Nicht im Handel!

Sonderabdruck aus 63. Band, 1959, 3. Heft der

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

Herausgegeben von E. Hlawka und N. Hofreiter

Springer-Verlag in Wien

Äquidistante Paare ebener Kurven mit konstanter Schränkung

Von

W. Wunderlich, Wien

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 7. Oktober 1958)

1. Unter einem „*äquidistanten Kurvenpaar*" wird ein Kurvenpaar des dreidimensionalen euklidischen Raumes verstanden, welches ein gemeinsames Normalensystem besitzt. Solche Kurvenpaare, wie sie von irgend zwei Orthogonaltrajektorien der Erzeugendenschar einer beliebigen Strahlfläche gebildet werden, sind seinerzeit ausführlich von *A. Voss* untersucht worden[1]. Die Entfernung entsprechender Punkte der beiden Kurven ist, wie man leicht einsieht, konstant. Gibt man daher eine der beiden Kurven und die Entfernung c willkürlich vor, dann kann für die zweite irgendeine Linie genommen werden, die auf der im Abstand c um die erste Kurve gelegten Rohrfläche verläuft, von den charakteristischen Kreisen derselben abgesehen.

Über eigenartige Beziehungen bei äquidistanten Kurvenpaaren, deren beide Bestandteile in zwei zueinander *normalen Ebenen* liegen, hat der Verfasser kürzlich berichtet[2]. Hierbei wurde der Begriff der „*Schränkung*" eingeführt, das ist der — im allgemeinen veränderliche — Winkel ω entsprechender Tangenten. Insbesondere wurden die auf zwei normale Ebenen verteilten äquidistanten Kurvenpaare *konstanter Schränkung* bestimmt, während *Voss* die auf zwei *beliebige Ebenen* verteilten äquidistanten Kurvenpaare mit *normaler Schränkung* ermittelt hatte. In beiden Fällen ergaben sich für die Teilkurven *Meridiane von Drehflächen konstanter positiver Krümmung*.

---

[1] *A. Voss*: Über Kurvenpaare im Raume. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1909, Nr. 19, 1—106.

[2] *W. Wunderlich*: Äquidistante Kurvenpaare in normalen Ebenen. Archiv d. Math. (im Druck).

Die vorliegende Note erbringt nun den Nachweis, daß die genannten Kurven ganz allgemein als Bestandteile jener *äquidistanten Kurvenpaare konstanter Schränkung* auftreten, die sich auf zwei *Ebenen beliebiger Neigung* verteilen. Damit ergibt sich im übrigen eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der *Villarceau*schen Loxodromenkreise des Torus.

2. In den beiden Kurvenebenen, die den Winkel $\alpha \leqq \pi/2$ miteinander einschließen mögen, seien kartesische Koordinatensysteme x, y bzw. u, v mit einer gemeinsamen Achse für x und u eingeführt (Abb. 1). Zusammengehörige Punkte des Kurvenpaares können dann in dem erweiterten Raumkoordinatensystem x, y, z durch $P_1(x,\ y,\ 0)$ und $P_2(u,\ v\cos\alpha,\ v\sin\alpha)$ angesetzt werden. Die zusammengehörigen Fortschreitrichtungen sind sodann gekennzeichnet durch die Tangentenvektoren

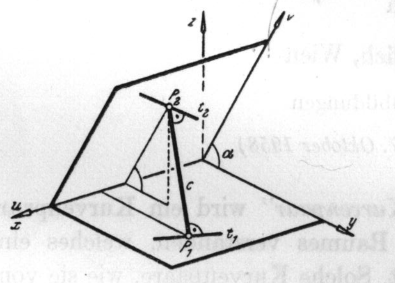

Abb. 1

$\mathfrak{t}_1(dx : dy : 0)$ und $\mathfrak{t}_2(du : dv\cos\alpha : dv\sin\alpha)$.

