Zur rechnerischen Durchführung des Vierpunktverfahrens

Von W. Wunderlich, Wien

Unter der Voraussetzung *ebenen Geländes* ist der geometrische Zusammenhang zwischen Kartenbild und Luftbild bekanntlich ein *kollinearer* und daher vollkommen bestimmt, wenn vier Geländepunkte in beiden Bildern identifiziert werden können, wobei lediglich die Einschränkung zu beachten ist, daß diese Punkte ein echtes Viereck bilden müssen, also keine drei in einer Geraden liegen dürfen. Die Übertragung weiterer Punkte aus einem Bild in das andere ist dann in eindeutiger Weise möglich und wird unter der Bezeichnung „*Vierpunktverfahren*" in der Praxis häufig angewendet [1]). Dem Verfahren kommt insofern weitergehende Bedeutung zu, als es auch bei beschränkten Abweichungen des Geländes oder einzelner Objekte von der Ebene mit guter Genauigkeit anwendbar bleibt.

Die *konstruktive Durchführung* dieser Aufgabe geschieht am bequemsten mittels der „Papierstreifenmethode", die auf der Doppelverhältnisgleichheit entsprechender Strahlenquadrupel in zugeordneten Strahlbüscheln beruht. Während diese zeichnerische Methode allgemein geläufig ist, scheint eine zweckmäßige *rechnerische Durchführung* der Aufgabe weniger bekannt

[1]) Vgl. etwa K. Schwidefsky, *Einführung in die Luft- und Erdbildmessung* (Leipzig/Berlin, 2. Aufl. 1939), S. 67 ff.

zu sein, obwohl gelegentliches Bedürfnis danach besteht. Es ist daher der Zweck der folgenden Zeilen, einen brauchbaren und vor allem bequem und übersichtlich zu handhabenden Rechengang aufzuzeigen.

Führt man in der Karten- bzw. Luftbildebene unabhängig voneinander kartesische Normalkoordinaten x, y bzw. x', y' ein, so wird jeder kollineare Zusammenhang zwischen den beiden Ebenen bekanntlich durch lineargebrochene Transformationsgleichungen von der Bauart

$$(1) \qquad x = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + c_3}\,, \quad y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + c_3}\,.$$

beschrieben. Setzt man die Transformationsgleichungen zunächst mit unbekannten Koeffizienten an und trägt anschließend die Koordinaten der vier bekannten Kartenpunkte *1, 2, 3, 4* und ihrer entsprechenden Bildpunkte *1', 2', 3', 4'* ein, so gelangt man zu insgesamt acht linear-homogenen Bestimmungsgleichungen für die neun Koeffizienten, die sich daraus bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmen lassen, welcher jedoch beliebig festgesetzt werden kann. Die Auflösung dieses Gleichungssystems erfordert allerdings (trotz spezieller Bauart) einen beträchtlichen Aufwand, und selbst nach dessen Bewältigung sind die zu benützenden Transformationsformeln (1) nicht sehr bequem zu handhaben. Der beschriebene Vorgang, wie ihn beispielsweise P. Tham vorschlägt [2]), ist demnach kaum zu empfehlen. — S. Finsterwalder verwendet statt Normalkoordinaten schiefwinklige [3]), deren Achsen jeweils mit zwei Gegenseiten der Grundvierecke zusammenfallen, wodurch sich die Anzahl der Transformationskoeffizienten um vier vermindert. Der Rechenaufwand wird dadurch zweifellos verringert, doch darf nicht übersehen werden, daß das direkte Ausmessen und Auftragen schiefwinkliger Koordinaten eine mißliche Angelegenheit ist, anderseits eine Rückkehr zu Normalkoordinaten zusätzliche Transformationsgleichungen bedingt. Auch dieser Arbeitsgang ist also ziemlich umständlich.

Der nachstehend entwickelte Vorschlag, der jegliche Auflösung linearer Gleichungssysteme umgeht, läuft darauf hinaus, drei der Angabepunkte — etwa *1, 2, 3* in der Kartenebene — als Ecken eines „*Fundamentaldreieckes*" anzusehen und zur Festlegung jedes weiteren Punktes P dessen „*Flächenkoordinaten*" $f_1 = \triangle\, 23P$, $f_2 = \triangle\, 31P$, $f_3 = \triangle\, 12P$ heranzuziehen (Abb. 1). Diese speziell in der Dreiecksgeometrie vielfach bewährten Koordinaten hat schon A. F. Möbius in seinem „Baryzentrischen Kalkül" (1827) eingeführt [4]); sie gestatten nämlich neben der geometrischen Auffassung auch

---

[2]) P. Tham, *Die vollständige Lösung des Rückwärtseinschnitts.* Z. f. Vermessungswesen 72 (1943), 216.

[3]) S. Finsterwalder, *Über die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen.* Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 30 (1900), 149.

[4]) A. F. Möbius, *Gesammelte Werke* (Leipzig 1885), Bd. I, S. 50 ff.

eine bemerkenswerte mechanische Deutung: Denkt man sich in den Fundamentalpunkten *1, 2, 3* der Reihe nach die Massen f_1, f_2, f_3 (oder dazu proportionale) konzentriert, so fällt ihr Gesamtschwerpunkt gerade nach P.

