

Über eine Klasse zwangläufiger höherer Elementenpaare.

Von *Walter Wunderlich* in Wien.

§ I. In den Lehrbüchern der Kinematik tauchen anlässlich der Erwähnung der höheren Elementenpaare immer wieder zwei klassische Beispiele auf, die sich bereits in den grundlegenden Werken von Reuleaux¹⁾ und Burmester²⁾ finden:

1. Die Bewegung eines aus drei kongruenten 60-gradigen Kreisbögen gebildeten „Gleichdickes“ in einem Quadrat, dessen Seitenlänge gleich dem Halbmesser der Bögen ist.
2. Die Bewegung einer aus zwei kongruenten 120-gradigen Kreisbögen gebildeten „Linse“ in einem gleichseitigen Dreieck, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Bögen ist.

In beiden Fällen erscheint die (zwangläufige) Bewegung aus elliptischen Bewegungen „gestückelt“. Die zugehörigen Polbahnen sind demnach regelmäßige Kreisbogen-vielecke, wobei aufeinander abrollende Bögen als Teile eines Kardan-Kreispaares das Halbmesserverhältnis 1:2 besitzen.

Hieran läßt sich nun eine Verallgemeinerung knüpfen, wenn man alle Bewegungen betrachtet, die durch das Abrollen von Kreisbogen-vielecken aufeinander bestimmt sind, wobei vorausgesetzt wird, daß aufeinander abrollende Bögen gleich lang sind und ihre Halbmesser sich wie 1:2 verhalten. In der vorliegenden Arbeit werden zwei vereinfachende, jedoch einschränkende Annahmen getroffen, die übrigens auch in den beiden angeführten Beispielen erfüllt sind:

A. Die Kreisbogen-vielecke seien regelmäßig.

Daß es sich hierbei um eine Einschränkung handelt, ersieht man aus den von Reuleaux¹⁾ auf Tafel III, Fig. 3 bis 5, 7, 8 angegebenen Beispielen von in Quadraten bewegten Gleichdicken.

B. Die Eckenwinkel von Rast- und Gangpolbahn seien gleich.

Daß diese Annahme einschränkend ist, zeigt Bild 1, welches ein Elementenpaar wiedergibt, das zur Rollbewegung eines Zweiecks aus 60-gradigen Bögen in einem Dreieck aus 30-gradigen gehört. Die Eckenwinkel betragen 60° bzw. 90° und die Bewegung enthält drei reine Drehungen um 30°. Das Elementenpaar ist im Verlauf der (zwangläufigen) Bewegung abwechselnd ein höheres und ein niederes. Der Punkt Q_1 verweilt in jeder der drei Ecken P_1, P_2, P_3 seiner Bahn während eines endlichen Zeitabschnittes (Stillstandsmechanismus).

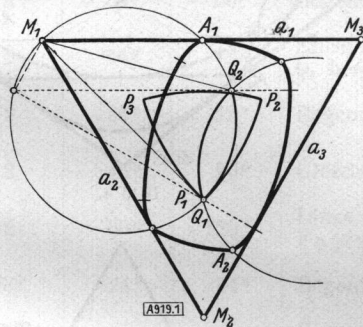


Bild 1.

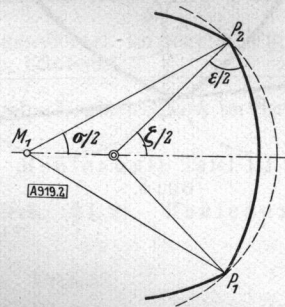


Bild 2.

Trotz dieser Einschränkungen gelangt man zu einer recht formenreichen Klasse von höheren Elementenpaaren, in der viele der bekannten Beispiele als Sonderfälle enthalten sind. Es handelt sich stets um ein von Kreisbögen berandetes Element, das unter Umständen in einem regelmäßigen Vieleck eine zwangläufige Bewegung auszuführen imstande ist.