Die beiden *Orthogonalitätsbedingungen* $P_1P_2 \perp \mathfrak{t}_i$ finden darnach ihren Ausdruck durch

$$\begin{aligned}(x-u)\,dx + (y - v\cos\alpha)\,dy &= 0,\\ (x-u)\,du + (y - v\cos\alpha)\,dv\cos\alpha - v\sin\alpha\,.\,dv\sin\alpha &= 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Integration der Differenz liefert die behauptete *Abstandskonstanz*

$$(x-u)^2 + (y - v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha)^2 = c^2. \tag{2}$$

Die *Schränkung* $\omega = \sphericalangle\, \mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2$ berechnet sich schließlich aus

$$\cos\omega = \frac{dx\,du + dy\,dv\cos\alpha}{\sqrt{dx^2+dy^2}\,\sqrt{du^2+dv^2}}. \tag{3}$$

Die gesuchten *äquidistanten Paare ebener Kurven mit fester Schränkung* sind mithin durch die Gleichungen (1), (2) und (3) unter der Voraussetzung $\alpha, c, \omega = \text{const}$ bestimmt, wobei eine der Gleichungen (1) entbehrlich ist. Das Gleichungssystem sieht nicht sehr einladend aus, läßt sich aber trotzdem weitgehend auflösen.

3. Schreibt man abkürzend für $x - u = \xi$ und $v - y\cos\alpha = \eta$, so lauten die Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned}\xi\,dx &= (\eta\cos\alpha - y\sin^2\alpha)\,dy,\\ \xi\,du &= \eta\,dv,\\ \xi^2+\eta^2 &= c^2 - y^2\sin^2\alpha.\end{aligned} \tag{4}$$

Löst man die erste und dritte Gleichung nach ξ und η auf, wobei $dx/dy = x'$ gesetzt wird, so erhält man

$$\begin{aligned}\xi &\mp \frac{-x'\,y\sin^2\alpha \pm \cos\alpha\sqrt{c^2(x'^2+\cos^2\alpha) - y^2\sin^2\sigma(x'^2+1)}}{x'^2+\cos^2\alpha},\\ \eta &= \frac{y\sin^2\alpha\cos\alpha \pm x'\sqrt{c^2(x'^2+\cos^2\alpha) - y^2\sin^2\alpha(x'^2+1)}}{x'^2+\cos^2\alpha}.\end{aligned} \tag{5}$$

Auf Grund der zweiten Gleichung (4) nimmt die Bedingung (3) folgende Gestalt an:

$$\sqrt{x'^2+1}\,.\,\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,.\,\cos\omega = \eta\,x' + \xi\cos\alpha. \tag{6}$$

Geht man hier mit den Werten von ξ und η gemäß (5) ein, so gelangt man zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\sqrt{x'^2+1}\,.\,\sqrt{c^2-y^2\sin^2\alpha}\,.\cos\omega = \pm\sqrt{c^2(x'^2+\cos^2\alpha) - y^2\sin^2\alpha(x'^2+1)},$$

die sich auf die Gestalt

$$x'^2(c^2 - y^2\sin^2\alpha)\sin^2\omega = y^2\sin^2\alpha\sin^2\omega + c^2(\sin^2\alpha - \sin^2\omega) \tag{7}$$

bringen läßt. Aus dieser gewinnt man dann schließlich nach Trennung der Variablen die Lösung

$$x = \int\sqrt{\frac{y^2+a^2}{b^2-y^2}}\,.\,dy \text{ mit } \begin{aligned}a^2 &= c^2(\csc^2\omega - \csc^2\alpha),\\ b^2 &= c^2\csc^2\omega.\end{aligned} \tag{8}$$

Da das aufzulösende Gleichungssystem (1), (2), (3) den gleichzeitigen Tausch von x mit u und y mit v verträgt, folgt analog:

$$u = \int\sqrt{\frac{v^2+a^2}{b^2-v^2}}\,dv. \tag{9}$$

4. Wie schon der Fragestellung nach zu erwarten war, besteht mithin das gesuchte äquidistante Kurvenpaar aus zwei *kongruenten Bestandteilen* k_1 und k_2. Diese durch (8) und (9) dargestellten Kurven sind im übrigen als *Meridiane von Drehflächen konstanter positiver Krümmung* wohlbekannt[3]. Der größte Parallelkreis hat dabei den Radius b, die

[3] *G. Darboux*: Leçons sur la théorie générale des surfaces, I (Paris 1887), 79. *G. Scheffers*: Einführung in die Theorie der Kurven (Leipzig 1908), 293. *K. Strubecker*: Differentialgeometrie III (Sammlg. Göschen 1180/1180a, Berlin, 1958), 141.

