[redacted]

Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. X, 1959 BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL UND STUTTGART Fasc. 1

Äquidistante Kurvenpaare in normalen Ebenen

Von W. WUNDERLICH in Wien

Äquidistante Kurvenpaare in normalen Ebenen

Von W. Wunderlich in Wien

1. Zwei Kurven k_1, k_2 des dreidimensionalen euklidischen Raumes bilden ein „*äquidistantes Kurvenpaar*", wenn sie eine *gemeinsame Normalenschar* besitzen. Geht man von dieser Normalenmannigfaltigkeit aus, die im allgemeinen aus den Erzeugenden einer Strahlfläche (Regelfläche) besteht, dann ergeben irgend zwei Orthogonaltrajektorien dieser Erzeugendenschar ein äquidistantes Kurvenpaar. Der auf der gemeinsamen Normalen gemessene *Abstand* zwischen den Kurven k_1, k_2 ist an jeden Stelle stationär, also überhaupt *konstant*. Gibt man mithin etwa die Kurve k_1 und den Abstand c vor, so kann für k_2 irgendeine Kurve genommen werden, die auf der zur Mittellinie k_1 gehörigen *Rohrfläche* Γ_1 mit dem Halbmesser c verläuft. Γ_1 kann dabei als die Einhüllende jener ∞^1 Kugeln vom Radius c angesehen werden, die ihre Mittelpunkte auf k_1 haben.

Derartige äquidistante Kurvenpaare hat A. Voss [1] eingehend untersucht. Nach Bereitstellung der einschlägigen differentialgeometrischen Formeln für die begleitenden Dreibeine der durch ihre gemeinsamen Normalen aufeinander bezogenen Teilkurven k_1, k_2 beantwortet er eine ganze Reihe von interessanten Fragen nach speziellen, durch besondere metrische Eigenschaften ausgezeichneten Paaren (Paare aus kongruenten, ähnlichen, ebenen Kurven; Paare, deren Bestandteile durch gleiche oder proportionale Bögen aufeinander bezogen sind; Paare mit fester Schränkung usw.).

Hier sollen solche äquidistante Kurvenpaare betrachtet werden, deren Teilkurven k_1, k_2 sich auf zwei *normale Ebenen* π_1, π_2 verteilen. Gibt man k_1 in π_1 beliebig vor, so findet man die dazu passenden Kurven k_2 in π_2 im Schnitt mit den zu verschiedenen Abstandswerten c gehörigen Rohrflächen Γ_1 um die Mittellinie k_1. Ebenso gehören dann zu jeder dieser ∞^1 Kurven k_2 wieder je ∞^1 Kurven konstanter Entfernung in π_1. Man hat solcherart in π_1 ∞^2 Kurven zu erwarten, und dies träfe auch zu, wenn π_1 und π_2 nicht orthogonal wären; man erhält jedoch auch in π_1 bloß ∞^1 Kurven, wenn die beiden Ebenen voraussetzungsgemäß einen rechten Winkel einschließen. Dieser merkwürdige Sachverhalt soll hier nachgewiesen und näher analysiert werden.

2. Es werde π_1 mit der xy-Ebene und π_2 mit der xz-Ebene eines Normalkoordinatensystems identifiziert. Sei $P_1 t_1$ ein Linienelement von k_1, bestimmt durch den Punkt $P_1(x_1, y)$ und die Tangente $t_1(y' = dy/dx_1)$. Die auf der x-Achse gelegenen Fußpunkte der Ordinate von P_1 bzw. der Elementnormale seien mit X_1 bzw. X_2 bezeichnet (Abb. 1); ihre Abszissen sind x_1 bzw.

$$x_2 = x_1 + yy' . \tag{2.1}$$

Ein zu $P_1 t_1$ passendes Linienelement $P_2 t_2$ von k_2 in π_2 muß nun so geartet sein, daß sein Punkt P_2 in der Normalebene von $P_1 t_1$ liegt und umgekehrt seine eigene Normalebene durch P_1 geht. Das bedeutet aber, daß die Punkte X_1 und X_2 für $P_2 t_2$ ihre Rolle vertauscht haben: X_2 ist Fußpunkt der Ordinate von P_2, X_1 Fußpunkt der Elementnormale. Bezeichnen also x_2 und z die Koordinaten von P_2 und ist $z' = dz/dx_2$ die Richtung von t_2 in π_2, so gilt

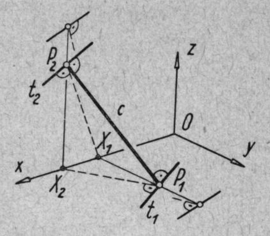

Abb. 1.