§ II. Wir nehmen also ein regelmäßiges Kreisbogen-vieleck als Rastpolbahn. Der Zentriwinkel $\zeta \leq \pi$, unter dem jeder Bogen von der Polygonmitte aus erscheint, steht mit dem Eckenwinkel ε und dem Bogenwinkel σ (Bild 2) in der Beziehung

$$\zeta = \pi - \varepsilon + \sigma \dots \dots \dots (1).$$

Eine entsprechende Beziehung besteht bei der gleichartig gebauten Gangpolbahn zwischen dem Zentriwinkel $\zeta' \leq \pi$, dem Eckenwinkel $\varepsilon' = \varepsilon$ (Voraussetzung B!) und dem Bogenwinkel $\sigma' = 2\sigma$ (Kardan-Kreisbögen!):

$$\zeta' = \pi - \varepsilon + 2\sigma \dots \dots \dots (1').$$

¹⁾ F. Reuleaux: Lehrbuch der Kinematik, Bd. I (1875).

²⁾ L. Burmester: Lehrbuch der Kinematik, Leipzig (1888), Bd. 1.

Geben wir die positiven, rationalen Verhältniszahlen $m = 2\pi/\zeta$ und $n = 2\pi/\zeta'$ vor, so sind vermöge (1) und (1') die Gestalten der Polbahnen festgelegt:

$$\sigma = \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{m}, \quad \varepsilon = \pi + \frac{2\pi}{n} - \frac{4\pi}{m} \dots \dots \dots (2).$$

σ und ε können auch negativ ausfallen. m und n sind natürlich stets verschieden zu nehmen und unterliegen wegen $\zeta, \zeta' \leq \pi$ der Beschränkung $m, n \geq 2$. Zu ganzzahligen Werten gehören gewöhnliche Vielecke, zu gebrochenen überschlagene, sogenannte Sternvielecke.

§ III. Wir schreiben m und n als gekürzte Brüche an:

$$m = \frac{m'}{m''}, \quad (m', m'') = 1; \quad n = \frac{n'}{n''}, \quad (n', n'') = 1 \dots \dots \dots (3).$$

Mit t bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zähler:

$$(m', n') = t \dots \dots \dots (4).$$

Die Rastpolbahn besitzt dann m' Ecken $P_1, P_2, \dots, P_{m'}$, die Gangpolbahn n' Ecken $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n'}$. Mit \mathfrak{P} bezeichnen wir jene Drehung vom Drehwinkel ζ , welche die Rastpolbahn $P_1 P_2 \dots P_{m'}$ in sich, und zwar in die Lage $P_2 \dots P_{m'} P_1$ überführt. Ω ist die ent-

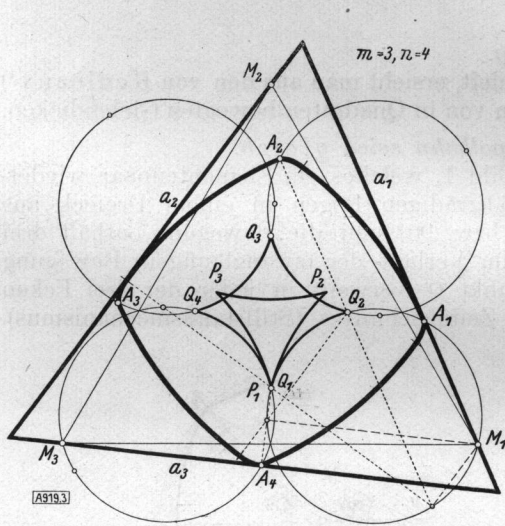


Bild 3.

