

Contributi al problema delle lossodromiche doppie

di WALTER WUNDERLICH (Vienna)

§ 1. Una *lossodromica*, nel senso ordinario, è una curva che incontra tutti i piani di un fascio proprio sotto lo stesso angolo, sia esso λ . Se l'asse a del fascio è una retta non isotropa, l'elemento lineare della lossodromica s'esprime mediante coordinate cilindriche r, φ, z , (per le quali l'asse delle z coincide con a) nel modo seguente

$$(1) \quad ds = \frac{r d\varphi}{\text{sen } \lambda}.$$

Il problema delle *lossodromiche doppie*, proposto da G. SCHEFFERS [3], concerne la determinazione di curve che segano i piani di un primo fascio a_1 sotto un angolo costante λ_1 e allo stesso tempo i piani di un secondo fascio a_2 sotto un angolo costante λ_2 . Questo problema evidentemente dipende da un sistema di due equazioni del tipo (1):

$$(2) \quad r_1 d\varphi_1 = ds \cdot \text{sen } \lambda_1, \quad r_2 d\varphi_2 = ds \cdot \text{sen } \lambda_2.$$

Dopo il passaggio a coordinate cartesiane, per mezzo delle quali gli assi a_1, a_2 sono rappresentati da

$$(3) \quad y = \pm m x, \quad z = \pm h,$$

il sistema differenziale (2) prende la forma non molto attraente

$$(4) \quad \frac{(z-h)(m dx - dy) - (mx-y) dz}{\sqrt{(mx-y)^2 + (1+m^2)(z-h)^2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \operatorname{sen} \lambda_1$$

$$\frac{-(z+h)(m dx + dy) + (mx+y) dz}{\sqrt{(mx+y)^2 + (1+m^2)(z+h)^2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \operatorname{sen} \lambda_2.$$

Infatti non si conosce la soluzione generale.

È scopo della presente comunicazione segnalare da una parte una soluzione particolare del problema generale, formata da otto cerchi, d'altra parte la soluzione completa d'alcuni casi speciali.

§ 2. Si sa che fra le lossodromiche di un fascio α di piani si trovano dei *cerchi*: si tratta dei ben noti «cerchi di VILLAROEAU» appartenenti ai tori coll'asse α .

Per caratterizzare questi ∞^4 cerchi lossodromici fra gli ∞^6 cerchi generici nello spazio a tre dimensioni, conviene servirsi dei cosiddetti «punti di LAGUERRE»: così sono chiamati i vertici dei due coni isotropi passanti per un cerchio dato; si trovano sull'asse di esso, a distanza $\pm iq$ dal centro, q indicando il raggio.

Vale ora il teorema seguente: *Un cerchio è lossodromica di un fascio di piani se e solo se i suoi due punti di Laguerre appartengono ai due piani isotropi del fascio.* Ne segue che ciascun cerchio lossodromico tocca i piani isotropi del fascio — condizione di E. MÜLLER [2], — ma viceversa esistono cerchi (complessi), tangenti ai detti piani isotropi, che non sono lossodromiche vere e proprie: precisamente quelli che hanno uno dei punti di Laguerre sull'asse del fascio ⁽¹⁾.

È chiaro che la condizione espressa dal teorema è necessaria: se i piani del fascio tangenti a un cerchio lossodromico non fossero isotropi, formerebbero col cerchio l'angolo nullo e non λ . Per provare la sufficienza della condizione, facciamo ruotare l'asse α del fascio intorno all'asse l del cerchio, indicato con c : la retta α ,

⁽¹⁾ In un tale caso — che sembra essere sfuggito al MÜLLER — l'angolo formato in un punto del cerchio dalla tangente di esso e dalla normale al piano del fascio è situato in un *piano isotropo*; siccome si deve associare a un tale angolo il valore *nullo* (a causa della metrica singolare in un piano isotropo), il cerchio può essere considerato tutt'al più come *traiettoria ortogonale* del fascio, ma non come lossodromica nel senso ordinario.

tangente, secondo la premessa, ai due coni isotropi passanti per c , descrive una quadrica rotonda Q che possiede c come cerchio focale. Tenendo conto del fatto che ogni cono circoscritto a Q ed uscente da un punto P del cerchio focale c è un cono rotondo, l'asse del quale è la tangente a c in P , si conclude che tutti i piani tangenti di Q e dunque tutti i piani passanti per la generatrice a incontrano il cerchio c sotto lo stesso angolo λ (= semiapertura del cono rotondo menzionato). Si noti che gli assi a e l formano l'angolo $\pi/2 - \lambda$.