(2.2) $$x_1 = x_2 + zz' .$$

Zu jedem Linienelement $P_1 t_1$ in π_1 passen mithin ∞^1 Elemente $P_2 t_2$ in π_2. Den ∞^1 Elementen von k_1 werden auf diese Weise insgesamt ∞^2 Elemente in π_2 zugeordnet, die sich zu ∞^1 Kurven k_2 zusammenfügen, deren jede die Kurve k_1 zu einem äquidistanten Paar ergänzt.

Das Feld der Elemente $P_2 t_2$ ist offensichtlich vollständig durch die auf der x-Achse herrschende Punktverwandtschaft $\mathfrak{N} = X_1 \to X_2$ bestimmt, die die zu k_1 gehörige „*Normalkorrespondenz*" heißen soll. Dieselbe Korrespondenz wird aber nicht bloß von k_1 erzeugt, sondern von insgesamt ∞^1 gleichartigen Kurven, welche in derselben Weise zu $\mathfrak{N}$ gehören, wie die vorhin gefundenen ∞^1 Kurven k_2 zur inversen Korrespondenz $\mathfrak{N}^{-1} = X_2 \to X_1$.

Damit ist ein bemerkenswertes System von ∞^2 äquidistanten Kurvenpaaren festgestellt, das wie folgt gekennzeichnet werden kann: *Zu einer auf der Schnittgeraden zweier normalen Ebenen angenommenen Punktverwandtschaft $\mathfrak{N}$ gehört in jeder der beiden Ebenen eine Kurvenschar, welche $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{N}^{-1}$ als Normalkorrespondenz besitzt; irgend zwei aus verschiedenen Scharen entnommene Kurven bilden ein äquidistantes Paar.*

3. Ist die Korrespondenz $\mathfrak{N}$ durch ihre Gleichung $x_2 = f(x_1)$ gegeben, so findet man die Schar der Kurven k_1 durch Integration von (2.1) in der Gestalt

(3.1) $$y^2 = 2 \int (x_2 - x_1)\, dx_1 + C_1, \quad z = 0 .$$

Analog ergibt sich mittels der Umkehrfunktion $x_1 = \varphi(x_2)$ die k_2-Schar aus (2.2) mit

(3.2) $$z^2 = 2 \int (x_1 - x_2)\, dx_2 + C_2, \quad y = 0 .$$

Interessiert man sich speziell für äquidistante Kurvenpaare aus *kongruenten Bestandteilen*, so kann man für $\mathfrak{N}$ eine solche Korrespondenz heranziehen, die zu ihrer Inversen $\mathfrak{N}^{-1}$ gleich- oder gegensinnig kongruent ist. Im ersten Fall muß die Korrespondenzgleichung $F(x_1, x_2) = 0$ äquivalent sein zu $F(x_2 + p, x_1 + p) = 0$ mit einem bestimmten p. Ihre Diagrammkurve in einem Hilfskoordinatensystem x_1, x_2 muß daher durch Spiegelung an der Achse $x_1 = x_2$ und nachfolgende Schiebung längs dieser Achse um den Betrag $p\sqrt{2}$ in sich übergehen. Für $p \neq 0$ kann man demnach mittels einer geeigneten periodischen Funktion q ansetzen

(3.3) $$x_2 - x_1 = q(x_1 + x_2), \quad \text{wobei } q(\xi + 2p) = -q(\xi) .$$

Für $p = 0$ ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^{-1}$ eine involutorische Zuordnung und $F(x_1, x_2)$ ist als in x_1 und x_2 symmetrische Funktion anzunehmen, erhältlich etwa in der Form $G(x_1 + x_2, x_1 x_2) = 0$ (vgl. Abb. 3). — Im zweiten Fall genügt es, Äquivalenz von $F(x_1, x_2) = 0$ und $F(-x_2, -x_1) = 0$ vorauszusetzen; die Diagrammkurve ist dann symmetrisch zur Achse $x_1 + x_2 = 0$ und kann etwa durch $G(x_1 - x_2, x_1 x_2) = 0$ angesetzt werden (vgl. Abb. 3).

