden kann. Der Zusammenhang lautet

$$r^2 = (a - b)^2 + d^2 \quad \ldots\ldots \quad (1.4).$$

In der Nullstellung, gekennzeichnet durch den Parameterwert

$$\vartheta_0 = \arcsin\frac{a - b}{r} = \operatorname{arctg}\frac{a - b}{d} \quad (1.5),$$

befindet sich der Koppelpunkt C in einem der y-Achse angehörenden Scheitel C_0 seiner Bahn:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = d - c \quad \ldots\ldots \quad (1.6).$$

Charakteristisch für die Geradführung von Tschebyschew ist nun die Verwendung einer Koppelkurve, die eine Zeitlang als flache Wellenlinie zwischen zwei parallelen Geraden hin und her pendelt und dieselben dabei möglichst oft erreicht; da die Koppelkurve von 6. Ordnung ist, kann die eine Gerade dreimal und die andere zweimal berührt werden. Ausschlaggebend ist also die Forderung, daß die Scheiteltangente $y = y_0$ eine dreifache Tangente ist; eine dazu parallele Doppeltangente $y = y_1$ stellt sich dann ganz von selbst ein (Bild 1). Ob damit auch schon tatsächlich eine angenäherte Geradführung erreicht ist, hängt allerdings nicht bloß von der Größe des Tangentenabstandes $y_1 - y_0 = h$ ab, sondern vor allem von der Realität und Anordnung der genannten Berührungsstellen, die noch einer eigenen Prüfung zu unterziehen sein werden.

2. Koppelkurven mit dreifach berührender Scheiteltangente

Zwecks Aufstellung der Bedingung für eine dreifache Berührung der Scheiteltangente $y = y_0$ wird man zunächst vermöge

$$u = \operatorname{ctg}\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.1)$$

eine Rationalisierung der Ordinatendarstellung in (1.3) vornehmen, welche dadurch die Gestalt

$$y = P\,u + Q\,\frac{b\,u + c}{u^2 + 1} + R \quad \text{mit} \quad P = \frac{a^2 - b^2}{2\,a}, \quad Q = \frac{r^2}{2\,ab}, \quad R = -\frac{a^2 + b^2}{2\,ab}\,c \quad \ldots \quad (2.2)$$

annimmt. Wegschaffung der Nenner und Berücksichtigung von (1.4) führt schließlich auf die kubische Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &A_0\,u^3 + A_1\,u^2 + A_2\,u + A_3 = 0 \\ \text{mit}\quad &A_0 = (a^2 - b^2)\,b\,, \quad A_1 = -(a^2 + b^2)\,c - 2\,ab\,y\,, \\ &A_2 = (2\,a^2 - 2\,ab + d^2)\,b\,, \quad A_3 = c\,d^2 - 2\,ab\,(c + y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.3).$$

Die Auflösung dieser Gleichung für ein angenommenes y liefert drei u-Werte und damit die sechs (zur y-Achse symmetrisch angeordneten) Punkte der Koppelkurve in der Höhe y. Für die Annahme $y = y_0 = d - c$ muß sich die zum Scheitel C_0 gemäß (1.5) gehörige Wurzel

$$u_0 = \frac{d}{a-b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4)$$

einstellen, d. h. die linke Seite von (2.3) muß ohne Rest durch den Wurzelfaktor $u - u_0$ teilbar sein. Die so gewonnene Quotientengleichung

$$\left.\begin{aligned} &B_0 u^2 + B_1 u + B_2 = 0 \\ \text{mit}\quad &B_0 = A_0\,,\ B_1 = B_0 u_0 + A_1\,,\ B_2 = B_1 u_0 + A_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.5)$$

bestimmt die Restschnittpunkte der Scheiteltangente. Es zeigt sich, daß sämtliche Koeffizienten durch $a - b$ teilbar sind; die so vereinfachte Gleichung lautet ausführlich

$$\left.\begin{aligned} &B_0' u^2 + B_1' u + B_2' = 0 \\ \text{mit}\quad &B_0' = (a+b)\,b\,,\ B_1' = -(a-b)\,c - b\,d\,,\ B_2' = 2\,a\,b - c\,d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.6).$$