§ 3. Siano ora a_1 e a_2 gli assi, supposti reali e sghembi, di due fasci propri di piani, ed indichiamo con α_1 , $\bar{\alpha}_1$ ed α_2 , $\bar{\alpha}_2$ i piani isotropi di questi fasci. Cercando cerchi lossodromici comuni per ambedue i fasci, abbiamo da scegliere i punti di Laguerre sulle coppie di rette complesse coniugate $b_1 = \alpha_1 \alpha_2$ e $\bar{b}_1 = \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2$ ovvero $b_2 = \alpha_1 \bar{\alpha}_2$ e $\bar{b}_2 = \bar{\alpha}_1 \alpha_2$.

Si vede dunque che per due fasci sghembi di piani esistono due sistemi di ∞^2 cerchi lossodromici comuni. Gli assi dei cerchi formano due reti (congruenze lineari) ellittiche ed i centri riempiono due piani reali che contengono la perpendicolare comune degli assi a_1 , a_2 e formano angoli uguali con gli stessi. Si dimostra facilmente che i piani dei cerchi inviluppano due paraboloidi iperbolici, passanti per l'uno o l'altro dei quadrilateri sghembi $a_1 b_2 a_2 \bar{b}_2$ o $a_1 \bar{b}_1 a_2 b_1$ [4].

Per tenere ora conto dei dati angoli lossodromici λ_1 , λ_2 basta ricordare un'osservazione fatta alla fine del § 2: l'asse proprio l di un cerchio lossodromico deve determinare l'angolo $\pi/2 - \lambda_1$ con a_1 e l'angolo $\pi/2 - \lambda_2$ con a_2 . Questa condizione determina quattro direzioni ed in seguito otto rette l parallele a queste direzioni ed appoggiate all'una o all'altra coppia di rette b_1 , $\bar{b}_1$ o b_2 , $\bar{b}_2$. I punti d'appoggio sono i punti di Laguerre di otto cerchi lossodromici comuni.

Si noti che questi cerchi, formanti una soluzione particolare del problema delle lossodromiche doppie, sono costruibili con riga e compasso.

Le modificazioni necessarie nel caso di assi incidenti si possono stabilire facilmente.

§ 4. Trasformando un fascio di piani con i suoi ∞^4 cerchi lossodromici mediante una inversione (o un'altra trasformazione conforme dello spazio) si perviene in generale ad un fascio di sfere con i cerchi lossodromici appartenenti. I due punti di Laguerre di

un tale cerchio c sono situati sui due coni isotropi contenuti (come « sfere nulle ») nel fascio. — I vertici dei detti coni sono i punti di Laguerre del cerchio base a del fascio: poichè essi si trovano sui coni isotropi passanti per un cerchio lossodromico c qualsiasi, la relazione fra i due cerchi a e c è perfettamente reciproca. Si stabilisce di più che l'angolo lossodromico ha lo stesso valore λ per ambedue i cerchi; ne segue in particolare che il piano di un cerchio lossodromico incontra il cerchio base del fascio sotto l'angolo lossodromico λ .

Apparirà naturale di estendere ora il concetto di lossodromica, già definito per fasci di piani, a fasci di sfere: Lossodromica in senso lato si dirà ogni curva che incontra tutte le sfere di un fascio sotto un angolo fisso λ .

Conforme a ciò si può evidentemente enunciare il *problema delle lossodromiche doppie* anche nel senso nuovo.