4. Ist eine der Kurven k_1 etwa durch

$$y = g(x_1), \quad z = 0 \tag{4.1}$$

gegeben, so erhält man die übrigen Kurven der ersten Schar zufolge (3.1) durch

$$y^2 = g^2(x_1) + C_1, \quad z = 0\,. \tag{4.2}$$

Diese Kurvenschar gestattet folgende anschauliche Deutung: Läßt man die in π_1 gegebene Kurve k_1 um die x-Achse rotieren, so erzeugt sie eine *Drehfläche* $y^2 + z^2 = g^2(x)$, deren Schnitte mit den Ebenen $z = \text{const}$ im Normalriß auf die Ebene π_1 die Scharkurven für $C_1 \leqq 0$ liefern. Um die zu $C_1 > 0$ gehörigen Kurven zu erhalten, verlege man die gegebene Kurve k_1 in eine parallele Ebene $z = h$ und lasse sie anschließend um die x-Achse rotieren: Sie erzeugt dabei eine Drehfläche $y^2 + z^2 = g^2(x) + h^2$, deren in π_1 liegender Meridian die Scharkurve zu $C_1 = h^2$ darstellt.

Auch die *zweite Schar* läßt sich — entweder durch Auswertung von (3.2) oder auf Grund der Distanzformel $(x_1 - x_2)^2 + y^2 + z^2 = c^2$ — integrallos hinschreiben, wobei x_1 als Hilfsparameter dient:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + g(x_1)\, g'(x_1), \quad y = 0, \\ z^2 &= C_2 - g^2(x_1) - g^2(x_1)\, g'^2(x_1)\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Konstruktiv kann man diese Kurven mit Hilfe der in Abschnitt 1 erwähnten *Rohrflächen* um die Mittellinie k_1 ermitteln, die mit der Ebene π_2 zu schneiden sind.

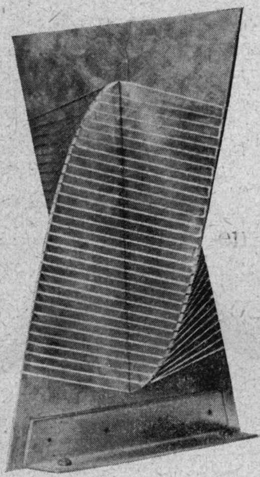

Abb. 2: Äquidistantes Kurvenpaar aus zwei kongruenten Parabeln.

5. Nunmehr sollen einige einfache *Beispiele* zur Illustration der in Abschnitt 3 vertretenen Auffassung (Vorgabe der Normalkorrespondenz $\mathfrak{N}$) angeführt werden.

Wählt man als Korrespondenz $\mathfrak{N}$ eine *Schiebung* (gleichsinnige Kongruenz)

$$x_2 = x_1 + a \quad (a \neq 0)\,, \tag{5.1}$$

dann bestehen die Kurvenpaare aus *kongruenten Parabeln*[1])

$$y^2 = 2ax_1 + C_1, \quad z^2 = -2ax_2 + C_2\,, \tag{5.2}$$

deren Abstand c durch $c^2 = C_1 + C_2 - a^2$ bestimmt ist; er fällt demnach nur dann reell aus, falls $C_1 + C_2 \geqq a^2$. Zum Grenzfall $C_1 + C_2 = a^2$ gehört ein Paar von *Fokal-*

[1]) Ein Gespräch mit HERMANN SCHMIDT über ein von ihm konstruiertes Fadenmodell, das ein solches Parabelpaar samt der von den gemeinsamen Normalen gebildeten Strahlfläche 6. Ordnung darstellt und in der Sammlung des Mathematischen Instituts der Universität Würzburg zu sehen ist (Abb. 2), gab im Sommer 1957 den Anstoß zu der vorliegenden Untersuchung.

parabeln, dessen gemeinsames Normalensystem aus Minimalstrahlen besteht, was den verschwindenden Abstand $c = 0$ erklärt.