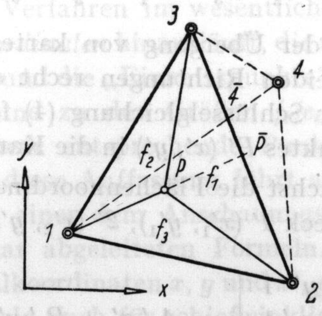

Abb. 1

In der Tat teilt etwa der Schwerpunkt $\bar{P}$ des Massenpaares f_2, f_3 die Seite *23* im Verhältnis $2\bar{P} : 3\bar{P} = -f_3 : f_2$, liegt also auf der Geraden $1\,P$, die ja die Fläche des Fundamentaldreiecks im gleichen Verhältnis teilt. — Die Flächenkoordinaten sind selbstverständlich, dem Umlaufsinn der betreffenden Teildreiecke entsprechend, mit Vorzeichen versehen und nur für Punkte im Inneren des Fundamentaldreiecks durchwegs positiv. Bei Außenpunkten muß die mechanische Interpretation das Auftreten negativer Massen zulassen [5]).

Die Flächenkoordinaten des vierten Angabepunktes *4*, erklärt durch die Dreiecke *234, 314* und *124*, seien mit e_1, e_2 und e_3 bezeichnet. Die Gerade *14* schneidet die Seite *23* in einem Punkt $\bar{4}$ und teilt dieselbe im Verhältnis $2\bar{4} : 3\bar{4} = -e_3 : e_2$. Das *Doppelverhältnis* der vier von *1* der Reihe nach nach *2, 3, 4* und P zielenden Strahlen läßt sich mithin — unter Heranziehung ihrer Schnittpunkte mit der Gegenseite *23* — einfach durch die Flächenkoordinaten ausdrücken:

$$(2) \qquad 1\,(234\,P) = (\overline{234\,P}) = \frac{2\bar{4}}{3\bar{4}} : \frac{2\bar{P}}{3\bar{P}} = -\frac{e_3}{e_2} : -\frac{f_3}{f_2} = \frac{f_2}{e_2} : \frac{f_3}{e_3}.$$

Geht man nun in der Luftbildebene ganz analog vor (die entsprechenden Größen durch einen Akzent unterscheidend), so erhält man auf Grund der durch die Kollineation bedingten *Doppelverhältnisgleichheit* $1\,(234\,P) = 1'\,(2'\,3'\,4'\,P')$ im Hinblick auf (2) die Beziehung

$$(3) \qquad \frac{f_2}{e_2} : \frac{f_3}{e_3} = \frac{f'_2}{e'_2} : \frac{f'_3}{e'_3}.$$

[5]) Flächenkoordinaten wurden gelegentlich bei der affinen Übertragung herangezogen; vgl. L e r c h e, *Zur Übertragung von Dreiecksmaschen mit Hilfe von Achsenabschnitten der Ecktransversalen.* Nachr. Reichsverm.dienst 1944, 152.

Hierzu treten durch zyklisches Weiterrücken zwei ähnliche gleichwertige Beziehungen, die sich mit (3) zusammenfassen lassen zu

$$(4) \qquad \frac{f_1}{e_1} : \frac{f_2}{e_2} : \frac{f_3}{e_3} = \frac{f'_1}{e'_1} : \frac{f'_2}{e'_2} : \frac{f'_3}{e'_3} .$$

Nachdem sich nun der Übergang von kartesischen Koordinaten zu Flächenkoordinaten in beiden Richtungen recht einfach vollzieht, so eröffnet sich auf Grund der Schlüsselgleichung (4) folgender Weg zur Übertragung eines Luftbildpunktes P' (x', y') in die Karte nach P (x, y):

Man bestimmt zunächst die Flächenkoordination f'_i von P' in bezug auf das Fundamentaldreieck $1'$ (x'_1, y'_1), $2'$ (x'_2, y'_2), $3'$ (x'_3, y'_3) nach dem Muster

$$(5) \qquad 2\, f_1 = \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = A_1'\, x' + B_1'\, y' + C_1' \text{ usf.}$$

$$\text{mit } A_1' = y_2' - y_3', B_1' = x_3' - x_2', C_1' = x_2'\, y_3' - x_3'\, y_2' \text{ usf.}$$

Durch Einsetzen der Koordinaten des vierten Grundpunktes $4'$ (x_4', y_4') für x', y' in (5) erhält man dessen Flächenkoordinaten e_i' vermöge

$$(6) \qquad 2\, e_1' = A_1'\, x_4' + B_1'\, y_4' + C_1' \text{ usf.}$$

In gleicher Weise berechnen sich in der Kartenebene die Flächenkoordinaten e_i von *4* in bezug auf *123* nach dem Muster

$$(7) \qquad 2\, e_1 = A_1\, x_4 + B_1\, y_4 + C_1$$

$$\text{mit } A_1 = y_2 - y_3, B_1 = x_3 - x_2, C_1 = x_2\, y_3 - x_3\, y_2$$

Nun können auf Grund von (4) die Verhältnisse der Flächenkoordinaten f_i von P angegeben werden:

$$(8) \qquad f_1 : f_2 : f_3 = \frac{e_1}{e_1'}\, f_1' : \frac{e_2}{e_2'}\, f_2' : \frac{e_3}{e_3'}\, f_3' .$$