Sollen nun, wie verlangt, diese Restschnittpunkte (paarweise) zusammenrücken, so muß die Diskriminante $B_1'^2 - 4\,B_0'\,B_2'$ verschwinden. Auf diese Weise erhält man für das Vorhandensein einer dreifach berührenden Scheiteltangente die — in dieser einfachen Form bisher nicht bekannte — Bedingung

$$\boxed{[(a-b)\,c + b\,d]^2 = 4\,(a+b)\,(2\,a\,b - c\,d)\,b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2{,}7).$$

Die beiden „Nebenberührungsstellen" C_2 der Scheiteltangente sind dann durch den als Doppelwurzel von (2.6) auftretenden Parameterwert

$$u_2 = \frac{(a-b)\,c + b\,d}{2\,(a+b)\,b} = \frac{2\,(2\,a\,b - c\,d)}{(a-b)\,c + b\,d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.8)$$

bestimmt. Ihre Entfernung $l = 2 \cdot \overline{C_0\,C_2} = 2\,x_2$ kann unter Umständen als Anhalt für die Länge der Geradführung dienen.

An dieser Stelle ist die wichtige Bemerkung zu machen, daß die Größen u_0 und u_2, als unabhängige Parameter aufgefaßt, zu einer rationalen Darstellung der der Schlüsselgleichung (2.7) genügenden Abmessungen a, b, c, d des Gelenkvierecks verhelfen. Auflösung der drei homogenen Gleichungen (2.4) und (2.8) führt unter Verwendung eines freibleibenden Proportionalitätsfaktors λ auf

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \lambda\,(u_0 + u_2)^2\,(2\,u_0\,u_2 + u_2^2 - 1) \\ b &= \lambda\,(u_0^2 - 2\,u_0\,u_2 - u_2^2 + 2)\,(2\,u_0\,u_2 + u_2^2 - 1) \\ c &= \lambda\,(u_0^2 - 2\,u_0\,u_2 - u_2^2 + 2)\,(u_0 + 2\,u_2 - u_0\,u_2^2) \\ d &= \lambda \cdot 2\,u_0\,(2 u_0\,u_2 + u_2^2 - 1)^2 \end{aligned}} \quad \ldots\ldots \quad (2.9).$$

Diese neuartige Parameterdarstellung ist stets von Nutzen, wenn es auf die Erfüllung der Bedingung (2.7) ankommt.

3. Abweichung

Zur Beurteilung der Abweichung der approximierenden Koppelkurve von der Geraden ist es angezeigt, einen Ausdruck für die Differenz $y - y_0$ aufzustellen. Ausgehend von der aus (2.2) fließenden Beziehung

$$y - y_0 = P\,(u - u_0) - Q\,(u - u_0)\,\frac{b\,(u\,u_0 - 1) + c\,(u + u_0)}{(u^2+1)\,(u_0^2+1)} \quad \ldots\ldots \quad (3.1)$$

erhält man unter Benützung der rationalen Parametersdarstellung (2.9) nach einigen Umformungen die nachstehenden Ausdrücke für die Abweichung:

$$y - y_0 = P \cdot \frac{(u-u_0)\,(u-u_2)^2}{u^2+1} = r \cdot \frac{\sin(\vartheta - \vartheta_0)\,\sin^2(\vartheta - \vartheta_2)}{\sin^2(\vartheta + \vartheta_2)\,\sin\vartheta} \quad \ldots\ldots \quad (3.2).$$

Zur Bestimmung der Maximalabweichung setze man die logarithmische Ableitung gleich Null. Die so gewonnene Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}\ln(y-y_0)}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{u-u_0}+\frac{2}{u-u_2}-\frac{2u}{u^2+1}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3.3)$$

führt dann auf die kubische Gleichung

$$u^3+u_2u^2+(3-2u_0u_2)u-(2u_0+u_2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3.4),$$

