

## Über Gleitkurvenpaare aus Radlinien

Von WALTER WUNDERLICH in Wien

(Eingegangen am 7. 3. 1959)

1. Eine wohlbekannte Eigenschaft der STEINERSchen dreispitzigen Hypozykloide besagt, daß die in ihrem Inneren liegenden Tangentenstrecken sämtlich dieselbe Länge haben. Mit anderen Worten bedeutet das, daß sich eine starre Strecke  $k_1$  in einer solchen Zyklode  $k_2$  unter ständiger Berührung stetig umwenden läßt, wobei die Enden von  $k_1$  auf  $k_2$  gleiten. Die Polkurven dieser Bewegung sind zwei Kreise  $c_1, c_2$  mit dem Halbmesserverhältnis 2 : 3 (die „Umkreise“ von  $k_1$  und  $k_2$ ); während der Bewegung rollt  $c_1$  ohne zu gleiten auf der Innenseite von  $c_2$  ab.

Eine erste Verallgemeinerung dieser Tatsache wurde von F. MORLEY angegeben<sup>1)</sup>: Er bemerkte, daß sich eine  $m$ -spitzige Hypozykloide  $k_1$  in einer  $(m + 1)$ -spitzigen Hypozykloide  $k_2$  unter ständiger Berührung stetig umwenden läßt, wobei die Spitzen von  $k_1$  auf  $k_2$  gleiten. Auch hier sind die Polkurven die Umkreise  $c_1, c_2$  von  $k_1$  bzw.  $k_2$ ; das Halbmesserverhältnis beträgt  $m : (m + 1)$ . Der obige Ausgangsfall ordnet sich mit  $m = 2$  ein.

Der Techniker wird hierin nicht viel mehr als einen Sonderfall der sogenannten *Zykloidenverzahnung* von DE LA HIRE (1694) sehen, die am einfachsten mittels des klassischen *Prinzips von CAMUS* hergeleitet wird<sup>2)</sup>. Dieses Verzahnungsprinzip lautet folgendermaßen: „Sind  $c, c_1, c_2$  drei Kurven mit einem gemeinsamen Berührungspunkt  $Z_0$  und läßt man  $c$  einmal auf  $c_1$ , ein andermal auf  $c_2$  abrollen, so beschreibt ein mitgenommener Punkt  $P$  zwei Rollkurven  $k_1, k_2$ , die zusammenpassende Zahnprofile für das Wälzkurvenpaar  $c_1, c_2$  abgeben; denkt man sich nämlich  $k_1$  mit  $c_1$  und  $k_2$  mit  $c_2$  starr verbunden, so bleiben  $k_1$  und  $k_2$  in ständiger Berührung, wenn  $c_1$  auf  $c_2$  rollt.“ — Wählt man für  $c, c_1$  und  $c_2$  Kreise und die Anfangslage von  $P$  in  $Z_0$ , so gelangt man zur erwähnten Zykloidenverzahnung. Haben die genannten Kreise insbesondere die Radien  $r = 1, r_1 = m$  (ganz),  $r_2 = m + 1$ , dann erhält man das MORLEYSche Zykloidenpaar.

<sup>1)</sup> F. MORLEY, On adjustable cycloidal and trochoidal curves. Amer. J. Math. 16, 188–204 (1894).

<sup>2)</sup> CH. E. L. CAMUS, Sur la figure des dents des roues etc. Mém. Acad. 1733, 117. — Siehe etwa L. BURMESTER, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 178; oder F. HOHENBERG, Konstruktive Geometrie für Techniker, Wien 1956, S. 242–246.

2. Eine zweite, weitaus merkwürdigere Verallgemeinerung fand M. FRÉCHET bei der Betrachtung der WALLACE-Geraden eines Dreiecks, die bekanntlich eine STEINER-Zykloide einhüllen<sup>3)</sup>. Er entdeckte, daß sich auch eine Ellipse  $k_1$  in einer dreispitzigen Hypozykloide  $k_2$  stetig umwenden läßt, dieselbe ständig an drei Stellen berührend (vgl. Abb. 2). Auch bei dieser Bewegung von  $k_1$  in  $k_2$  treten als Polkurven zwei Kreise  $c_1, c_2$  mit dem Halbmesserverhältnis 2 : 3 auf, es liegt jedoch keinerlei Anwendung des Prinzips von CAMUS vor, wie schon daraus hervorgeht, daß wohl der ganze Ellipsenumfang, hingegen nur gewisse Teilbögen der Zykloide in reeller Weise zur Berührung kommen.

