

KINEMATIK IN DER EBENE DER KOMPLEXEN ZAHLEN*)

W. WUNDERLICH (Wien)

Der Begriff der Gaussschen Zahlenebene ist dem Techniker allgemein geläufig. Er benützt die Ebene der komplexen Zahlen für Wechselstromdiagramme und vor allem in der Theorie der konformen Abbildungen. Die einfachsten, sozusagen trivialen konformen Abbildungen sind nun die *Bewegungen*, sodass man erwarten dürfte, daß sich die *ebene Kinematik* des Hilfsmittels der komplexen Zahlen häufig mit Vorteil bedienen sollte. Gelegentliche Ansätze hiezu sind in der Tat wiederholt gemacht worden (Bellavitis, Darboux, Mehmke, Morley, Schilling in älterer Zeit, Haarbleicher, Hackmüller, Bereis, Müller, Stewart und der Verfasser in letzter Zeit); eine konsequente und systematische Verwendung dieses adäquaten Werkzeugs hat jedoch noch nicht die wünschenswerte Verbreitung gefunden, und ein Lehrbuch der Kinematik in komplexer Darstellung steht bis heute noch aus.

Es sei gestattet, an einigen Beispielen die Einfachheit, Bequemlichkeit und Eleganz der komplexen Darstellung im Dienste der Kinematik darzulegen, in der Hoffnung, dadurch das Interesse für diese erfolgreiche und weitere Erfolge versprechende Methode zu fördern.

Die übliche Auffassung beim Einsatz der Gaussschen Zahlenebene besteht darin, unter Beschränkung auf die *reellen Punkte* der Ebene die (reellen) Normalkoordinaten x, y eines Punktes P zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ zusammenzufassen, die als Repräsentant des Punktes oder seines Ortsvektors $\vec{OP}$ angesehen werden kann.

Addition komplexer Zahlen bedeutet dann bekanntlich die geometrische Addition der zugehörigen Vektoren. Insbesondere beschreibt daher die Transformation $z' = z + c$ mit konstantem c die durch den Vektor c gekennzeichnete Parallelverschiebung $z \rightarrow z'$. Die *Multiplikation* mit einer komplexen Konstanten, also die Transformation $z'' = c \cdot z$, lässt sich hingegen als *Drehstreckung* mit dem Nullpunkt als Zentrum deuten: Schreibt man

* Vorgetragen am 30. Mai 1956 beim III. Jugoslawischen Kongress für theoretische und angewandte Mechanik in Bled.

unter Verwendung von Polarkoordinaten $c = m(\cos \mu + i \sin \mu) = m \cdot e^{i\mu}$, so gibt $\mu = \arg c$ den Drehwinkel und $m = |c|$ den Massstabsfaktor der Ähnlichkeitstransformation $z \rightarrow z'$ an; für $|c| = 1$ liegt insbesondere eine reine Drehung vor.

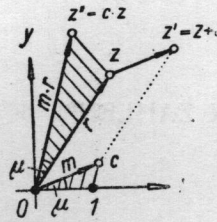


Abb. 1

■ Eine lineare Gleichung $z' = az + b$ beschreibt nach dem Gesagten eine gleichsinnig-kongruente Transformation $z \rightarrow z'$, wenn $|a| = 1$, und eine kontinuierliche Bewegung, sobald a und b stetige Funktionen eines (reellen) Zeitparameters t sind. Da sich auf diese Weise alle ebenen Bewegungsvorgänge erfassen lassen, ist die Einsatzmöglichkeit für kinematische Zwecke evident.

Für eine erste Anwendung von technischem Interesse gehen wir von folgendem Hilfssatz aus: Sind u, v, w drei komplexe Veränderliche mit festen Absolutbeträgen und konstanter Summe, so stellt ein Linearpolynom $Z = \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta$ mit konstanten Koeffizienten im allgemeinen eine Koppelkurve dar. Zum Beweis beachte man, dass die Voraussetzung

$$(1) \quad u + v + w = s$$

zusammen mit $|u|, |v|, |w| = \text{const}$ in geometrischer Interpretation ein dreigliedriges Polygon $OABC$ mit beweglichen, jedoch starren Seiten bedeutet, dessen Endpunkte O und C fest sind. Jeder mit der Koppel eines solchen Dreistabgetriebes (Gelenkvierecks) starre verbundene Punkt $P (\neq A, B)$ bewegt sich auf einer sogenannten Koppelkurve. Diese für den Getriebekonstrukteur ausserordentlich wichtige Kurve (6. Ordnung) lässt sich offenbar durch