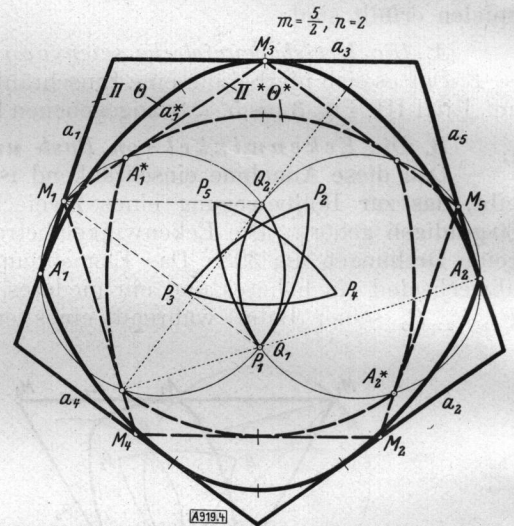


Bild 4.

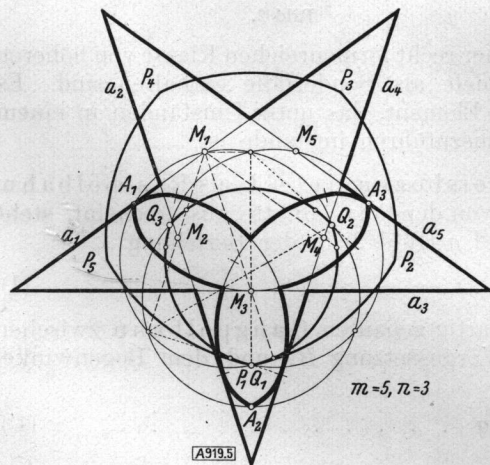


Bild 5.

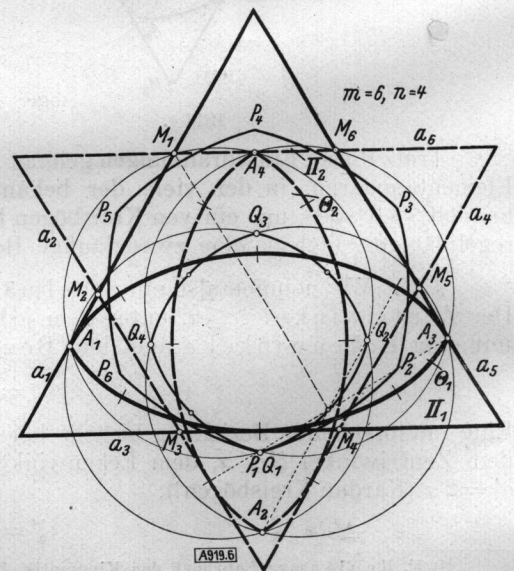


Bild 6.

sprechende Drehung der Gangpolbahn $Q_1 Q_2 \dots Q_n \rightarrow Q_2 \dots Q_n Q_1$. Auch wiederholte Anwendung dieser Drehungen transformiert die Polbahnen in sich. *Rastpolbahn bzw. Gangpolbahn ertragen mithin die zyklischen Drehungsgruppen \mathfrak{P}^i (Ordnung m') bzw. \mathfrak{Q}^i (Ordnung n').*

§ IV. Wir wählen nun in der den Bildern 3 bis 6 zugrunde gelegten Ausgangsstellung $P_1 = Q_1$ auf der Verlängerung des Bogens $Q_1 Q_2$ der Gangpolbahn einen beliebigen Punkt A_1 und betrachten seine Bahnkurve. Diese beginnt mit einem geraden Stück a_1 , das bei der Rollung von $Q_1 Q_2$ auf $P_1 P_2$ entsteht, und setzt sich mit $n' - 1$ Ellipsenbögen fort, dem Abrollen des restlichen Teiles $Q_2 \dots Q_n Q_1$ entsprechend³⁾. Nun ist die Ecke Q_1 in $P_{n'+1}$ angelangt⁴⁾ und es wiederholt sich das eben angegebene Bruchstück der Bahnkurve.

Wir erkennen, daß alle Bahn- und Hüllkurven der Bewegung die Drehung $P_1 \rightarrow P_{n'+1}$, das ist $\mathfrak{P}^{n'}$, und damit die zyklische Untergruppe $\mathfrak{P}^{n'i}$ von der Ordnung m'/t gestatten. Analog gestatten alle Bahn- und Hüllkurven der umgekehrten Bewegung die Drehungen $\mathfrak{Q}^{m'i}$ der Untergruppe von der Ordnung n'/t .