È da attendersi che fra le soluzioni si trovino di nuovo certi *cerchi*. Infatti questi sono facilmente determinabili mediante i loro punti di Laguerre. Siano $\alpha_1, \bar{\alpha}_1$ i coni isotropi del primo fascio di sfere ed $\alpha_2, \bar{\alpha}_2$ quelli del secondo, ed indichiamo con b_1 il cerchio intersezione di α_1, α_2 ; poniamo analogamente $\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 = \bar{b}_1$, $\alpha_1 \bar{\alpha}_2 = b_2$, $\bar{\alpha}_1 \alpha_2 = \bar{b}_2$ ⁽²⁾. Se scegliamo, dapprima senza tener conto degli angoli lossodromici, due punti di Laguerre sui cerchi b_1 e $\bar{b}_1$ o b_2 e $\bar{b}_2$, questi punti individuano sempre un cerchio lossodromico comune ai due fasci. Esistono dunque due sistemi ∞^2 di tali cerchi; i loro piani inviluppano due superficie S_1, S_2 di quarta classe [4].

Facendo ora intervenire gli angoli lossodromici prescritti λ_1, λ_2 , ricordiamo che il piano del cerchio lossodromico in questione deve incontrare il cerchio base a_1 sotto l'angolo λ_1 : tutti gli ∞^2 piani che godono di questa proprietà sono tangenti ad un certo iperboloide rotondo Q_1 , avente il cerchio focale a_1 e l'apertura $\pi - 2\lambda_1$. Poichè l'iperboloide Q_1 , l'iperboloide analogo Q_2 appartenente al secondo fascio, ed una delle superficie suddette S_1, S_2 di quarta classe hanno in generale $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ piani tangenti comuni, si presentano 32 *cerchi* come soluzioni particolari nel caso generale del problema delle lossodromiche doppie in senso lato.

(2) Se si prendono fasci ellittici di sfere, cioè fasci a cerchi base reali, i cerchi $b_k, \bar{b}_k$ sono complessi coniugati. Fasci iperbolici — in contrapposto ai fasci ellittici — non possiedono cerchi lossodromici reali.

Tuttavia si deve mettere in rilievo che esistono *casi eccezionali* con un'infinità di cerchi come soluzioni particolari. Basta considerare il sistema dei cerchi di Villarceau di un *toro*: Questi cerchi incontrano i piani meridiani sotto un angolo fisso λ_1 , ma segano anche sotto l'angolo costante $\lambda_2 = \pi/2 - \lambda_1$ le sfere ortogonali al toro che hanno i loro centri sull'asse e che formano un fascio ellittico. Per mezzo di una inversione generica si perviene allora a due *fasci ortogonali* di sfere. Fra le lossodromiche doppie di una tale coppia di fasci si trovano dunque due schiere di ∞^1 cerchi, situati in generale su di una ciclode di DUPIN, se gli angoli lossodromici hanno *valori complementari*.

§ 5. Il problema generalizzato può trattarsi ancora secondo un altro modo che presenta un certo interesse per sè.

Siano a_1, a_2 i cerchi base dei fasci di sfere. Esiste in generale una sfera U ortogonale ad a_1 e a_2 ; essa è determinata dai quattro punti di Laguerre di a_1 e a_2 . Vogliamo considerare questa sfera U come la sfera fondamentale del « *modello conforme* » di uno *spazio non-euclideo* secondo POINCARÉ-WELLSTEIN, dove « *rette* » risp. « *piani* » sono rappresentati dai cerchi risp. sfere ortogonali ad U , mentre « *cerchi* », « *sfere* » e la metrica angolare conservano il significato ordinario (euclideo). Conformemente a ciò il problema euclideo delle lossodromiche doppie di due fasci di sfere può interpretarsi come problema non-euclideo delle lossodromiche doppie di due fasci di « *piani* » nello spazio suddetto.

Per mezzo di una classica trasformazione quadratica, introdotta del DARBOUX, che associa ad ogni coppia di punti inversi rispetto alla sfera U il polo rispetto ad U del loro piano di simmetria, si può passare dal modello conforme di POINCARÉ-WELLSTEIN al « *modello proiettivo* » di uno *spazio non-euclideo* secondo CAYLEY-KLEIN, dove « *rette* » e « *piani* » hanno conservato il significato ordinario (proiettivo), mentre « *cerchi* » sono rappresentati dalle coniche bitangenti alla sfera U . La metrica in questo spazio è fondata in modo ben noto su birapporti rispetto alla « *quadrica assoluto* » U .