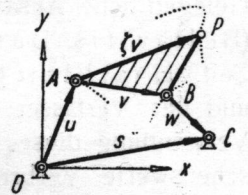


Abb. 2

$$(2) \quad z = u + \zeta v$$

darstellen, wobei die komplexe Konstante ζ die Drehstreckung $B \rightarrow P$ mit dem Zentrum A kennzeichnet, also durch $|\zeta| = AP:AB$ und $\arg \zeta = \angle BAP$ bestimmt ist. Jedes Linearpolynom

$$(3) \quad Z = \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta$$

läßt sich nun nach Elimination von w mittels (1) linear in z darstellen, wenn man ζ passend festsetzt:

$$(4) \quad Z = (\alpha - \gamma)u + (\beta - \gamma)v + (\gamma s + \delta) = (\alpha - \gamma) \left(u + \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} v \right) + (\gamma s + \delta).$$

Die Ortslinie (Z) geht mithin auf Grund dieser Darstellung aus der durch $\zeta = (\beta - \gamma) : (\alpha - \gamma)$ charakterisierten Koppelkurve (z) durch die Drehstreckung

$Z = (\alpha - \gamma)z + (\gamma s + \delta)$ hervor, ist also selbst eine Koppelkurve. Die Kurveartet höchstens zu einem *Kreis* aus, falls $\beta = \gamma$, $\gamma = \alpha$ oder $\alpha = \beta$ ist.

Nach dieser Vorbereitung lässt sich nun sofort ein hübsches, den Mechaniker angehendes Ergebnis über die *Schwerpunktsbahn des Dreistabgetriebes* ableiten. Die Teilschwerpunkte S' , S'' und S''' der drei Glieder OA , AB und BC seien festgelegt durch $\overrightarrow{OS'} = \sigma' u$, $\overrightarrow{AS''} = \sigma'' v$ und $\overrightarrow{BS'''} = \sigma''' w$ (mit konstanten, im allgemeinen komplexen Koeffizienten); sind ferner m' , m'' und m''' die Relativmassen dieser Glieder (mit der Summe 1), so berechnet sich die komplexe Koordinate des Gesamtschwerpunkts S mit

$$(5) \quad Z = m' \cdot \sigma' u + m'' (u + \sigma'' v) + m''' (u + v + \sigma''' w).$$

Dies ist aber ein Ausdruck von der Bauart (3), stellt also eine *Koppelkurve* dar. Die Bahn des Gesamtschwerpunkts eines Dreistabgetriebes ist mithin im allgemeinen eine Koppelkurve, die zu einer der vom Getriebe erzeugbaren Koppelkurven ähnlich ist, in Ausnahmefällen ein *Kreis*. Unter speziellen Voraussetzungen wurde diese Tatsache bereits von R. Kreutzinger bemerkt [5]; in der vorliegenden allgemeinen Form dürfte das Ergebnis neu sein.

Mit denselben Mitteln ist auch der bekannte, für die Getriebesynthese so wertvolle Satz von Roberts, betreffend die *dreifache Erzeugung der Koppelkurve*, rein analytisch und höchst einfach neu zu beweisen: Aus der Darstellung (2) einer Koppelkurve folgen nämlich gleich die äquivalenten Darstellungen

$$(2') \quad z = u' + \zeta' v' \text{ mit } \zeta' = \zeta^{-1}, u' = \zeta u, v' = \zeta v, w' = \zeta w \\ \text{und } u' + v' + w' = s' = \zeta s,$$

sowie — mit Rücksicht auf (1) —

$$(2'') \quad z = s + (\zeta - 1)v - w = s + u'' + \zeta'' v'' \text{ mit } \zeta'' = (1 - \zeta)^{-1}, \\ u'' = (\zeta - 1)v, v'' = (\zeta - 1)w, w'' = (\zeta - 1)u \text{ und} \\ u'' + v'' + w'' = s'' = (\zeta - 1)s.$$

Geometrisch interpretiert führen diese Darstellungen auf zwei neue Dreistabgetriebe, welche dieselbe Koppelkurve erzeugen.