Ist die Korrespondenz $\mathfrak{N}$ eine *Streckung* (Ähnlichkeit)

$$x_2 = \lambda x_1 \quad (\lambda \neq 0, 1)\,, \tag{5.3}$$

so erhält man äquidistante Kurvenpaare aus *konzentrischen Mittelpunktskegelschnitten*

$$y^2 = (\lambda - 1)\, x_1^2 + C_1, \quad z^2 = (\lambda^{-1} - 1)\, x_2^2 + C_2 \tag{5.4}$$

mit reziproken numerischen Exzentrizitäten $\varepsilon_1 = \sqrt{\lambda}$, $\varepsilon_2 = \sqrt{1/\lambda}$; der Abstand c ist durch $c^2 = C_1 + C_2$ festgelegt. Für $\lambda > 0$ besteht die eine Kurvenschar aus ähnlichen Ellipsen, die andere aus Hyperbeln mit gemeinsamem Asymptotenpaar, das selbst auch dazuzählt. Für $\lambda < 0$ bestehen beide Kurvenscharen aus Ellipsen, die von den Ebenen π_1 und π_2 aus einer gemeinsamen Schar koachsialer Drehzylinder ausgeschnitten werden; für $\lambda = -1$ fallen die beiden Ellipsenscharen übrigens kongruent aus (vgl. Abschnitt 3). — Das vorliegende Kegelschnittsystem geht aus einem Paar von *Fokalkegelschnitten* hervor ($c = 0$), das man allen möglichen Streckungen vom Zentrum aus unterwirft (wobei auch imaginäre und uneigentliche Ähnlichkeitsfaktoren in Betracht zu ziehen sind). Nimmt man dabei auch noch den dritten Fokalkegelschnitt hinzu, so gelangt man zu einem *dreifachen System* von Kurven k_1, k_2, k_3 in drei paarweise normalen Ebenen π_1, π_2, π_3 mit der Eigenschaft, daß irgend zwei Kurven aus verschiedenen Scharen ein äquidistantes Paar bilden. Man sieht leicht ein, daß dies das einzige Tripelsystem dieser Art ist, denn nimmt man ein einziges Linienelement $P_1 t_1$ in π_1 an, so gibt es hierzu gemäß Abb. 1 ∞^1 passende Elemente $P_2 t_2$ in π_2 und diese rufen auf der z-Achse als Normalkorrespondenz eine Streckung hervor, was zwangsläufig auf die obigen Kegelschnittscharen führt.

Wird schließlich $\mathfrak{N}$ als allgemeine *Projektivität*

$$(x_1 - b)\,(x_2 + b) = a^2 \quad (a^2 \gtrless 0) \tag{5.5}$$

vorausgesetzt, so erhält man gemäß Abschnitt 3 wegen $F(x_1, x_2) = F(-x_2, -x_1)$ zwei *kongruente Scharen* aus transzendenten Kurven

$$\begin{aligned} y^2 &= a^2 \lg (x_1 - b)^2 - (x_1 + b)^2 + C_1\,, \\ z^2 &= a^2 \lg (x_2 + b)^2 - (x_2 - b)^2 + C_2\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Der Abstand c eines Kurvenpaares bestimmt sich aus $c^2 = C_1 + C_2 - 2a^2 + a^2 \lg a^4 - 4b^2$. Abb. 3 und 4 illustrieren zwei typische Annahmen.

6. Zur Erläuterung der in Abschnitt 4 beschriebenen Erzeugung von äquidistanten Kurvenpaaren aus einer Einzelkurve k_1 wählen wir für dieselbe einen *Kreis*

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2, \quad z = 0\,. \tag{6.1}$$

Die erste Kurvenschar besteht aus sogenannten *Spirischen Linien*, das sind bizirkulare Kurven 4. Ordnung, die man als Schnitte des durch Rotation von k_1 um die x-Achse erzeugten *Torus*

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + b^2)^2 = 4b^2\,(y^2 + z^2) \tag{6.2}$$

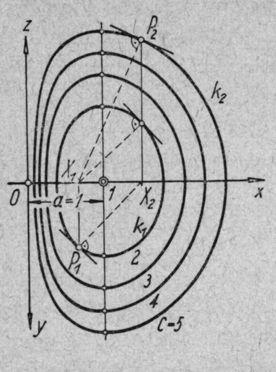

Abb. 3: Äquidistante Kurvenpaare mit hyperbolischer Involution als Normalkorrespondenz ($a^2 = 1$, $b = 0$).