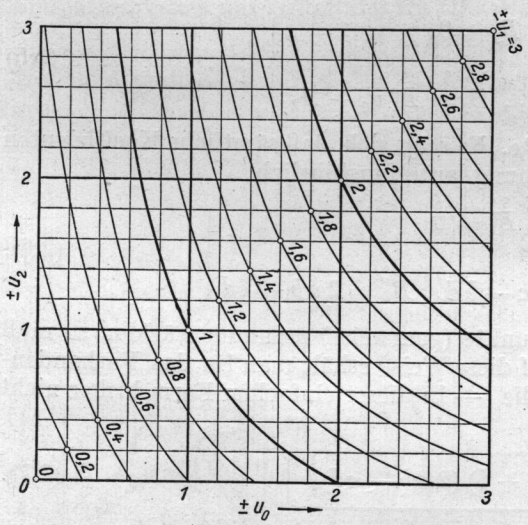

Bild 2. Kurventafel zur Auflösung der kubischen Gleichung (3.4)

deren Lösungen drei zur x-Achse parallele Doppeltangenten der Koppelkurve festlegen. Für die der Scheiteltangente $y=y_0$ benachbarte Doppeltangente $y=y_1$ kommt in der Regel die zwischen u_0 und u_2 liegende Wurzel u_1 in Betracht, deren ungefährer Wert aus der Kurventafel Bild 2 abgelesen werden kann.[5]) Mit diesem Wert gibt (3.2) folgende, zur Auswertung mit dem Rechenschieber geeignete Formel für die Maximalabweichung:

$$\boxed{h=\frac{(a^2-b^2)}{2a}\cdot\frac{(u_1-u_0)(u_1-u_2)^2}{u_1^2+1}} \quad . (3.5).$$

Die Größe h gibt ein gewisses Maß für die Güte der Geradführung, doch muß betont werden, daß bei den durch $u_0=u_1=u_2$ gekennzeichneten Annahmen mit verschwindendem h das Optimum auf Kosten der Geradführungslänge l bereits überschritten erscheint (vgl. hierzu Abschnitt 4, III). Immerhin mag es von Interesse sein, eine auf den Fall kleiner Parameterdifferenz $u_2-u_0=v\ll u_0$ zugeschnittene Näherungsformel für h verfügbar zu haben. Man bestätigt zunächst leicht, daß die Gleichung (3.4) bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung durch $u_1\approx u_0+v/3$ befriedigt wird und erhält damit gemäß (3.5) die (ziemlich grobe) Näherungsformel

$$h\approx\left(\frac{u_2-u_0}{3u_0}\right)^3\cdot d \quad \ldots\ldots\ldots (3.6).$$

4. Übersichtsnomogramm

Um einen Überblick über den der Fundamentalbedingung (2.7) genügenden Wertevorrat zu erhalten, werde zunächst zur Verringerung der Variablenzahl die einzige in dritter Potenz auftretende Veränderliche b gleich 1 gesetzt; die Abmessungen a, c und d des Gelenkvierecks werden also mit der halben Koppel als Längeneinheit gemessen und erfüllen die Beziehung

$$[(a-1)c+d]^2=4(a+1)(2a-cd) \quad \ldots\ldots\ldots (4.1),$$

oder, nach d aufgelöst,

$$d=-(3a+1)c\pm\sqrt{8a(a+1)(c^2+1)} \quad \ldots\ldots\ldots (4.2).$$

Die in Bild 3 und ausschnittsweise in Bild 4 wiedergegebene graphische Darstellung dieser Bedingung beruht auf der Deutung von a und d als kartesischen Koordinaten in der Ebene und besteht aus einer nach c bezifferten Hyperbelschar. Die Bildpunkte $A_{1,2}(\pm a, d)$ repräsentieren direkt die Lager, die Punkte $B_{1,2}(\pm 1, 0)$ die Koppelenden und der Punkt $C_0(0, c)$ den geradegeführten Koppelpunkt in der Nullstellung. So erhält man unmittelbar eine anschauliche Vorstellung vom Aussehen des Gelenkvierecks, dessen Kurbelradius r überdies in der Strecke A_1B_1 abgegriffen werden kann.