Wenden wir uns nun der Untersuchung eines *allgemeinen Bewegungsvorgangs* in der Ebene zu. Wir denken uns die ruhende Ebene als *Gaussche Bildebene* komplexer Zahlen $z = x + iy$, analog die bewegte Ebene als *Bildebene* komplexer Zahlen $\zeta = \xi + i\eta$. Die augenblickliche Lage des

bewegten Systems gegenüber dem ruhenden sei durch die Ortskoordinate u des Ursprungs und den Drehwinkel $\varphi = \angle x\xi$ festgelegt. Die Ortskoordinate z eines Systempunktes ζ drückt sich dann aus in der Form

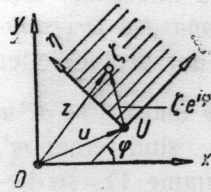


Abb. 3

$$(6) \quad z = u + \varepsilon \cdot \zeta \quad \text{mit} \quad \varepsilon = e^{i\varphi},$$

wobei u und φ als hinreichend oft differenzierbare Funktionen des reellen Zeitparameters t zu denken sind.

Für konstantes ζ stellt die Bewegungsgleichung (6) die Gleichung der Bahn eines bestimmten Systempunktes P dar. Der momentane Geschwindigkeitsvektor ist durch die erste Ableitung

$$(7) \quad \dot{z} = \dot{u} + \dot{\varepsilon} \zeta$$

gegeben. Der augenblicklich in Ruhe befindliche Systempunkt M_1 , bekannt als Momentanzentrum oder Drehpol, ist gekennzeichnet durch

$$(8) \quad 0 = \dot{u} + \dot{\varepsilon} \zeta_1.$$

Mit seiner Hilfe lassen sich die Geschwindigkeiten sämtlicher Systempunkte leicht überblicken, denn es gilt

$$(9) \quad \dot{z} = \dot{\varepsilon} (\zeta - \zeta_1) = \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} (z - z_1),$$

und das bedeutet wegen des rein-imaginären Faktors $\dot{\varepsilon}/\varepsilon = i\dot{\varphi}$, dass die Geschwindigkeit jedes Systempunktes P normal und proportional zur Strecke M_1P ist. — Als Ort des Momentanzentrums im Ablauf der Bewegung tritt im bewegten System die sogenannte Gangpolkurve

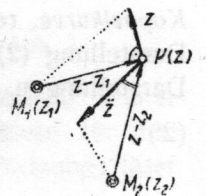


Abb. 4

$$(10) \quad \zeta_1 = -\frac{\dot{u}}{\dot{\varepsilon}}$$

auf, im festen System die Rastpolkurve

$$(11) \quad z_1 = u + \varepsilon \zeta_1 = u - \frac{\dot{u} \varepsilon}{\dot{\varepsilon}}.$$

Die Ableitung von (11) liefert mit Rücksicht auf (8)

$$\dot{z}_1 = \dot{u} + \dot{\varepsilon} \zeta_1 + \varepsilon \dot{\zeta}_1 = \varepsilon \dot{\zeta}_1,$$

oder

$$(12) \quad dz_1 = e^{i\varphi} \cdot d\zeta_1,$$

d. h. die Bogenelemente der beiden Polkurven sind jeweils in Deckung. In dieser einfachen Weise drückt sich also die bekannte Fundamentaltatsache aus, dass im Verlauf der Bewegung die Gangpolkurve auf der Rastpolkurve gleitungslos abrollt.

Zweimalige Ableitung der Bewegungsgleichung (6) führt auf den Beschleunigungsvektor

$$(13) \quad \ddot{z} = \ddot{u} + \ddot{\epsilon} \zeta.$$

Der durch verschwindende Beschleunigung ausgezeichnete Systempunkt M_2 bekannt als *Beschleunigungspol* und bestimmt durch

$$(14) \quad 0 = \ddot{u} + \ddot{\epsilon} \zeta_2,$$

gestattet auf Grund der Darstellung

$$(15) \quad \ddot{z} = \ddot{\epsilon} (\zeta - \zeta_2) = \frac{\ddot{\epsilon}}{\epsilon} (z - z_2)$$

wieder einen klaren Überblick über die Verteilung der Beschleunigungen: Die Beschleunigung jedes Systempunktes P ist proportional zur Strecke M_2P und schliesst mit dieser einen festen Winkel ein, der im allgemeinen jedoch kein rechter ist.