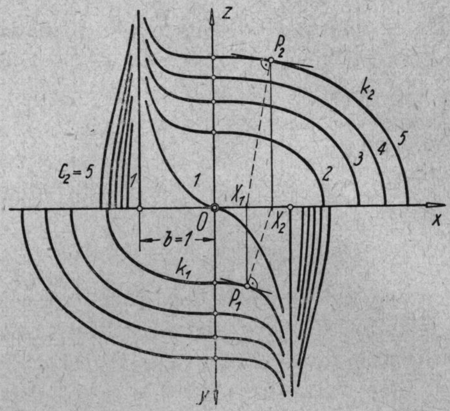

Abb. 4: Äquidistante Kurvenpaare mit parabolischer Projektivität als Normalkorrespondenz ($a^2 = -1$, $b = 1$).

mit den Ebenen $z = \text{const}$ erhalten kann, bzw. als Meridiane jener *Drehzykliden*, die bei Rotation von k_1 um eine Achse $y = 0$, $z = \text{const}$ entstehen.

Die zweite Schar besteht gleichfalls aus *Spirischen Linien*, nämlich jenen, die von der xz-Ebene aus den Torusflächen (Rohrflächen) ausgeschnitten werden, die k_1 zum Mittenkreis haben. Sie werden dargestellt durch

$$(x^2 + z^2 + a^2 + b^2 - n^2)^2 = 4a^2\,(x^2 + b^2)\,. \tag{6.3}$$

Stellt man anschließend die Frage, ob sich in den beiden ziemlich gleichartigen Scharen *kongruente Individuen* finden, so lehrt ein Vergleich von (6.3) mit (6.2), worin etwa $z = m$ zu setzen ist, daß dies nur für $a^2 = b^2 = m^2 = n^2$ eintritt. Man gelangt damit zu einem äquidistanten Kurvenpaar aus den kongruenten, durch Flachpunkte ausgezeichneten Ovalen

$$\begin{aligned}&(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 - y^2) = 3a^4, \quad z = 0 \quad \text{und}\\ &(z^2 + x^2)^2 + 2a^2(z^2 - x^2) = 3a^4, \quad y = 0\,.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Es erweist sich allerdings, daß diese beiden Kurven *verschwindenden Abstand* haben. Die gemeinsamen Normalen sind mithin isotrop und bilden eine an sich bemerkenswerte *Minimaltorse* 16. Ordnung, für welche die beiden Kurven (6.4) zusammen mit der analogen Kurve

$$(y^2 + z^2)^2 + 2a^2(y^2 - z^2) = 3a^4, \quad x = 0 \tag{6.5}$$

drei kongruente, reelle Doppelkurven (Selbstschnitte) abgeben.

7. Als „*Schränkung*" sei bei einem äquidistanten Kurvenpaar jener — im allgemeinen veränderliche — Winkel ω bezeichnet, den die Richtungen zusammengehöriger Tangenten t_1, t_2 miteinander bilden. Auf Grund des in Abschnitt 2 getroffenen Ansatzes sind diese Tangentenrichtungen durch $dx_1 : dy : 0$ und $dx_2 : 0 : dz$ gekennzeichnet, so daß sich die Schränkung nach der folgenden Formel berechnet:

$$\cos\omega = \frac{dx_1 \cdot dx_2}{\sqrt{dx_1^2 + dy^2} \cdot \sqrt{dx_2^2 + dz^2}}\,. \tag{7.1}$$

Abschließend sollen nun die auf normale Ebenen verteilten *äquidistanten Kurvenpaare konstanter Schränkung* ermittelt werden. Sie sind zufolge (2.1), (2.2) und (7.1) bestimmt durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y\,dy &= (x_2 - x_1)\,dx_1\,, \\ z\,dz &= (x_1 - x_2)\,dx_2\,, \\ dx_1^2 dx_2^2 &= (dx_1^2 + dy^2)\,(dx_2^2 + dz^2)\cos^2\omega\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Addition der beiden ersten Gleichungen liefert zunächst das Zwischenintegral

$$(x_2 - x_1)^2 + y^2 + z^2 = c^2\,, \tag{7.3}$$

welches die verlangte Abstandsrelation darstellt. Mit seiner Hilfe können wir aus der dritten Gleichung die Variable z eliminieren, wobei zur Abkürzung

$$x_2 - x_1 = \xi \tag{7.4}$$

gesetzt sei. Mittels

$$dz = \frac{-\xi\,dx_2}{\sqrt{c^2 - \xi^2 - y^2}} \tag{7.5}$$

gelangt man vorerst zu

$$dx_1^2 \cdot dx_2^2 = (dx_1^2 + dy^2)\,\frac{(c^2 - y^2)\,dx_2^2}{c^2 - \xi^2 - y^2}\cos^2\omega\,. \tag{7.6}$$