Nello spazio di CAYLEY-KLEIN la teoria dei *cerchi lossodromici* può svilupparsi in perfetta analogia con la situazione euclidea. In particolare il teorema del § 2 resta valido nella medesima forma, sebbene certe nozioni siano da modificare opportunamente: Si deve intendere ora per « *piano isotropo* » un piano tangente alla quadrica assoluto U , e per « *cono isotropo* » — necessario per la definizione

dei «punti di Laguerre» — un cono circoscritto ad U ⁽³⁾. I punti di Laguerre dei cerchi lossodromici comuni a due fasci di piani a_1, a_2 si distribuiscono allora sugli altri spigoli $b_1, \bar{b}_1$ e $b_2, \bar{b}_2$ del tetraedro formato dei piani isotropi passanti per gli assi a_1 e a_2 . Si presentano dunque di nuovo due sistemi a due parametri di tali cerchi; non è difficile dimostrare che i loro piani inviluppano due *quadriche* Q_1, Q_2 (polari rispetto all'assoluto U a due altre quadriche, luogo dei centri dei cerchi).

Introducendo ora l'angolo lossodromico λ_1 , si ha dapprima un sistema corrispondente di ∞^2 cerchi lossodromici del fascio a_1 . Si prova facilmente che i loro piani segano l'asse a_1 sotto l'angolo fisso λ_1 e dunque inviluppano una certa *quadrica di Clifford* R_1 ; esiste una quadrica analoga R_2 per il fascio a_2 . Gli otto piani tangenti comuni alle quadriche Q_1, R_1, R_2 e quelli di Q_2, R_1, R_2 conducono in tutto a 16 cerchi, soluzioni particolari del problema delle lossodromiche doppie nello spazio di CAYLEY-KLEIN (in generale).

Applicando poi la trasformazione inversa di DARBOUX, questi 16 cerchi non-euclidei si mutano in 32 cerchi euclidei, inversi due a due rispetto alla sfera U . Sono ritrovate così le soluzioni particolari, stabilite già nel § 4, del problema generalizzato delle lossodromiche doppie.

L'eccezione nel caso speciale con ∞^1 cerchi lossodromici comuni, menzionato alla fine del § 4, si spiega nella presente interpretazione con la coincidenza delle quadriche di Clifford R_1, R_2 .

§ 6. Ritorniamo ora al problema iniziale delle lossodromiche doppie (euclidee) di due fasci di piani, per esporre la soluzione completa in un caso speciale, cioè assumendo gli *assi incidenti*. In questo caso esiste un gruppo di ∞^1 omotetie che conserva gli assi e quindi anche il sistema associato delle lossodromiche. In conseguenza — secondo la teoria di S. LIE — sarà possibile eseguire completamente l'integrazione del sistema corrispondente (4), nel quale si deve porre $h = 0$ [5].

Escludendo dapprima che gli assi siano paralleli o isotropi è possibile appoggiarsi alle equazioni (2). Se si valutano le coordinate

(3) Una piccola differenza sta tuttavia nel fatto che una coppia di punti di Laguerre determina un unico cerchio nello spazio euclideo, ma due cerchi nello spazio di Cayley-Klein.

angolari φ_1, φ_2 a partire dal piano comune dei fasci, si ha la relazione

$$(5) \quad z = r_1 \operatorname{sen} \varphi_1 = r_2 \operatorname{sen} \varphi_2.$$

Formando il quoziente delle equazioni (2) si arriva allora alla

$$(6) \quad \frac{d\varphi_2}{\operatorname{sen} \varphi_2} = \varepsilon \cdot \frac{d\varphi_1}{\operatorname{sen} \varphi_1}, \text{ ove } \varepsilon = \frac{\operatorname{sen} \lambda_2}{\operatorname{sen} \lambda_1} = \text{cost.}$$

L'integrazione dà immediatamente

$$(7) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = c \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right)^\varepsilon.$$