Flächenkrümmung den Wert $K = 1/(a^2 + b^2) = c^{-2} \sin^2 \omega$.

Bei den genannten Flächen und somit auch bei den vorliegenden Kurvenpaaren sind *drei Typen* zu unterscheiden (die Winkel α und ω können dabei auf den ersten Quadranten beschränkt bleiben):

I. $\omega < \alpha$ ($a^2 > 0$, Abb. 2). Die Kurven haben das Aussehen von Wellenlinien und entstehen, wie *G. Scheffers* gezeigt hat, als Randkurven

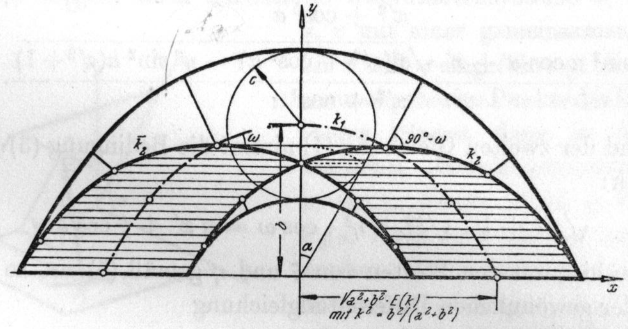

Abb. 2. Annahme: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ ($\alpha = 30^0$, $\omega = 26{,}6^0$)

bei der Abwicklung eines schiefen Kreiszylinders[4]. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind vom „Spindeltypus".

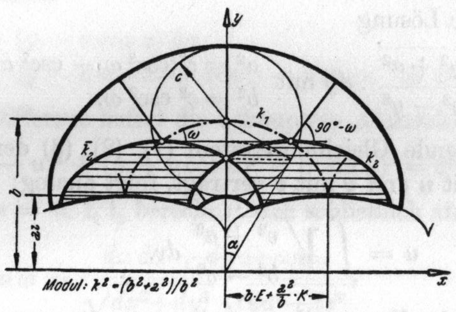

Abb. 3. Annahme: $a = i$, $b = 2$, $c = 1$ ($\alpha = 30^0$, $\omega = 35{,}2^0$).

II. $\omega > \alpha$ ($a^2 < 0$, Abb. 3). Die Kurven haben das Aussehen von gemeinen Zykloiden und können, wie der Verfasser bemerkt hat, durch Aufbiegen eines Kreissegmentes erzeugt werden, wenn Sehne und Bogen

[4] *G. Scheffers*: Zusammenhang zwischen der Abwicklung eines Kreiszylinders und den Rotationsflächen konstanter Krümmung. Archiv Math. Phys., III. Reihe, **6** (1903), 249–250.

dabei eben bleiben[5]. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind vom „Wulsttypus".

III. $\omega = \alpha$ (a=0). In diesem Grenzfall ergeben sich *Kreise* vom Radius b. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind Kugeln.

Mit Rücksicht auf eine eingangs gemachte Bemerkung, derzufolge k_2 auf jener *Rohrfläche* verläuft, die im Abstand c um die Mittellinie k_1 gelegt werden kann, und wegen $\sin \alpha = c/b$, gilt folgender

Satz: *Schneidet man eine Rohrfläche Φ, die einen Meridian k_1 einer Drehfläche konstanter positiver Krümmung zur Mittellinie hat, mit einer die Drehflächenachse enthaltenden Tangentialebene, so erhält man zwei zu k_1 kongruente Schnittkurven k_2 und $\bar{k}_2$, die mit k_1 je ein äquidistantes Kurvenpaar bilden und die Schar der charakteristischen Kreise von Φ unter konstantem Winkel durchsetzen.*

Hierin ist eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der *Villarceau*schen *Loxodromenkreise des Torus* zu erblicken, auf die man im Grenzfall III stößt.