Für die Berechnung der kartesischen Koordinaten des Punktes P, die auf Grund der baryzentrischen Deutung vermöge

$$(9) \qquad x = \frac{f_1\, x_1 + f_2\, x_2 + f_3\, x_3}{f_1 + f_2 + f_3}, \qquad y = \frac{f_1\, y_1 + f_2\, y_2 + f_3\, y_3}{f_1 + f_2 + f_3}$$

zu geschehen hätte, benötigt man aber nur die Verhältniswerte, sodaß man in diesen Formeln statt der f_i einfach die Verhältnisgrößen $f_i' e_i / e_i'$ einsetzen kann; man bemerkt darüber hinaus, daß man statt der Flächenkoordinaten f_i', e_i' und e_i auch gleich ihre in (5), (6) und (7) vermerkten doppelten Werte verwenden kann.

Da bei der Übertragung mehrerer Punkte die Transformationskoeffizienten in (5), (8) und (9) konstant sind, so vollzieht sich der Rechengang nach Erledigung der Vorarbeiten — die, wie schon hervorgehoben wurde, keinerlei Gleichungsauflösung verlangen — durchaus flüssig und in einer Weise, die leicht protokollarisch zu schematisieren ist und insbesondere auch für Rechenautomaten einfach programmiert werden kann.

Der in der projektiven Geometrie Bewanderte sieht natürlich, daß das auseinandergesetzte Verfahren im wesentlichen auf die Einschaltung *homogener projektiver Koordinaten* hinausläuft, die sich auf die Fundamentaldreiecke *123* bzw. *1' 2' 3'* und die „Einheitspunkte" *4* bzw. *4'* gründen. Diese Koordinaten ξ_i bzw. ξ_i' sind zu den Größen f_i/e_i bzw. f_i'/e_i' proportional und stimmen für kollinear entsprechende Punkte in den Verhältnissen überein [vgl. (4)]. Auch diese Auffassung führt aber bei expliziter Durchführung auf die hier in einer dem Anschauungsbedürfnis des Praktikers gemäßen Weise elementar abgeleiteten Formeln. — Den Betrachtungen waren kartesische Normalkoordinaten x, y und x', y' zugrundegelegt worden, doch behalten alle Formeln auch für schiefwinklige Koordinaten (und verschiedene Maßeinheiten) ihre Gültigkeit.

Einige Worte mögen noch speziell der Bestimmung des Bild- und Kartenhorizonts gewidmet werden, wofür K. Killian kürzlich eine einfache Vorschrift mitgeteilt hat [6]).

Der *Bildhorizont* ist jene Gerade in der Luftbildebene, die der Ferngeraden der Kartenebene entspricht. Diese Gerade ist offenbar durch das Verschwinden der Nenner in (9) gekennzeichnet, führt also wegen (8) auf die Bedingung

$$(10) \qquad \frac{e_1}{e_1'} f_1' + \frac{e_2}{e_2'} f_2' + \frac{e_3}{e_3'} f_3' = 0.$$

Setzt man hierin für die f_i' die Ausdrücke aus (5) ein, so hat man bereits die Gleichung des Bildhorizontes in den kartesischen Koordinaten x', y'.

In analoger Weise läßt sich der *Kartenhorizont* ermitteln, der in der Kartenebene der Ferngeraden der Luftbildebene zugeordnet ist; es sind lediglich gestrichene und ungestrichene Größen zu vertauschen. Man kann sich aber auch direkt zwei Punkte X und Y des Kartenhorizonts verschaffen, indem man einmal x' bei festem y' und das andere Mal y' bei festem x' über alle Schranken wachsen läßt. Im ersten Fall erhält man zufolge (5) in der Grenze $f_1' : f_2' : f_3' = A_1' : A_2' : A_3'$, im zweiten Fall $f_1' : f_2' : f_3' = B_1' : B_2' : B_3'$, und bestimmt dann mit diesen Werten über (8) und (9) die Koordinatenpaare jener Horizontpunkte X und Y, die den Fernpunkten der x'- und y'-Achse zugeordnet sind. Weitere, unter Umständen günstiger liegende Horizontpunkte könnte man durch Linearkombination mittels

$$(11) \qquad f_1' : f_2' : f_3' = (A_1' + \lambda B_1') : (A_2' + \lambda B_2') : (A_3' + \lambda B_3')$$

bei beliebigem (geeignetem) λ bekommen.

---

[6]) K. Killian, *Beitrag zur geometrischen Bestimmung der Lotrichtung in der Luftbildmessung.* Österr. Z. f. Vermessungswesen 44 (1956), 79.