Die Hyperbeln $c=\text{const}$, welche zwei parallele gemeinsame Tangenten $a=0$ und $a=-1$ und einen gemeinsamen Brennpunkt $B_1(1, 0)$ besitzen, würden die Ebene eigentlich doppelt überdecken. Scheidet man jedoch alle Annahmen aus, die für Geradführungen deshalb nicht in Betracht kommen, weil etwa die Nebenberührungspunkte C_2 der Scheiteltangente imaginär aus-

[5]) Die auf der Gl. (3.4) beruhende Kurventafel baut sich aus gleichseitigen Hyperbeln auf und kann aus Symmetriegründen sowohl für positive als auch für negative Wertetripel benützt werden.

fallen oder einem anderen Zweig der Koppelkurve angehören, so bleiben nur die drei in Bild 3 wiedergegebenen einfach überdeckten Gebiete über. Ihre Begrenzung wird von den folgenden Linien gebildet:

I. Von den Geraden $a = \pm 1$. Sie repräsentieren Gelenksparallelogramme bzw. -antiparallelogramme. Die dreifache Berührung der Scheiteltangente tritt hier nur bei

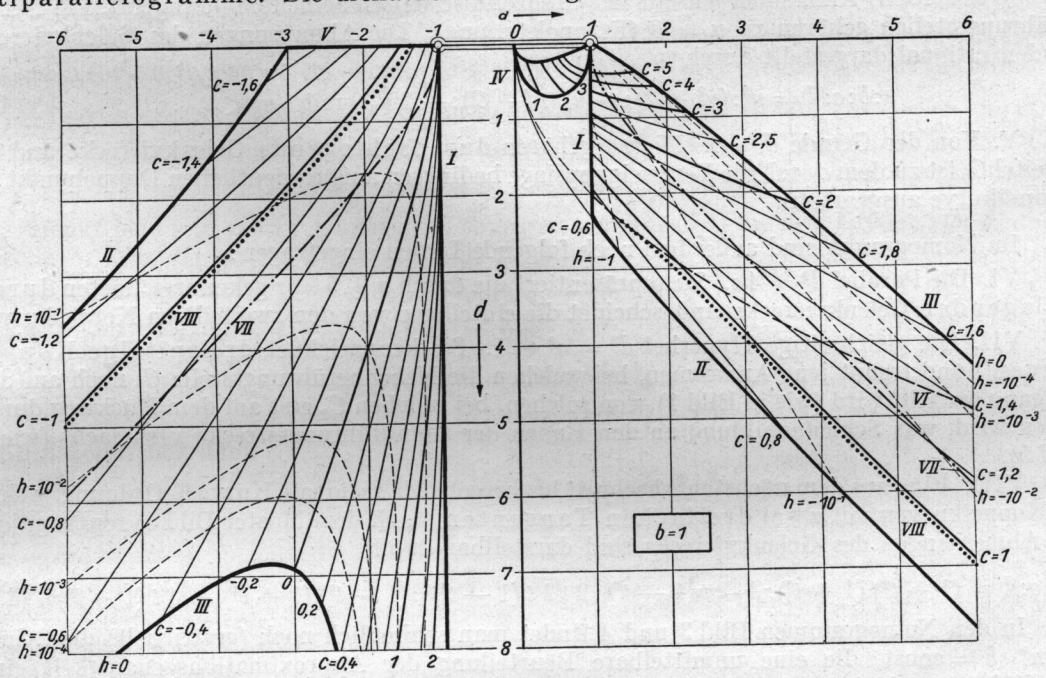

Bild 3. Übersichtsnomogramm

Betrachtung der vollständigen, in einen Kreis und eine Kurve 4. Ordnung zerfallenen Koppelkurve zu Tage; für $a = -1$ sind überdies der Scheitel C_0 zu einer Spitze und die Nebenberührungspunkte C_2 zu Doppelpunkten entartet.

II. Von der Kurve 3. Ordnung

$$(a + 2)\, d^2 = a\,(a + 3)^2.$$

Bei der Koppelkurve sind die Nebenberührungspunkte mit dem Scheitel zusammengerückt, wo eine Selbstberührung mit einem Bogen verschwindender Krümmung vorliegt. Die Abmessungen des Gelenkvierecks sind rational darstellbar in der Form

$$a:b:c:d = 2\,u_2^2 : (1 - u_2^2) : u_2\,(1 - u_2^2) : u_2\,(3 - u_2^2) \quad (4.3).$$