Analoge Darstellungen sind offensichtlich auch für alle höheren Beschleunigungen möglich, da ganz allgemein

$$(16) \quad z^{(n)} = \epsilon^{(n)} (\zeta - \zeta_n) = \frac{\epsilon^{(n)}}{\epsilon} (z - z_n)$$

gilt, wobei ζ_n bzw. z_n den „Pol n -ter Ordnung“ M_n festlegen, für welchen $z^{(n)} = 0$. — Fragt man etwa nach dem Ort aller Systempunkte P , für welche die Beschleunigungen $z^{(m)}$ und $z^{(n)}$ einen vorgeschriebenen konstanten Winkel α einschliessen, so erkennt man wegen der gleichzeitigen Konstanz des Winkels $M_m P M_n = \beta$, dass sich hierbei ein Kreis durch M_m und M_n ergibt: Es handelt sich offenbar um eine Verallgemeinerung der *Breschen Kreise*, welche durch $\dot{z} \parallel \ddot{z}$ bzw. $\dot{z} \perp \ddot{z}$ definiert sind [9].

Eine bemerkenswerte und sehr umfassende Kurvenfamilie, die sich nach dieser Methode erschöpfend untersuchen lässt, sind die „höheren Radlinien“

$$(17) \quad z = \sum_{v=1}^s a_v e^{i \omega_v t}.$$

Es handelt sich hierbei jeweils um die Bahn des Endpunktes eines im Ursprung befestigten s -gliedrigen Polygonzuges, dessen starre Seiten $a_1, \dots, a_s$ sich mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \dots, \omega_s$ drehen; für $s=2$ liegen gewöhnliche Radlinien (Trochoiden, Zykloiden) vor. Setzt

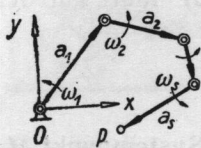


Abb. 5

man etwa $a_s = \zeta$, so stellt (17) nach dem Muster (6) eine gewisse Bewegung dar, deren Polkurven wiederum derartige Radlinien, jedoch von um 1 niedrigerer Stufe sind. Umordnung des Polygonzuges führt auf s verschiedene Erzeugungen derselben Radlinie s -ter Stufe durch Abrollen von Radlinien $(s-1)$ -ter Stufe. Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Euler über die doppelte Erzeugung der Trochoiden durch Kreisrollung;

auch viele andere Eigenschaften der gewöhnlichen Radlinien lassen sich sinngemäss auf die höheren übertragen [12]. Diese mechanisch leicht erzeugbaren Kurven sind besonders deswegen interessant, weil man mit ihrer Hilfe jede vorgelegte geschlossene Linie beliebig genau approximieren kann, wie dies die Alten in der Epizykeltheorie bereits für die Planetenbahnen versucht haben.

Die Bedeutung der eingeführten Pole M_n besteht im Grunde darin, dass sich mit ihrer Hilfe sämtliche Bahnableitungen gemäss (16) linear durch die Ortskoordinate ζ oder z ausdrücken lassen. Für Fragen rein geometrischer Natur empfiehlt es sich, den Drehwinkel φ selbst als Zeitparameter t zu verwenden. Mit der Annahme $\varphi = t$ vereinfacht sich die Gleichung (16) wegen $\epsilon^{(n)} = i^n e^{i\varphi}$ auf

$$(18) \quad z^{(n)} = i^n (z - z_n).$$

Zur Beantwortung aller die Bahnen einer ebenen Bewegung betreffenden differentialgeometrischen Fragen n -ter Ordnung genügt jetzt bereits die Kenntnis der ersten n dieser ausgezeichneten „Normalpole“ $N_n (z = z_n)$ allein („Kardinalpunkte“ bei G. C. Stewart [11]).

Als Beispiel sei eine hübsche, von R. Beis angegebene Konstruktion des Bahnkrümmungsmittelpunktes mitgeteilt, die sich nur auf den Drehpol $M_1 = N_1$ und den „Wendepol“ N_2 stützt: Der zum Systempunkt P gehörige Bahnkrümmungsmittelpunkt P^* wird auf der Bahnnormale $N_1 P$ durch die Polare von N_2 bezüglich des durch N_1 gehenden Kreises um P ausgeschnitten. Man erkennt, dass der „Wendekreis“ (Ort der Systempunkte mit dreipunktig berührender

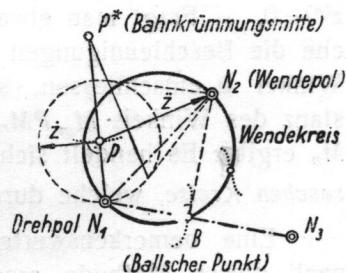


Abb. 6

Bahntangente) den Durchmesser $N_1 N_2$ besitzt. Man kann ferner zeigen, dass sich der von Ableitungen 3. Ordnung abhängende *Ballsche Punkt B* (mit vierpunktig berührender Bahntangente) einfach als Fußpunkt des aus N_2 auf $N_1 N_2$ gefällten Lotes finden lässt usw. — Bereis ist in einer grundlegenden Arbeit bis zu Fragen 6. Ordnung vorgestoßen [1].