Questa relazione determina un certo sistema di *coni* C , uscenti dall'origine O , intersezione degli assi a_1, a_2 . Dalla rappresentazione dei piani corrispondenti a φ_1, φ_2

$$(8) \quad \begin{aligned} x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha + z \operatorname{ctg} \varphi_1 &= 0 \\ x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha - z \operatorname{ctg} \varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

(con $2\alpha = \sphericalangle a_1 a_2$) segue la rappresentazione del cono C :

$$(9) \quad x:y:z = (\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1) \cos \alpha : (\operatorname{ctg} \varphi_2 + \operatorname{ctg} \varphi_1) \operatorname{sen} \alpha : 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Posto per brevità

$$(10) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = t,$$

l'equazione del cono prende la forma

$$(11) \quad \begin{aligned} x:y:z &= X(t):Y(t):1, \text{ ove} \\ X &= \frac{1}{4} \csc \alpha (c^{-1} t^{-\varepsilon} - c t^\varepsilon - t^{-1} + t), \\ Y &= \frac{1}{4} \sec \alpha (c^{-1} t^{-\varepsilon} - c t^\varepsilon + t^{-1} - t). \end{aligned}$$

Ognuno di questi ∞^1 coni — del resto algebrici per valori razionali di ε — porta ∞^1 lossodromiche doppie, omotetiche tra di loro.

Le lossodromiche cercate si determinano ora mediante la condizione fondamentale (1), un poco sviluppata:

$$(12) \quad ds = \frac{r_1 d\varphi_1}{\sin \lambda_1} = \frac{z}{\sin \lambda_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{\sin \varphi_1} = \frac{z}{\sin \lambda_1} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Introducendo le espressioni $x = Xz$, $y = Yz$ nell'elemento lineare $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ si perviene così a

$$(13) \quad (X^2 + Y^2 + 1) \left(\frac{\dot{z}}{z} \right)^2 + 2(X\dot{X} + Y\dot{Y}) \frac{\dot{z}}{z} + (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 - t^{-2} \csc^2 \lambda_1) = 0.$$

Dopo avere calcolato da questa equazione quadratica il valore di $\dot{z}/z$, una quadratura fornisce $\log z$ come funzione di t .

Conoscendo ormai la funzione $z(t)$, la determinazione delle *lossodromiche doppie con assi incidenti* è (in via di principio) effettuata. Esse sono rappresentate in forma parametrica da

$$(14) \quad x = X(t) \cdot z(t), \quad y = Y(t) \cdot z(t), \quad z = z(t).$$

§ 7. Un risultato notevole si trova sotto l'ipotesi particolare $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$. A causa di $\varepsilon = 1$ i coni C (11) sono del *secondo grado*. Si verifica senza difficoltà (esaminando il comportamento rispetto ai piani isotropi $x \sin \alpha \pm y \cos \alpha \pm zi = 0$), che i coni appartengono ad un *sistema confocale*, aventi gli assi a_1, a_2 per rette focali comuni.

Per eliminare il parametro t calcoliamo t e t^{-1} dalle equazioni lineari (11); abbiamo

$$(15) \quad zt = px - qy, \quad zt^{-1} = c(px + qy),$$

$$\text{ove } p = \frac{2 \sin \alpha}{1 - c}, \quad q = \frac{2 \cos \alpha}{1 + c}.$$

Il prodotto dà la rappresentazione implicita del cono C :

$$(16) \quad c(p^2 x^2 - q^2 y^2) - z^2 = 0.$$

Questo cono C porta ∞^1 lossodromiche corrispondenti all'angolo assegnato λ . Poichè esse sono omotetiche, le loro tangenti determinano un certo *cono di direzioni* D , descrivibile mediante una

relazione omogenea fra gli incrementi dx , dy , dz . Partendo dalla condizione (12) dobbiamo dapprima calcolare il valore di $z dt/t$. A questo scopo formiamo i differenziali delle espressioni (15); moltiplicandoli abbiamo

$$(17) \quad z^2 \left(\frac{dt}{t} \right)^2 = -c(p^2 dx^2 - q^2 dy^2) + dz^2.$$

L'equazione (12) fornisce poi la rappresentazione del cono D :

$$(18) \quad (dx^2 + dy^2 + dz^2) \sin^2 \lambda + c(p^2 dx^2 - q^2 dy^2) - dz^2 = 0.$$

Siccome il cono direttore D è del *secondo grado*, le lossodromiche possono essere considerate come *eliche affini*.