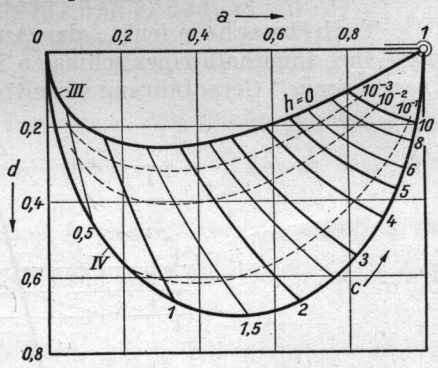

Bild 4. Ausschnitt aus dem Übersichtsnomogramm

III. Von der Kurve 3. Ordnung

$$(a + 2)\, d^2 = a\,(a - 1)^2.$$

Auch hier sind die Nebenberührungspunkte der Koppelkurve mit dem Scheitel zusammengerückt, diesmal aber zu einem Überflachpunkt mit sechspunktig berührender Tangente. Die rationale Darstellung (2.9) nimmt mit $u_0 = u_2\,(= u_1)$ die Gestalt

$$a:b:c:d = 2\,u_0^2\,(3\,u_0^2 - 1) : (1 - u_0^2)\,(3\,u_0^2 - 1) : u_0\,(1 - u_0^2)\,(3 - u_0^2) : u_0\,(3\,u_0^2 - 1)^2 \quad . \quad (4.4)$$

an; mittels $u_0 = \operatorname{ctg} \vartheta_0$ folgt daraus eine trigonometrische Darstellung,

$$a:b:c:r = 2\cos^2 \vartheta_0 : -\cos 2\,\vartheta_0 : \cos 2\,\vartheta_0 \operatorname{ctg} 3\,\vartheta_0 : \pm \operatorname{cosec}^2 \vartheta_0 \sin 3\,\vartheta_0 \quad . \; . \; . \quad (4.5),$$

die der von Tschebyschew mitgeteilten äquivalent ist.[6]) Vermerkt sei noch der Beginn der Potenzreihenentwicklung in der Umgebung des Koppelkurvenscheitels:

$$y - y_0 = \frac{x^6}{m^5} + \cdots \quad \text{mit} \quad m^5 = \frac{256\,u_0^5\,(1 + u_0^2)^3}{(1 - u_0^2)^2\,(1 - 3\,u_0^2)}\,b^5 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4.6).$$

[6]) P. L. Tchebychef, Sur les parallélogrammes les plus simples, symétriques autour d'un axe. AFAS, Paris 1878; Oeuvres II, 709—714. S. Sch. Bloch, a. a. O. 57ff. — Die Koppelkurven mit sechspunktig berührenden Tangenten untersuchte auch R. Müller, Z. Math. Phys. 46 (1901), 330—342.

Die Strecke m kann als relatives Maß für die Approximationslänge dienen; die Abweichung der Schmiegparabel 6. Ordnung $m^5 (y - y_0) = x^6$ von der Tangente $y = y_0$ steigt beispielsweise innerhalb $|x| \leq |m/4|$ nur bis auf etwa $1^0/_{00}$ der halben Intervallänge an.

IV. Von der Ellipse $d^2 = 2a(1 - a)$. Der Scheitel C_0 der Koppelkurve ist hier zu einer Spitze geworden; Annahmen jenseits der Grenzellipse weisen Schleifenbildung auf. Die Nebenberührungsstellen gehören zu $u_2 = 0$ (Fernpolstellung). Die Abmessungen des Gelenkvierecks werden rational dargestellt durch

$$a:b:c:d = u_0^2:(u_0^2 + 2):-u_0(u_0^2 + 2):-2u_0 \quad \text{mit} \quad u_0 < 0 \quad \ldots\ldots \quad (4.7).$$

V. Von der Gerade $d = 0$. Hierzu gehören durchschlagende Gelenkvierecke und der Scheitel C_0 ist zu dem durch die Verzweigungslage bedingten außerordentlichen Doppelpunkt der Koppelkurve ausgeartet.

Im Nomogramm sind außerdem noch folgende Linien eingetragen:

VI. Die Parabel $d^2 = 4a$. Sie repräsentiert die durch $a + b = r$ gekennzeichneten durchschlagenden Gelenkvierecke und scheidet die einteiligen von den zweiteiligen Koppelkurven.