Kürzung durch $dx_2^2 (\neq 0)$ und Übergang zur Ableitung nach x_1 unter Beachtung von $\xi = y y'$ führt dann über

$$c^2 - y^2 - y^2 y'^2 = (1 + y'^2)\,(c^2 - y^2)\cos^2\omega \tag{7.7}$$

auf die Endgleichung

$$y'^2 = \frac{c^2 - y^2}{a^2 + y^2} \quad \text{mit} \quad a = c \cdot \operatorname{ctg}\omega\,, \tag{7.8}$$

deren Lösung durch das elliptische Integral II. Gattung

$$x_1 = \int \sqrt{\frac{a^2 + y^2}{c^2 - y^2}}\,dy + C_1 \tag{7.9}$$

gegeben ist. Analog gilt

$$x_2 = \int \sqrt{\frac{a^2 + z^2}{c^2 - z^2}}\,dz + C_2\,. \tag{7.10}$$

Die fraglichen Paare bestehen mithin aus *kongruenten Kurven*, die im übrigen als *Meridiane von Drehflächen konstanter positiver Krümmung* wohlbekannt sind[2]). Die beiden Bestandteile sind, wie aus Abb. 5 zu ersehen ist, um eine Viertelperiode gegeneinander versetzt; dies geht aus der auf (7.3) beruhenden Beziehung

$$(y^2 + a^2)\,(z^2 + a^2) = a^2\,(a^2 + c^2) \tag{7.11}$$

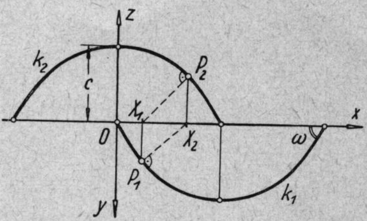

Abb.5 : Äquidistantes Kurvenpaar konstanter Schränkung ($\omega = 60°$).

[2]) Die Drehflächen gehören zum sogenannten Spindeltypus; ihre Krümmung hat den Betrag $K = 1/(a^2 + c^2)$.

hervor, die beispielsweise besagt, daß die Werte $y = 0$ und $z = \pm c$ zusammengehören. — Im Grenzfall $a = 0$ ($\omega = \pi/2$) besteht das äquidistante Kurvenpaar aus zwei verketteten Kreisreihen.

Das Auftreten der Meridiankurven von Drehflächen konstanter positiver Krümmung ist hier insofern interessant, als diese auch bei einer von A. Voss [1] behandelten Frage auftauchten, die das Gegenstück zur vorliegenden bildet: Hier wurden die äquidistanten Kurvenpaare konstanter Schränkung in normalen Ebenen behandelt, während Voss die äquidistanten Kurvenpaare normaler Schränkung in geneigten Ebenen bestimmt hat[3]). Angesichts dieser Feststellung liegt die Vermutung nahe, daß allgemein die äquidistanten Kurvenpaare fester Schränkung aus ebenen Bestandteilen durch gewisse Meridiane von Drehflächen konstanter Krümmung gebildet werden. Dies bestätigt sich tatsächlich, doch soll hierauf, um den gesteckten Rahmen nicht zu überschreiten, gelegentlich an anderer Stelle eingegangen werden [2].

Literaturverzeichnis

[1] A. Voss, Über Kurvenpaare im Raume. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1909**, 1—106 (1909).

[2] W. WUNDERLICH, Äquidistante Paare ebener Kurven mit konstanter Schränkung. Monatsh. Math. (im Druck).

Eingegangen am 1. 4. 1958

3) Dort ergeben sich Meridiankurven der Drehflächen konstanter positiver Krümmung vom Wulsttypus.