Daß dieser Sachverhalt — der die Umwendung einer Strecke in der STEINER-Zykloide als Grenzfall umfaßt — tieferliegende Wurzeln hat, wird aus der nachstehenden dritten Verallgemeinerung hervorgehen, die die FRÉCHETSche als Einzelfall enthält. Einen Ansatzpunkt für die weiter-

gehende Verallgemeinerung bietet die Tatsache, daß sich die Ellipse  $k_1$  als Hypotrochoide auffassen läßt; es liegt somit der Versuch nahe,  $k_1$  allgemein als Trochoide anzunehmen.

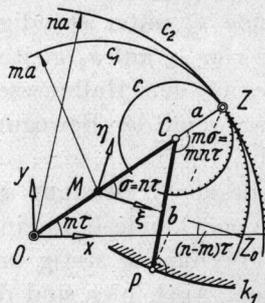


Abb. 1.

3. Sei also  $k_1$  eine Radlinie, die als Bahn eines Punktes  $P$  beim Rollen eines Kreises  $c$  vom Radius  $r = a$  in einem Kreis  $c_1$  vom Radius  $r_1 = m a$  entsteht (Abb. 1). In einer GAUSSSchen Zahlenebene, die zur Darstellung der komplexen Zahlen  $\zeta = \xi + i \eta$  dient und deren Abszissenachse durch einen Hauptscheitel von  $k_1$  geht, kann diese Radlinie dann mittels eines reellen Winkelparameters  $\sigma$  beschrieben werden durch

(1) 
$$\zeta = (m - 1) a e^{i \sigma} + b e^{(1-m) i \sigma};$$

$a, b$  und  $m$  sind dabei reelle Konstante.

Nun lassen wir den Kreis  $c_1$  unter Mitnahme der Kurve  $k_1$  in einem festen Kreis  $c_2$  vom Radius  $r_2 = n a$  abrollen. Diese Bewegung wird in einer festen Zahlenebene für die komplexen Zahlen  $z = x + i y$ , deren Abszissenachse mit der Anfangslage der  $\xi$ -Achse zusammenfällt (vgl. Abb. 1), mittels eines reellen Winkelparameters  $\tau$  beschrieben durch

(2) 
$$z = (n - m) a e^{m i \tau} + \zeta \cdot e^{(m-n) i \tau}.$$

Gl. (2) gibt auch die einzelnen Lagen wieder, die die mit dem Rollkreis  $c_1$  starr verbundene Kurve  $k_1$  einnimmt: Man hat lediglich  $\zeta$  gemäß (1) einzusetzen und dem Parameter  $\tau$  feste Werte zu erteilen, während  $\sigma$  veränderlich bleibt. Die Einhüllende dieser Kurvenschar ( $k_1$ ), nach dem

<sup>3)</sup> M. FRÉCHET, Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Nouv. Ann. 61, 206–217 (1902).

Sprachgebrauch der Kinematik als „Hüllbahn“ von  $k_1$  bezeichnet, wird gekennzeichnet durch sich deckende Tangentenvektoren:

$$(3) \quad \begin{aligned} z_\sigma &= \zeta_\sigma \cdot e^{(m-n)i\tau} = i(m-1)(ae^{i\sigma} - be^{(1-m)i\sigma}) \cdot e^{(m-n)i\tau}, \\ z_\tau &= i(n-m)[mae^{n i\tau} - (m-1)ae^{i\sigma} - be^{(1-m)i\sigma}] \cdot e^{(m-n)i\tau}. \end{aligned}$$

Der Quotient  $z_\sigma/z_\tau$  muß mithin reell, also zu sich selbst konjugiert sein.

Führen wir zur Abkürzung noch die Größen

$$(4) \quad u = e^{i\sigma}, \quad v = e^{i\tau}$$

ein, deren konjugierte die reziproken Werte haben ( $\bar{u} = u^{-1}$ ,  $\bar{v} = v^{-1}$ ), dann lautet die *Berührungsbedingung*

$$\frac{au - bu^{1-m}}{mav^n - (m-1)au - bu^{1-m}} = \frac{au^{-1} - bu^{m-1}}{mav^{-n} - (m-1)au^{-1} - bu^{m-1}},$$

oder nach einigen Umformungen

$$(5) \quad (u - v^n)[au^{m-1}(1 + uv^{-n}) - b(u^{2m-1} + v^{-n})] = 0.$$

Wie man sieht, besteht die zur Untersuchung stehende *Hüllbahn* aus zwei *grundsätzlich verschiedenen Komponenten*.