Insbesondere wird die betrachtete Bahn von A_1 nicht nur von diesem Punkt beschrieben, sondern gleichzeitig von einem ganzen System von n'/t Punkten

$$A_{m'i+1} = \mathfrak{Q}^{m'i} \cdot A_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n'/t) \dots \dots \dots (5),$$

welche er im Verlauf der Bewegung erreicht.

Die Bahngerade a_1 von A_1 während der Rollung von $Q_1 Q_2$ auf $P_1 P_2$ geht durch den Mittelpunkt M_1 des Kreisbogens $P_1 P_2$. Im Gesamtverlauf der umgekehrten Bewegung umhüllt der Strahl a_1 ein von Kreisbögen berandetes Gebilde Θ_1 , das in den Punkten $A_{m'i+1}$ (5) Ecken aufweist. Wiederum wird Θ_1 nicht von a_1 allein beschrieben, sondern von einem System II_1 von m'/t Geraden

$$a_{n'i+1} = \mathfrak{P}^{n'i} \cdot a_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m'/t) \dots \dots \dots (6),$$

die einzelne Lagen von a_1 darstellen. — Die Mittelpunkte der Kreisbögen, die während der Rollung von $P_1 P_2$ auf $Q_1 Q_2$ entstehen, erhalten wir in den zweiten Schnittpunkten der durch

m	n	σ	ε	Anmerkung
2	3	-60°	-60°	Bogendreieck im 60° -Rhombus. Reuleaux ¹⁾ , Tafel III, Fig. 1.
5/2	2	36°	72°	Linse bzw. unregelm. Bogenviereck im regelm. Fünfeck (Bild 4; Q_1 beschreibt ein regelm. Fünfeck).
5/2	3	-24°	12°	Bogendreieck bzw. unregelm. Bogensechseck im regelm. Fünfeck.
8/3	2	45°	90°	Gleichdick im Quadrat. Reuleaux ¹⁾ , Tafel III, Fig. 6.
3	2	60°	120°	Linse im gleichs. Dreieck (§ I, 2). Reuleaux ¹⁾ , S. 120ff. Fujiwara u. Kakeya ⁵⁾ .
3	5/2	24°	84°	Bogenfünfeck im gleichs. Dreieck.
3	4	-30°	30°	Bogenviereck im gleichs. Dreieck (Bild 3). Fujiwara und Kakeya ⁵⁾ , S. 103.
4	3	30°	120°	Bogendreieck im Quadrat (§ I, 1). Reuleaux ¹⁾ , S. 131ff.
4	5	-18°	72°	Bogenfünfeck im Quadrat. Reuleaux ¹⁾ , Tafel III, Fig. 2.
5	3	48°	156°	Dreiblatt im Pentagramm (Bild 5).
5	4	18°	126°	Bogenviereck im regelm. Fünfeck.
6	4	30°	150°	Linse im gleichs. Dreieck (Bild 6).

³⁾ Von diesen Bögen kann noch einer in eine Strecke ausarten, wenn nämlich A_1 noch auf der Verlängerung eines zweiten Bogens der Gangpolbahn liegt, wie etwa in Bild 6.

⁴⁾ Gegebenenfalls ist der Index mod m' zu reduzieren: $P_i = P_k$, wenn $i \equiv k \pmod{m'}$.

⁵⁾ M. Fujiwara und S. Kakeya: „On some Problems of Maxima and Minima for the Curve of Constant Breadth and the In-revolvable Curve of the Equilateral Triangle“; Tôhoku Math. Journ. Bd. 11 (1917). Hier ist die Linse eine Parallelkurve jener von Reuleaux; sie hat Bogen- und Eckenwinkel von 60° und ist insofern bemerkenswert, als ihre Ecken im Laufe der Bewegung bis in jene des Dreiecks gelangen.

