

Eine neue Näherungsformel für den Ellipsenumfang.

Die Länge des Ellipsenquadranten wird bekanntlich durch das (elliptische) Integral

$$u = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi \quad \dots (1)$$

festgelegt, wobei $a \geq 0$ und $b \geq 0$ die Halbachsen der Ellipse bezeichnen. Geht man hierin mittels der Substitution

$$\frac{\pi a}{2u} = \xi + \eta, \quad \frac{\pi b}{2u} = -\xi + \eta \quad \dots (2)$$

zu dimensionslosen Größen über, so stellt die aus (1) fließende Beziehung

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos 2\varphi} \cdot d\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \dots (3)$$

bei Deutung in einem kartesischen Normalkoordinatensystem ξ, η eine gewisse (transzendente) Kurve dar, die zur η -Achse symmetrisch ist und auf dieser im Punkt $\xi = 0, \eta = 1$ einen Scheitel besitzt. Es zeigt sich, daß der zu diesem Scheitel gehörige, sechspunktig berührende Schmiegekegelschnitt die Diagrammkurve vorzüglich approximiert und mit seiner Gleichung eine bemerkenswerte Näherungsformel für den Ellipsenumfang liefert.

Zur Ermittlung einer Potenzreihenentwicklung in der Umgebung des genannten Scheitels führen wir die Hilfsgröße

$$\frac{\xi}{\eta} = t \quad \dots (4)$$

ein und erhalten unter Verwendung der Abkürzung $\cos 2\varphi = c$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2\eta} &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 2ct + t^2} \cdot d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(1 + ct + \frac{1-c^2}{2} t^2 - \frac{c-c^3}{2} t^3 - \frac{1-6c^2+5c^4}{8} t^4 + \dots \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Bei gliedweiser Integration verschwinden — wie es aus Symmetriegründen sein muß — die ungeraden Potenzen von t ; nach Kürzung durch $\pi/2$ erhält man so zunächst

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{64} + \dots,$$

und mittels (4) schließlich die gewünschte Darstellung

$$\xi = t - \frac{t^3}{4} + \dots, \quad \eta = 1 - \frac{t^2}{4} + \frac{3t^4}{64} - \dots (5)$$

Der gesuchte Schmiegekegelschnitt läßt sich nun mit Hilfe der oskulierenden Parabel $\xi^2 + 4(\eta - 1) = 0$ ansetzen durch

$$\xi^2 + 4(\eta - 1) + \lambda(\eta - 1)^2 = 0;$$

trägt man hierin die Werte von ξ und η aus (5) ein, so findet man, daß die Glieder bis zur 4. Ordnung weggelassen, wenn $\lambda = 5$ angenommen wird. Der Schmiegekegelschnitt ist mithin die Ellipse mit der Gleichung

$$\xi^2 + 5\eta^2 - 6\eta + 1 = 0 \quad \dots (6)$$

Keht man nunmehr über (2) wieder zu den ursprünglichen Größen zurück, so erhält man die Näherungsrelation

$$8u^2 - 12\pi(a+b)u + \pi^2(3a^2 + 4ab + 3b^2) = 0 (7)$$

Auflösung dieser quadratischen Gleichung liefert schließlich die angekündigte Näherungsformel für den Ellipsenumfang

$$4u \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{3(a+b)(a+3b)} \right] (8)$$

Diese Formel gibt naturgemäß für den Kreis ($a = b$) den genauen Umfang und liefert, wie zu erwarten war, für $a \approx b$ sehr gute (durchwegs etwas zu kleine) Näherungswerte. Erstaunlicherweise ist aber die Abweichung im gesamten Anwendungsbereich außerordentlich gering, wie die nachstehende Tabelle I zeigt. Der größte Fehler tritt im Grenzfall der zur Doppelstrecke ausgestarteten Ellipse ($b = 0$) auf und beträgt $4,2\%_{00}^1$. Treibt

Tabelle I		Tabelle II	
b/a	$\Delta u/u$	ϑ	$\Delta E/E$
0	$4,2 \cdot 10^{-3}$	0°	0
0,1	$8,3 \cdot 10^{-4}$	10°	$4 \cdot 10^{-16}$
0,2	$2,1 \cdot 10^{-4}$	20°	$2 \cdot 10^{-12}$
0,3	$5,4 \cdot 10^{-5}$	30°	$2 \cdot 10^{-10}$
0,4	$1,3 \cdot 10^{-5}$	40°	$1 \cdot 10^{-8}$
0,5	$2,8 \cdot 10^{-6}$	50°	$2,3 \cdot 10^{-7}$
0,6	$5 \cdot 10^{-7}$	60°	$2,8 \cdot 10^{-6}$
0,7	$7 \cdot 10^{-8}$	70°	$3,0 \cdot 10^{-5}$
0,8	$4 \cdot 10^{-9}$	80°	$3,0 \cdot 10^{-4}$
0,9	$4 \cdot 10^{-11}$	90°	$4,2 \cdot 10^{-3}$
1	0		