VII. Die gleichseitige Hyperbel $d^2 = a^2 - 1$. Sie kennzeichnet dreispitzige Koppelkurven[7]) und trennt jene Annahmen, bei welchen die Nebenberührungsstelle C_2 noch auf dem Hingang erreicht wird (wie in Bild 1), von solchen, bei welchen C_2 erst auf dem Rückweg durchlaufen wird, was Schleifenbildung an den Enden der Geradführungsstrecke verursacht (wie in Bild 5).

VIII. Eine aus dem nächsten Abschnitt hervorgehende rationale Kurve 6. Ordnung, welche die Koppelkurven mit zwei dreifachen Tangenten (nach dem Muster Bild 5) repräsentiert. Die Abmessungen des Gelenkvierecks sind darstellbar durch

$$a:b:c:d = (1 + t^2)(1 + t^4):2\sqrt{2}\,t(1 - t^4):2\sqrt{2}\,t(1 - t^2)^2:(1 - t^2)(1 + t^4) + 4t(1 + t^2)^2 \quad (4.8).$$

In den Nomogrammen Bild 3 und 4 findet man schließlich noch (gestrichelt) die „Gütelinien" $h = \text{const}$, die eine unmittelbare Beurteilung der Approximationsgenauigkeit einer Geradführung erlauben. Ihre Konstruktion erfolgte durch graphische Interpolation nach Berechnung einer größeren Anzahl von h-Werten.

5. Koppelkurven mit zwei dreifachen Tangenten

Tschebyschew lenkte das Augenmerk insbesondere auch auf jene Koppelkurven, die zur Gänze innerhalb eines schmalen Parallelstreifens verlaufen, so daß sie gewissermaßen eine „geschlossene" Geradführung vermitteln.[8]) Sie sind unter den bisher betrachteten dadurch aus-

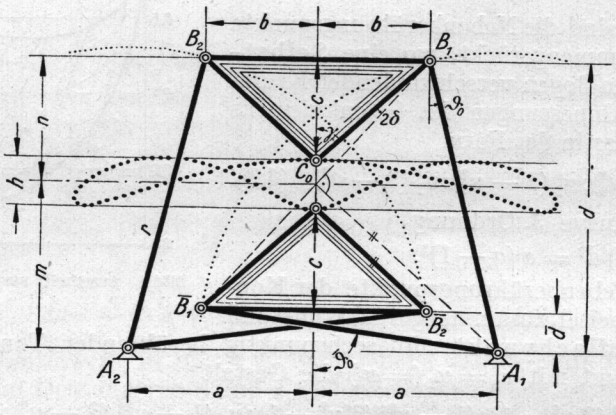

Bild 5. Koppelkurve mit zwei dreifachen Tangenten ($\delta = 3°$)

gezeichnet, daß sie nicht nur die Tangente des Ausgangsscheitels C_0 ($\varphi = 0$), sondern auch jene des Gegenscheitels $\bar{C}_0$ ($\varphi = \pi$) dreimal berühren und dementsprechend die Gestalt einer Doppelacht haben (Bild 5).

Geht man gemäß (1.5) mit

$$a = r \sin \vartheta_0 + b, \quad d = r \cos \vartheta_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.1)$$

[7]) Eine ausführliche Theorie der geometrisch recht interessanten dreispitzigen Koppelkurven gab A. E. Mayer, Koppelkurven mit drei Spitzen und spezielle Koppelkurvenbüschel; Math. Z. 43 (1937), 389—445.

[8]) A. a. O.[1]), 295ff., ferner: Sur le sytème articulé le plus simple donnant des mouvements symétriques par rapport à un axe; Zap. Akad. Nauk 60 (1889); Oeuvres II, 495—540, insbesondere 525ff.

in die Fundamentalbedingung (2.7) ein, so erhält man, sozusagen als Polargleichung der Diagrammhyperbeln $c = \text{const}$, die Beziehung

$$r\,(3\,b \sin \vartheta_0 - c \cos \vartheta_0 \mp \sqrt{b^2 + c^2}) + 4\,b^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5.2).$$