M_1 gezogenen Parallelen zu $a_{n'i+1}$ (6) mit dem Kreis, der den Bogen $Q_1 Q_2$ trägt; sie bilden demnach ein regelmäßiges m'/t -Eck. Analog ergeben sich die übrigen.

Θ_1 bildet zusammen mit Π_1 ein Elementenpaar, das allerdings nicht immer praktisch ausführbar ist, auch nicht zwangläufig sein muß. In den Bildern 3 bis 6 finden wir einige Elementenpaare ohne derartige Mängel, die auf die auseinandergesetzte Weise gefunden wurden. Angaben über weitere — zum Teil bekannte — brauchbare Elementenpaare enthält die umseitige Zusammenstellung. Zu jeder Zeile gehört eine ganze Schar von Elementenpaaren, da ja die Wahl von A_1 noch willkürlich ist; bei allgemeiner Lage von A_1 (Bild 3) gestattet Θ_1 bloß die Drehungen der Untergruppe $\Omega^{m'i}$, während bei besonderer Wahl von A_1 noch achsiale Symmetrien hinzutreten können. Die Anmerkungen beziehen sich durchwegs auf derartige Sonderfälle, da auch nur solche in der Literatur Erwähnung finden.

§ V. Es soll kurz etwas näher auf die Zwangläufigkeit der Bewegung des Elementenpaares eingegangen werden.

Selbständige Zwangläufigkeit ist sicher nur dann vorhanden, wenn

$$m'/t \geq 3 \dots \dots \dots (7)$$

da andernfalls das Stützgebilde Π_1 (6) nur aus einer oder zwei (parallelen) Geraden besteht.

Das 1. Beispiel der Tabelle ist wegen $m'/t=2$ bei allgemeiner Wahl von A_1 nicht zwangläufig. Läßt man jedoch A_1 mit Q_1 zusammenfallen, so weist nun die Bahn von A_1 zwei weitere geradlinige Stücke auf³⁾; vervollständigt man mit deren Hilfe Π_1 zu einem Rhombus, so ist Θ_1 in demselben zwangläufig beweglich.

Ist $t > 1$, so kommt noch eine andere Möglichkeit zur Herbeiführung von Zwangläufigkeit in Betracht. Wir können nämlich in diesem Falle, ausgehend vom Punkt $A_2 = \Omega \cdot A_1$ und seiner Bahngeraden $a_2 = \mathfrak{P} \cdot a_1$ zunächst zu einem zweiten Elementenpaar $\Pi_2 = \mathfrak{P} \cdot \Pi_1$, $\Theta_2 = \Omega \cdot \Theta_1$ gelangen und, solcherart fortfahrend, insgesamt t kongruente Elementenpaare $\Pi_i = \mathfrak{P}^{i-1} \cdot \Pi_1$, $\Theta_i = \Omega^{i-1} \cdot \Theta_1$ ($i=1, \dots, t$) herleiten. Denken wir uns dieselben in t übereinanderliegenden Ebenen ausgeführt, so stören sie einander nicht und können sogar die bei $m'/t \leq 2$ jedem einzelnen Paare fehlende Zwangläufigkeit gemeinsam herbeiführen, wenn nur $m' \geq 3$.

Ein Beispiel hierfür ist etwa $m=4$, $n=6$. Hier ergeben sich zwei übereinanderliegende Kreisbogendreiecke (§ I, 1), die in zwei übereinanderliegenden, zueinander senkrechten Parallelstreifen gleiten.

Bei $m=6$, $n=4$ (Bild 6) ist Zwangläufigkeit schon in jedem, aus einer Linse in einem Dreieck bestehenden Paare vorhanden.

§ VI. Die Frage nach der praktischen Ausführbarkeit eines Elementenpaares läßt sich nicht so ohne weiteres entscheiden.