¹⁾ Die Formel erinnert der Bauart nach an die bekannte Faustformel von Boussinesq $4u \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right]$, ist jedoch rund hundertmal genauer als diese. Vgl. diesbezüglich die Angaben bei W. Weydanz, Eine verbesserte Näherungsgleichung für den Ellipsenumfang, Z. angew. Math. Mech. 34 (1954), S. 194. Siehe auch H. Schwerdt, Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik (Berlin 1931), S. 44.

man die Potenzreihenentwicklung um einen Schritt weiter, so läßt sich die folgende, allerdings bloß für stark kreisähnliche Ellipsen ($a \approx b$) gültige Fehlerabschätzung gewinnen:

$$\frac{\Delta u}{u} \approx \frac{\pi^5 (a-b)^6}{2^{19} u^5 (a+b)} \approx 2^{-9} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 \dots (9)$$

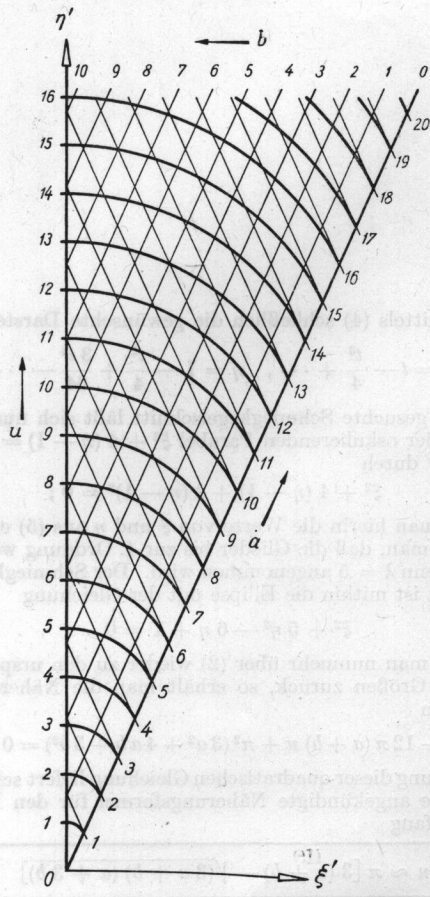


Bild 1. Nomogramm für den Ellipsenumfang (Halbachsen a, b ; Umfang $4u$)

Das Ausgangsintegral (1) stellt im wesentlichen das vollständige elliptische Normalintegral II. Gattung nach Legendre dar, denn es ist

$$u = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = a \cdot E(k)$$

$$\text{mit } k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \dots (10)$$

Setzen wir mithin $a = 1$ und $b = \cos \vartheta$, so wird $k = \sin \vartheta$ und die Formel (8) bietet in der Gestalt

$$E(\sin \vartheta) \approx \frac{\pi}{4} [3(1 + \cos \vartheta) - \sqrt{(3 + \cos \vartheta)(1 + 3 \cos \vartheta)}] \dots (11)$$

eine brauchbare Näherung des genannten elliptischen Integrals, deren hervorragende Güte an Hand der Tabelle II beurteilt werden kann.

Das obenstehende, auf der Näherungsformel (8) beruhende Nomogramm für den Ellipsenumfang ergibt sich, wenn man im Hinblick auf das Achsenverhältnis $\sqrt{5} : 1$ der Ellipse (6) die modifizierte Substitution

$$a = \sqrt{5} \xi' + \eta', \quad b = -\sqrt{5} \xi' + \eta' \dots (2')$$

vornimmt. Die Relation (7) geht dann über in

$$\xi'^2 + \left(\eta' - \frac{6u}{5\pi}\right)^2 = \left(\frac{4u}{5\pi}\right)^2 \dots (6')$$

Faßt man nun ξ' und η' wieder als kartesische Normalkoordinaten auf, so stellt die Gl. (6') eine nach u bezifferte Ähnlichkeitsschar von Kreisen dar, während die Gl. (2') zwei nach a bzw. b bezifferte Parallelscharen von Geraden beschreiben. Diese drei Linienscharen bauen die in Bild 1 wiedergegebene Netztafel auf, von welcher nur ein der Festsetzung $a \geq b \geq 0$ entsprechender Teil ausgeführt wurde²⁾.

Wien.

W. Wunderlich.

²⁾ Diese Netztafel ist analog einem von R. Soreau, Nomographie (Paris 1921), vol. I, p. 91 für die Formel von Boussinesq vorgeschlagenen Entwurf, weist jedoch günstigere Schnittverhältnisse auf.

Tabelle II		Tabelle I	
ϑ	$E(\sin \vartheta)$	ϑ	$E(\sin \vartheta)$
0°	1.5708	0°	1.5708
10°	1.5688	10°	1.5688
20°	1.5648	20°	1.5648
30°	1.5588	30°	1.5588
40°	1.5508	40°	1.5508
50°	1.5408	50°	1.5408
60°	1.5288	60°	1.5288
70°	1.5148	70°	1.5148
80°	1.4988	80°	1.4988
90°	1.4808	90°	1.4808