4. Der durch Verschwinden des *ersten Klammerfaktors* in (5) gekennzeichnete Bestandteil

$$(6) \quad u = v^n \quad (\sigma \equiv n\tau \pmod{2\pi})$$

ist mehr oder weniger trivial: Es ergibt sich aus (1) und (2) als Hüllbahn eine *Trochoide*  $k_2$

$$(7) \quad z = (n-1)av^m + bv^{m(1-n)} = (n-1)ae^{m i\tau} + be^{(1-n)m i\tau},$$

und zwar jene, die als Bahn des Punktes  $P$  beim Rollen des Kreises  $c$  im Kreis  $c_2$  entsteht (vgl. Abb. 1). Das ist genau jene Hüllbahn, die auf Grund des Satzes von CAMUS zu erwarten war.

Hierbei ist allerdings folgendes zu beachten: Vermehrt man  $\sigma$  in (1) um  $2\pi$  — was geometrisch einem vollen Umlauf von  $c$  in  $c_1$  entspricht —, so ändert sich  $\zeta$ , falls  $m$  nicht ganz ist, um  $be^{-2mi\pi}$ . Das heißt aber, die Radlinie  $k_1$  entsteht bei der Rollung von  $c$  in  $c_1$  nicht nur als Bahn des Punktes  $P$ , sondern noch weiterer mitgenommener Punkte, die aus  $P$  hervorgehen, wenn dieser Punkt einer Drehung um Vielfache des Winkels  $2m\pi$  um die Mitte  $C$  von  $c$  unterworfen wird. Auch diese zusätzlichen Punkte geben dann nach dem Prinzip von CAMUS Anlaß zu weiteren, zu  $k_2$  kongruenten Hülltrochoiden. Diese treten in endlicher Anzahl auf, wenn  $m$  rational ist (vgl. Abb. 4), und in abzählbar unendlicher Anzahl bei irrationalem  $m$ . Man erhält die Gleichungen dieser zusätzlichen Hülltrochoiden, wenn man in (7)  $b$  durch  $be^{2\lambda mi\pi}$  mit ganzzahligem  $\lambda$  ersetzt.

5. Die durch Verschwinden des zweiten Klammerfaktors in (5) charakterisierte Resthülle  $l$ , der hier das Hauptinteresse gilt, ergibt sich für

$$(8) \quad v^n = \frac{a u^m - b}{b u^m - a} u^{1-m}.$$

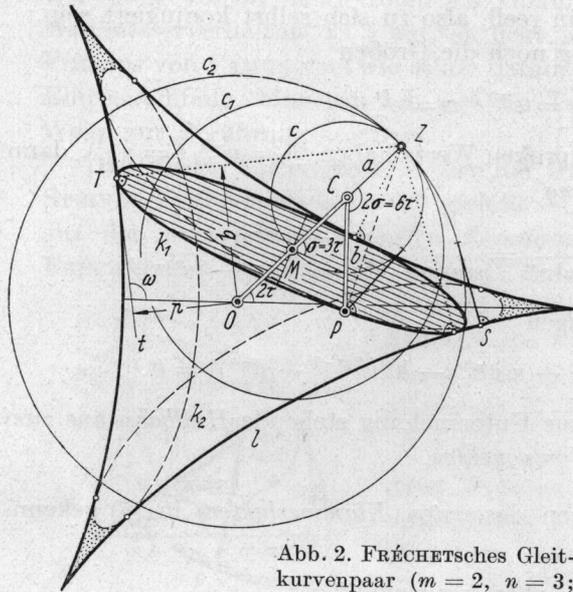


Abb. 2. FRÉCHETSches Gleitkurvenpaar ( $m = 2, n = 3$ ;  $a = 2, b = 3$ )

Um nachzuprüfen, ob  $l$  — so wie im FRÉCHETSchen Spezialfall  $m = 2, n = 3$  — eine Zykloide ist, betrachten wir die Berührungsnormale von  $k_1$  und  $l$ , die gleichfalls eine Zykloide (die Evolute von  $l$ ) einhüllen müßte<sup>4</sup>).