Erinnern wir uns zunächst, daß a_i als Bahngerade von A_i beim Abrollen von $Q_i Q_{i+1}$ auf $P_i P_{i+1}$ durch den Mittelpunkt M_i des Kreisbogens $P_i P_{i+1}$ geht (§ IV). Unterwerfen wir an Stelle von a_i eine dazu parallele Gerade \bar{a}_i , die keinen der Mittelpunkte M_i enthält, der umgekehrten Bewegung, so erhalten wir eine eckenfreie Parallelkurve $\bar{\Theta}_i$ des früheren Profils Θ_i . $\bar{\Theta}_i$ wird von n'/t kongruenten Zügen gebildet, die wieder aus je m' Kreisbögen vom Zentrivinkel σ zusammengesetzt sind. Letzteres erklärt sich daraus, daß sich die Richtung von \bar{a}_i beim Abrollen von $P_i P_{i+1}$ auf $Q_i Q_{i+1}$ um den Winkel σ (2) ändert. Diese Randkurve kann keine Wendepunkte enthalten, da die Drehung der Geraden stets im selben Sinn erfolgt, und sie besitzt auch keine Rückkehrpunkte, wenn \bar{a}_i hinreichend weit von den Polbahnen entfernt ist. Verschieben wir nun \bar{a}_i parallel auf die Polbahnen zu, so werden sämtliche Radien von $\bar{\Theta}_i$ um die Schubstrecke verkleinert; schließlich wird einer der Halbmesser verschwinden, nämlich dann, wenn die Gerade zum erstenmal einen Mittelpunkt M_i erreicht. Die Hüllkurve besitzt nun an Stelle des zugehörigen Kreisbogens eine Ecke mit dem Innenwinkel $\pi - \sigma$, ja infolge der Automorphiegruppe $\Omega^{m'i}$ sogar n'/t solcher Ecken. Würden wir die Verschiebung noch weitertreiben, so erscheint wieder ein Kreisbogen, der sich aber an seine beiden Nachbarn mit Spitzen anschließt.

Es kommen mithin zur Erzeugung brauchbarer Formen von Θ für a_i nur Stützgeraden des Vielecks (M_i) in Betracht⁴⁾.

³⁾ Das soll nicht heißen, daß die vorhin betrachteten Parallelkurven von Θ , für welche die Erzeugenden a_i das Vieleck (M_i) überhaupt nicht treffen, nicht auch „brauchbar“ wären; uns beschäftigen indes begrifflicher Weise nur die Grenzfälle.

Achsialsymmetrische Formen von Θ erhalten wir dann, wenn die Stützgerade a_1 eine Seite der konvexen Hülle von (M_i) ist oder einen Außenwinkel halbiert (Θ in Bild 4, 5). Im ersten Fall geht a_1 durch zwei Mittelpunkte M_i , so daß Θ $2n'/t$ Ecken aufweist. Diese liegen getrennt, wenn $m'' > 1$ ist (Θ^* in Bild 4). Sie vereinigen sich jedoch zu n'/t Ecken vom Innenwinkel $\pi - 2\sigma$, falls $m'' = 1$ ist (Θ_1 und Θ_2 in Bild 6), da dann die beiden Mittelpunkte aufeinanderfolgende Indizes haben.

Zu parallelen Stützgeraden gehören zwei Elementenprofile Θ , die Parallelkurven sind (Θ und Θ^* in Bild 4, Θ_1 und Θ_2 in Bild 6).

Die eine Schwierigkeit — das Auftreten von Spitzen — haben wir beseitigt. Es können aber noch störende Überschneidungen an Θ aufscheinen. Wir haben vorhin festgestellt, daß sich a_1 während des Abrollens entsprechender Bögen um den Winkel σ (2) dreht; das ergibt im Gesamtverlauf der umgekehrten Bewegung

$$\frac{m'n'}{t} \cdot \sigma = \frac{m'n'}{t} \left(\frac{2\pi n''}{n'} - \frac{2\pi m''}{m'} \right) = 2\pi \cdot \frac{m'n'' - n'm''}{t} \dots \dots \dots (8),$$

ein Vielfaches des vollen Winkels. Entscheidend ist die ganze Zahl

$$g = \frac{m'n'' - n'm''}{t} \dots \dots \dots (9).$$

Ist nämlich $|g| = 1$, so ist Θ konvex und demnach praktisch ausführbar. Die Bedingungen für die Zwangläufigkeit (§ V) sind gesondert zu prüfen. Ist die Seitenzahl m'/t von Π gerade, dann ist Θ ein Gleichdick.