Setzt man ferner, unter Einführung des Scheitelwinkels 2γ im Koppeldreieck

$$c = b \operatorname{ctg} \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.3),$$

so müssen für ein Gelenkviereck der verlangten Art folgende drei Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} &r \sin \vartheta_0 + b = r \sin \bar{\vartheta}_0 - b, \\ &r\,(3 \sin \vartheta_0 - \cos \vartheta_0 \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{cosec} \gamma) + 4b = 0, \\ &r\,(3 \sin \bar{\vartheta}_0 - \cos \bar{\vartheta}_0 \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{cosec} \gamma) - 4b = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5.4).$$

Denkt man sich etwa γ vorgegeben, so lassen sich aus (5.4) die drei Größen r/b, ϑ_0 und $\bar{\vartheta}_0$ berechnen. Aus der ersten Gleichung folgt zunächst

$$2\,b = r\,(\sin \bar{\vartheta}_0 - \sin \vartheta_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.5),$$

und dies, in die zweite und dritte eingesetzt, gibt

$$\left.\begin{aligned} \sin \vartheta_0 + 2 \sin \bar{\vartheta}_0 &= \operatorname{ctg} \gamma \cos \vartheta_0 + \operatorname{cosec} \gamma, \\ 2 \sin \vartheta_0 + \sin \bar{\vartheta}_0 &= \operatorname{ctg} \gamma \cos \bar{\vartheta}_0 + \operatorname{cosec} \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5.6).$$

Subtraktion liefert dann

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\sin \bar{\vartheta}_0 - \sin \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 - \cos \bar{\vartheta}_0} = \operatorname{ctg} \frac{\bar{\vartheta}_0 + \vartheta_0}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.7),$$

also — modulo π —

$$\frac{\bar{\vartheta}_0 + \vartheta_0}{2} = \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.8).$$

Addition hingegen führt auf

$$\cos \frac{\bar{\vartheta}_0 - \vartheta_0}{2} = \frac{1}{3 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma} = \frac{1}{1 - 2 \cos 2\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (5.9).$$

Damit ist die Bestimmung der Winkel ϑ_0 und $\bar{\vartheta}_0$ im wesentlichen erledigt. Für reelle Lösungen muß offenbar $\cos 2\gamma \leq 0$, also $\pi/4 \leq \gamma \leq \pi/2$ sein. Mittels (5.8), (5.9) und

$$\sin \frac{\bar{\vartheta}_0 - \vartheta_0}{2} = \frac{2 \sin \gamma \sqrt{-2 \cos 2\gamma}}{1 - 2 \cos 2\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.10)$$

könnte man alle nötigen Winkelfunktionen von ϑ_0 und $\bar{\vartheta}_0$ berechnen. Mit Benützung der Additionstheoreme kann man aber auch sofort Formeln für die Größen r, $a = \frac{r}{2}(\sin \vartheta_0 + \sin \bar{\vartheta}_0)$, $m = \frac{1}{2}(d + \bar{d}) = \frac{r}{2}(\cos \vartheta_0 + \cos \bar{\vartheta}_0)$ und $n = \frac{1}{2}(d - \bar{d}) = \frac{r}{2}(\cos \vartheta_0 - \cos \bar{\vartheta}_0)$ angeben. Im Hinblick darauf, daß nur solche γ-Werte interessieren, die $\pi/4$ nicht stark übertreffen, setze man dabei

$$\gamma = \frac{\pi}{4} + \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.11).$$

Man gelangt so zu dem folgenden einfachen Formelsystem für die „geschlossene Geradführung“:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{1 + 2 \sin 2\delta}{\cos 2\delta \sqrt{2 \sin 2\delta}}\, b \approx \frac{1 + 4\delta}{2\sqrt{\delta}}\, b, \\ a &= \frac{b}{\cos(\pi/4 + \delta)\sqrt{8 \sin 2\delta}} \approx \frac{1 + \delta}{\sqrt{8\delta}}\, b, \\ c &= b \operatorname{ctg}(\pi/4 + \delta) \approx (1 - 2\delta)\, b, \\ m &= \frac{b}{\sin(\pi/4 + \delta)\sqrt{8 \sin 2\delta}} \approx \frac{1 - \delta}{\sqrt{8\delta}}\, b, \\ n &= b \operatorname{tg}(\pi/4 + \delta) \approx (1 + 2\delta)\, b, \\ d &= m + n, \quad d = m - n \end{aligned}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5.12).$$