Tenendo conto che i coni C (16) e D (18) sono *conciatici* (cioè hanno in comune i piani ciclici), si può concludere inoltre — secondo un risultato esposto in un altro lavoro [6] — che le lossodromiche considerate sono « *linee D* » del cono C , il che vuole dire che le loro sfere osculatrici toccano il cono ⁽⁴⁾. Da questo punto di vista (come anche dal teorema di § 2) è evidente che i cerchi del cono appartengono al tipo delle lossodromiche in questione.

Considerando l'equivalenza fra le sei rette focali di un cono del secondo grado si conclude finalmente che le curve qui trovate sono in generale *lossodromiche sestuple* [7].

Merita essere messa in rilievo la famiglia delle *lossodromiche piane*, ottenute qui per $c = \pm 1$, per i quali valori il cono C degenera nei piani $x = 0$ risp. $y = 0$. Queste curve, considerate già di L. ECKART [1], sono in generale *lossodromiche quaduple* [8].

Le semplici modifiche che s'incontrano nel caso limite di *assi paralleli* non presentano di difficoltà, ma esigono essere trattate a parte [9].

Sembra del resto che le diverse proprietà speciali, trovate sotto l'ipotesi $\lambda_1 = \lambda_2$ (o $\lambda_1 = -\lambda_2$), non siano estendibili in alcun modo al caso generale $\lambda_1 \neq \pm \lambda_2$.

⁽⁴⁾ « *Linee D* » (secondo G. DARBOUX) di una superficie S si chiamano quelle ∞^2 curve tracciate sulla superficie tali che le loro sfere osculatrici siano tangenti alla superficie. Se S è una *quadrica*, le sue linee D sono caratterizzabili dalla proprietà che le loro tangenti sono parallele alle generatrici dei coni conciatici a S .

§ 8. Un altro caso particolare che promette secondo la teoria del LIE una soluzione esplicita è il caso finora escluso delle lossodromiche doppie con *assi isotropi*. Questo caso è caratterizzato dal valore $m = i$ nel sistema differenziale (4).

Limitandoci a *curve reali*, dobbiamo supporre una coppia di assi a_1, a_2 complessi coniugati e angoli lossodromici λ_1, λ_2 complessi coniugati. Poniamo dunque $h = ki$ (k reale), $\text{sen } \lambda_1 = \sigma + i\tau$ e $\text{sen } \lambda_2 = \sigma - i\tau$. Con ciò le equazioni (4) prendono la forma

$$(19) \quad \frac{(z \mp ik) d(x \pm iy) - (x \pm iy) dz}{(x \pm iy) \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \sigma \pm i\tau.$$

Tenendo conto delle *rotazioni automorfe* intorno all'asse z conviene introdurre coordinate cilindriche r, φ, z mediante la sostituzione $x \pm iy = r e^{\pm i\varphi}$. Separando le componenti reali ed immaginarie si ha

$$(20) \quad \begin{aligned} kr d\varphi + z dr - r dz &= \sigma r \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2} \\ zr d\varphi - k dr &= \tau r \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2}. \end{aligned}$$

L'eliminazione di φ conduce a

$$(21) \quad \begin{aligned} [(z^2 + k^2) dr - rz dz]^2 &= \\ &= r^2 \{[(\sigma k + \tau z) dr - \tau r dz]^2 + (\sigma z - \tau k)^2 (dr^2 + dz^2)\}. \end{aligned}$$

Questa equazione definisce ∞^1 *superficie rotonde* S , ognuna portante ∞^1 lossodromiche congruenti fra loro.