Ist hingegen $|g| > 1$, so ist Θ nicht konvex und es finden sicher Überschneidungen statt. Eine praktische Ausführung des Elementenpaares ist dann meist, aber nicht immer, ausgeschlossen. Als Gegenbeispiel diene Bild 5, die Ausbildung des Falles $m = 5$, $n = 3$; hier ist $g = 2$, und das Elementenpaar läßt eine durchwegs zwangläufige Bewegung nach Art eines Hohlzahnradpaars zu.

§ VII. Es seien noch zwei Bemerkungen gestattet, die sich zwanglos an unsere Ausführungen anschließen lassen. Verwenden wir statt unserer aus Kardanbögen gestückelten Polbahnen zwei Kreise p und q mit den Halbmessern m und n , von denen der eine den anderen umschließt, so können wir unsere Überlegungen auf doppelte Weise wiederholen. m und n seien positive, ganze, relativ prime Zahlen.

1. Wir wählen auf q einen beliebigen Punkt A_1 und bestimmen seine Bahn beim Rollen von q in p . Es ergibt sich eine m -spitzige Hypozykloide Π , die nicht nur von A_1 allein beschrieben wird, sondern gleichzeitig von n Punkten A_1, A_2, \dots, A_n auf q , die ein regelmäßiges n -Eck bilden.

Bei der umgekehrten Bewegung geht Π stets durch diese n Punkte und besitzt überdies eine gewisse Hüllkurve. Ein Bestandteil dieser Hüllkurve ist eine Zykloide Θ mit den Spitzen A_1, A_2, \dots, A_n (Π und Θ können mittels eines Hilfspolkreises vom Halbmesser $m - n$ hergestellt werden).

Ist $m \geq 3$ und $m - n = 1$, so erhalten wir ein zwangläufiges, höheres Elementenpaar Π, Θ , das aus zwei Hypozykloiden besteht, von denen die kleinere mit ihren n Spitzen ständig auf der größeren gleitet, sie überdies an einer weiteren Stelle berührend⁷⁾.

2. Wir denken uns eine beliebige Gerade a_1 mit p fest verbunden (Zentralabstand z) und bestimmen ihre Hüllkurve Θ beim Rollen von p in bzw. um q . Es ergibt sich eine Parallelkurve jener n - oder $2n$ -spitzigen Zykloide, die als Hüllkurve des zu a_1 parallelen Durchmessers entsteht. Θ wird nicht von a_1 allein beschrieben, sondern gleichzeitig von m Seiten a_1, a_2, \dots, a_m eines regelmäßigen m -Eckes Π .

Ist $m \geq 3$, $m - n = \pm 1$ und $z \geq m(m \mp 2)$, so erhalten wir ein zwangläufiges höheres Elementenpaar, das aus einem regelmäßigen m -Eck Π und einer konvexen Parallelkurve Θ einer Hypozykloide besteht⁸⁾. 919

⁷⁾ Wir sind hier zu „adjustierbaren Zykloiden“, einer besonderen Zykloidenverzahnung, gelangt. F. Morley: „On Adjustable Cycloidal and Trochoidal Curves“. Amer. J. Math. Bd. 16 (1894).

⁸⁾ Vertreter dieser Klasse von höheren Elementenpaaren finden sich öfters in der mathematischen Literatur. Zu $m = 3$, $n = 2$, $z = 3$ gehört die „Linse im Dreieck“, zu $m = 3$, $n = 4$, $z = 15$ das „abgerundete Quadrat im Dreieck“; beide bei E. Meißner: „Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik“, Vierteljschr. d. Naturf. Ges. in Zürich, Jg. 54 (1909).