Bei solchen Untersuchungen ist es oft nützlich, den Übergang von den kartesischen Koordinaten x, y zur komplexen Darstellung als *lineare Koordinatentransformation*

$$(19) \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

aufzufassen, die zwar imaginär, jedoch regulär ist (Determinante $-2i \neq 0$). Ein Punkt der Ebene erscheint dann durch das neue Koordinatenpaar $z, \bar{z}$ festgelegt, wobei die Rückkehr zu den alten Koordinaten über (19) jederzeit möglich ist. Diese „isotropen“ oder „Minimalkoordinaten“ $z, \bar{z}$ sind prinzipiell als voneinander unabhängig anzusehen; sind sie konjugiert, so legen sie einen reellen Punkt fest, sonst einen imaginären. Man erfasst also auch die imaginären Punkte (mit komplexen kartesischen Koordinaten), was für geometrische Fragen oft wichtig ist. Ein weiterer Vorteil dieser Auffassung besteht aber darin, daß man bei der Darstellung von Linien nicht auf die Parameterform angewiesen ist, sondern sie auch in geschlossener Form durch Gleichungen der Bauart

$$(20) \quad F(z, \bar{z}) = 0$$

beschreiben kann. Geraden werden natürlich wieder durch lineare Gleichungen dargestellt ($az + b\bar{z} + c = 0$), Kreise durch quadratische Gleichungen der Form $z\bar{z} + az + b\bar{z} + c = 0$ usw. — Eine ausführliche Theorie der Koppelkurve in dieser Auffassung hat A. Haarblicher gegeben [3].

Vielleicht genügen die gemachten Andeutungen bereits, um eine gewisse Vorstellung davon zu geben, dass die komplexe Methode nicht bloß eine vereinfachte, auch vom Techniker leicht zu beherrschende Behandlung der ebenen Kinematik gestattet, sondern in der Hand des Forschers auch neue und wichtige Resultate zu Tage zu fördern vermag. Für ein vertieftes Studium soll das nachstehende Literaturverzeichnis Anhalt bieten.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. Berels — Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen. *Österr. Ing. Arch.* 5 (1951), 246—266. — Die Fernpolstellung der ebenen Bewegung. *Österr. Ing. Arch.* 6 (1952), 246—255. — Über die Geraden-Hüllbahnen bei der Bewegung eines starren ebenen Systems. *Österr. Ing. Arch.* 9 (1955), 44—55.
- [2] G. Darboux — Recherches sur un système articulé. *Bull. sci. math. astr.* 14 (1879), 151—192.
- [3] A. Haarbleicher — Application des coordonnées isotropes à l'étude de la courbe des trois barres. *J. éc. pol.* 31 (1933), 13—40.
- [4] E. Hackmüller — Eine analytisch durchgeführte Ableitung der Kreispunkts- und Mittelpunktskurve. *Z. angew. Math. Mech.* 18 (1938), 252—254.
- [5] R. Kreutzinger — Über die Bewegung des Schwerpunkts beim Kurbelgetriebe. *Getriebetechnik* 10 (1942), 397—398.
- [6] C. A. Laisant — Théorie et applications des équipollences. Paris 1887.
- [7] R. Mehmke — Über die Bewegung eines starren Systems in seiner Ebene. *Z. Math. Phys.* 35 (1890), 1—24, 65—81.
- [8] F. Morley — On adjustable cycloidal and trochoidal curves. *Amer. J. Math.* 16 (1894).
- [9] H. R. Müller — Zur Kinematik des Rollgleitens. *Arch. Math.* 4 (1953), 239—246. — Verallgemeinerung der Bressischen Kreise für höhere Beschleunigungen. *Arch. Math.* 4 (1953), 337—342.
- [10] F. Schilling — Über neue kinematische Modelle. *Z. Math. Phys.* 44 (1899), 214—227.
- [11] G. C. Steward — On the cardinal points in plane kinematics. *Phil. Trans. Royal Soc.* 244 (1951), 19—46. — On certain configurations of the cardinal points in plane kinematics. *Acta math.* 88 (1952), 371—383.
- [12] W. Wunderlich — Höhere Radlinien. *Österr. Ing. Arch.* 1 (1947), 277—296. — Höhere Radlinien als Näherungskurven. *Österr. Ing. Arch.* 4 (1950), 3—11.