5. Um die *Phasenverschiebung* der kongruenten Bestandteile k_1 und k_2 festzustellen, eliminieren wir ξ aus den ersten beiden Gleichungen (4), schreiben statt η wiederum $v - y \cos \alpha$ und drücken schließlich dx/dy und du/dv gemäß (8) bzw. (9) durch y bzw. v aus. Auf diese Weise gelangen wir zu einer (algebraischen) Beziehung zwischen y und v, die sich nach einigen Umformungen und Kürzung durch $y^2 - v^2$ auf folgende Form bringen läßt:

$$c^2 v^2 y^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\, b^2 (v^2 + y^2) - 2(a^2 + b^2)\, b \sqrt{b^2 - c^2} \,.\, vy - a^2 b^2 c^2 = 0 \quad (10)$$

oder

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \omega \,.\, v^2 y^2 + c^2 \cos^2 \omega \,.\, (v^2 + y^2) - 2\, c^2 \cos \alpha \,.\, vy - c^4 \left(1 - \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \alpha}\right) = 0 \quad (11)$$

Insbesondere gehören, wie auch in Abb. 2 und 3 erkennbar, zu $v = 0$ die Werte $y = \pm\, a \operatorname{tg} \omega$ und zu $v = b$ der Wert $y = c \operatorname{ctg} \alpha$.

6. Die von den gemeinsamen Normalen eines der hier betrachteten Kurvenpaare gebildete *Strahlfläche Σ* ist im allgemeinen, d. h. für $a \neq 0$, *transzendent*, da sie von den beiden Kurvenebenen nach den

[5] *W. Wunderlich*: Aufgabe 300 (mit Auflösung). Elemente d. Math. **13** (1958), 113–114.

transzendenten Kurven k_1, k_2 geschnitten wird. Die algebraische Beziehung (10) hat jedoch eine algebraische Eigenschaft von Σ zur Folge, nämlich die Existenz eines *algebraischen Berührungszylinders* Ψ mit x-parallelen Erzeugenden. Die durch eine Erzeugende von Σ gehende x-parallele Ebene schneidet ja auf der y-Achse und der v-Achse Stücke ab, die durch die (2,2)-Korrespondenz (10) miteinander verknüpft sind; der Zylinder Ψ ist mithin von *4. Klasse.*

Führt man in dem schiefwinkligen x, y, v-System vermöge $\lambda x + \mu y + \nu z = 1$ inhomogene Ebenenkoordinaten λ, μ, ν ein, so erhält man die Gleichung des Zylinders Ψ einfach dadurch, daß man in (10) y durch μ^{-1} und v durch ν^{-1} ersetzt; sie lautet demnach

$$a^2b^2c^2\mu^2\nu^2+2(a^2+b^2)\,b\sqrt{b^2-c^2}\cdot\mu\nu-(a^2+b^2-c^2)\,b^2(\mu^2+\nu^2)-c^2=0. \quad (12)$$

Man bestätigt damit im Falle $a \neq 0$ die angegebene Zylinderklasse 4 und erkennt leicht, wenn man μ bzw. ν über alle Schranken wachsen läßt, daß die Ebenen von k_1 und k_2 den Zylinder doppelt berühren. Da keine weitere Doppeltangentialebene vorhanden ist, liefert die Plücker-Formel die *Ordnung 8.*

In dem durch $a = 0$ gekennzeichneten Grenzfall III reduziert sich der Grad von (12) und damit die Klasse von Ψ auf 2. Nähere Untersuchung ergibt, daß Ψ ein *gleichseitig-hyperbolischer Zylinder* wird. Die Strahlfläche Σ, die hier algebraisch und vom 4. Grade ist (VII. Art nach *Sturm*), wurde seinerzeit von *J. Krames* als „Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises" eingehend studiert[6].

[6] *J. Krames*: Die Striktionslinie der Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **128** (1919), 1—12. *E. Müller*-*J. Krames*: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Wien 1931), 283.

Printed in Austria