L'equazione (21), sebbene assai complicata, si mostra integrabile in modo elementare. Trasformandola per mezzo delle sostituzioni

$$(22) \quad z = k \cdot \text{tg } u, \quad r \cdot \cos u = kv,$$

(naturalmente ammissibili soltanto se $k \neq 0$), essa prende la forma

$$(23) \quad (\sigma \text{tg } u - \tau)^2 du^2 + \frac{2\sigma v}{v^2 + 1} (\sigma \text{tg } u - \tau) du dv + \frac{(\sigma^2 + \tau^2)v^2 - 1}{v^2(v^2 + 1)} dv^2 = 0,$$

ovvero

$$(24) \quad (\tau - \sigma \text{tg } u) du = \left(\frac{\sigma v}{1 + v^2} \pm \frac{\sqrt{1 + (1 - \sigma^2 - \tau^2)v^2 - \tau^2 v^4}}{v(1 + v^2)} \right) dv.$$

Le variabili essendo separate, l'integrazione può effettuarsi e fornisce una relazione funzionale tra u e v . Ritornando mediante la (22) a r e z otteniamo così l'equazione $f(r, z) = 0$ della superficie rotonda S .

Sostituendo $r(z)$ nell'elemento angolare

$$(25) \quad d\varphi = \frac{\sigma k + \tau z}{\sigma z - \tau k} \cdot \frac{dr}{r} - \frac{\tau dz}{\sigma z - \tau k},$$

derivato dal quoziente delle equazioni (20) si perviene finalmente (in via di principio) mediante una seconda quadratura alla rappresentazione parametrica delle lossodromiche doppie in questione.

§ 9. Una notevole sottofamiglia delle lossodromiche precedenti è quella che è caratterizzata da

$$(26) \quad k = 0, \quad \tau = 0.$$

Si tratta delle *lossodromiche doppie con assi isotropi incidenti ed angoli lossodromici uguali* [8]. Si vede subito che queste lossodromiche sono *piane*, poichè la seconda equazione (20) dà $\varphi = \text{cost.}$ La prima si scrive.

$$(27) \quad z dr - r dz = \sigma r \sqrt{dr^2 + dz^2}$$

e determina la forma delle lossodromiche in qualsiasi piano $\varphi = \text{cost.}$ — Sia $O(0, 0)$ l'origine, $P(r, z)$ un punto corrente della lossodromica e $Q(0, z - rz')$ il punto intersezione della tangente in P coll'asse delle z ; un'interpretazione geometrica della equazione (27) dà allora $OQ : QP = \sigma = \text{cost.}$, in altri termini: *La lossodromica è traiettoria ortogonale di un sistema di ∞^1 cerchi con due tangenti comuni* (reali per $\sigma^2 > 1$, complesse coniugate per $\sigma^2 < 1$).

Si verifica senz'altro la validità della seguente soluzione parametrica:

$$(28) \quad r = \frac{2c t^{n+1}}{1+t^2}, \quad z = c t^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right),$$

ove $n = 1/\sigma$. Si vede che per valori razionali di $\sigma (= \text{sen } \lambda)$ si presentano *curve algebriche*, mentre tutte le altre lossodromiche incontrate sinora erano curve trascendenti, coll'unica eccezione dei cerchi di Villarceau.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. ECKHART: *Ueber ebene Loxodromen und deren graphische Integration*. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 127 (1918), 585-597.
- [2] E. MÜLLER: *Kreise als Loxodromen*. Arch. Math. Phys. 26 (1918), 73-96.
- [3] G. SCHEFFERS: *Besondere transzendente Kurven*. Enz. Math. Wiss. III D 4, Nr. 34.
- [4] W. WUNDERLICH: *Kreise als Doppelloxodromen*. Arch. Math. 6 (1955), 230-242.
- [5] W. WUNDERLICH: *Doppelloxodromen mit schneidendem Achsenpaar*. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 164 (1955), 17-34.
- [6] W. WUNDERLICH: *Euklidische und nichteuklidische D-Linien auf Quadriken*. Annali di mat. 33 (1952), 145-164.
- [7] W. WUNDERLICH: *Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D-Kurven von Kegeln 2. Grades*. Monatsh. Math. 58 (1954), 57-62.
- [8] W. WUNDERLICH: *Ueber die ebenen Loxodromen*. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 162 (1953), 285-292.
- [9] W. WUNDERLICH: *Über Loxodromen auf Zylindern 2. Grades*. Monatsh. Math. 59 (1955), 111-117.

[Entrata in redazione il 18 ottobre 1955]