Für die Grenzabweichung h, also die Breite des die Koppelkurve einschließenden Parallelstreifens, ergibt sich der einfache Ausdruck

$$h = 2\,(n - c) = 4b \cdot \operatorname{tg} 2\delta \approx 8\delta\, b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.13).$$

Hinsichtlich der „Länge" der Geradführung lehrt eine grobe Schätzung, daß dieselbe durchwegs ungefähr $4b$ beträgt. Dies ist auch rein anschaulich ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß der Grenzübergang $\delta \to 0$ auf ein gleichschenklig-rechtwinkliges Koppeldreieck führt, dessen Basisecken auf zwei zueinander normalen Geraden gleiten („Kreuzschleife"): Das Dreieck vollführt dabei die „Ellipsenbewegung" und sein Scheitel, als Umfangspunkt des Gangpolkreises, beschreibt einen Durchmesser des Rastpolkreises von der Länge $4b$.

Die in (5.12) und (5.13) angeschlossenen Näherungsformeln beruhen darauf, daß sich die obere Grenze für die in Betracht kommenden δ-Werte als recht niedrig erweist. Sie wird auf Grund des Übersichtsmonogramms durch jenen Wert δ_{max} festgelegt, für welchen das Gelenkviereck durchschlägt, was für $\bar{d} = 0$, also $m = n$ eintritt. Setzt man

$$\sin 2\,\delta_{max} = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.14),$$

so erhält man aus (5.12) die Bedingung

$$4\,s^3 + 8\,s^2 + 5\,s - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.15).$$

Zur einzigen reellen Wurzel $s = 0{,}1573$ findet man $\delta_{max} = 0{,}0790 = 4{,}525°$.

Die Substitution $\operatorname{tg} \delta = t^2$ führt von (5.12) unmittelbar auf die in (4.8) festgehaltene rationale Darstellung; t ist dabei zu beschränken auf $|t| < t_{max} = 0{,}2813$.

Bild 6 gibt ein Leiterdiagramm, das (in übereinander liegenden Werten) die Hauptdaten für derartige Geradführungen abzulesen gestattet.

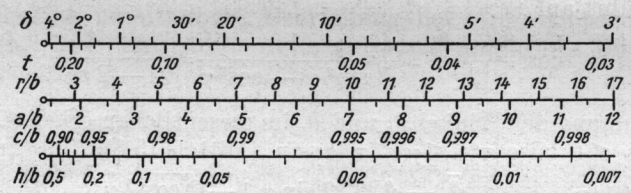

Bild 6. Leiterdiagramm für geschlossene Geradführungen

6. Schlußwort

Die hier entwickelte einfache Theorie der angenäherten Geradführungen von Tschebyschew vermittelt an Hand der Nomogramme erstmalig einen befriedigenden Überblick über das verfügbare Material. Wie auf Grund der Gütelinien $h = \text{const}$ festgestellt werden kann, gelingt es schon bei durchaus mäßigen Getriebedimensionen verblüffend genaue Geradführungen zu erzielen, die sich, wie die Betrachtung der geschlossenen Geradführungen ergab, über eine beachtliche Weglänge erstrecken können.[9])

Jedem der auftretenden symmetrischen Gelenkvierecke lassen sich ferner, gestützt auf den bekannten Satz von S. Roberts, zwei unsymmetrische, untereinander spiegelgleiche Gelenkvierecke zur Seite stellen, welche dieselbe Koppelkurve erzeugen. Diesen unsymmetrischen Ausführungsformen, welche den Antrieb durch eine umlaufende Kurbel gestatten, hat Tschebyschew häufig den Vorzug gegeben, unter anderem bei der Untersuchung der angenäherten Kreisbogenführungen, die eine naheliegende Verallgemeinerung der angenäherten Geradführungen darstellen.[8]) Es ist zu erwarten, daß sich auch diese erweiterte Problemstellung mit entsprechend abgewandelten elementaren Ansätzen gewinnbringend behandeln läßt.

---

[9]) Die Erklärungsfiguren Bild 1 und 5 sind diesbezüglich nicht als Muster zu werten, da in ihnen der Deutlichkeit zuliebe die Grenzabweichung h absichtlich groß gewählt wurde.

Eingegangen am 2. Juli 1955.

57/09/2354 0,075