Bezeichne  $\omega$  den von der  $x$ -Achse aus gezählten Richtungswinkel des Berührungselementes  $Tt$  (vgl. Abb. 2), und setzen wir abkürzend

$$(9) \quad e^{i\omega} = w,$$

dann finden wir vorerst unter Bezugnahme auf (3)

$$w^2 = e^{2i\omega} = \frac{z_\sigma}{z_\tau} = \frac{a u - b u^{1-m}}{b u^{m-1} - a u^{-1}} v^{2(m-n)},$$

und weiterhin mit Rücksicht auf (8):

$$(10) \quad w^2 = u \cdot v^{2m-n}.$$

Die Normale des Berührungselementes  $Tt$  hat nun die Richtungsgröße  $wi$  und muß nach einem grundlegenden Satz der ebenen Kinematik durch das Momentanzentrum  $Z$  der Rollbewegung gehen, welches im Wälzpunkt der Polkreise  $c_1$  und  $c_2$  bereits zur Verfügung steht (vgl. Abb. 1 und 2):

$$(11) \quad Z = n a \cdot e^{mi\tau} = n a v^m.$$

Bezeichnet  $q$  den Ursprungsabstand der Berührungsnormale, dann kommt dem Fußpunkt dieses Abstands die komplexe Koordinate  $q e^{i\omega} = qw$  zu, und  $Z - qw$  muß zu  $wi$  reell-proportional sein. Aus dieser Bedingung

<sup>4</sup>) Die Berührungsnormale ist aus kinematischen Erwägungen heraus zunächst bequemer zu erfassen als die Berührungstangente.

erhält man mit Benutzung von (8) über

$$\begin{aligned} 2qw &= Z + \bar{Z}w^2 = nav^m(1 + uv^{-n}) = nabv^m \frac{u^{2m} - 1}{au^m - b} \\ &= nb(u^m + u^{1-m}v^{-n})v^m \end{aligned}$$

schließlich

$$(12) \quad q = \frac{nb}{2} \left( u^{\frac{2m-1}{2}} v^{\frac{n}{2}} + u^{\frac{1-2m}{2}} v^{-\frac{n}{2}} \right).$$

Für den Fall, daß das Hüllgebilde der Berührungsnormalen wie im Musterbeispiel von FRÉCHET eine *Zykloide* ist, müßte  $q$  eine Kosinusfunktion von  $\omega$  sein, also proportional zu einem Binom  $w^s + w^{-s}$ . Dies tritt offenbar nur dann ein, wenn die Exponentenverhältnisse in (10) und (12) übereinstimmen; diese Bedingung

$$1 : (2m - n) = (2m - 1) : n$$

ist aber wegen  $m \neq 0$  nur für

$$(13) \quad n = 2m - 1$$

erfüllt. Unter dieser *notwendigen einschränkenden Voraussetzung* nehmen (10) und (12) die Gestalt

$$(14) \quad w^2 = uv$$

und

$$(15) \quad q = \frac{nb}{2} (w^n + w^{-n}) = nb \cdot \cos n\omega$$

an, und die von den Berührungsnormalen eingehüllte *Evolute der Hüllbahn*  $l$  ist dann tatsächlich eine *Zykloide*.

6. Die zur Untersuchung stehende *Hüllbahn*  $l$  ist unter der Voraussetzung (13) eine *Evolvente der Zykloide* (15); daß sie mit der einzigen in der Evolventenschar vorhandenen *Zykloide* identisch ist — und nicht etwa mit einer Parallelkurve derselben — könnte aus Symmetriegründen gefolgert werden, soll aber explizit nachgewiesen werden.

Wir führen zu diesem Zweck den Ursprungsabstand  $p$  der *Tangente*  $t$  des Berührungselementes  $Tt$  ein (Abb. 2). Der vom Lotfußpunkt  $-pie^{i\omega}$  zum Berührungspunkt  $z$  führende Tangentenvektor muß zum Richtungsvektor  $e^{i\omega} = w$  reell-proportional sein. Hieraus folgt zunächst

$$2piw = -z + \bar{z}w^2,$$

und wenn man auf Grund von (1), (2), (4) und (13) die Koordinate des Berührungspunktes  $T$  in der Form

$$z = (m - 1)a(v^m + uv^{1-m}) + b(uv)^{1-m}$$

darstellt, schließlich mit Rücksicht auf (14):

$$(16) \quad p = \frac{b}{2i} (w^n - w^{-n}) = b \cdot \sin n\omega.$$

Durch diese Stützfunktion  $p(\omega)$  ist aber die Resthülle  $l$  tatsächlich als *Zykloide* nachgewiesen<sup>5)</sup>.

7. Zusammenfassend kann der folgende *Satz* ausgesprochen werden, der das FRÉCHETSche Resultat verallgemeinert und durch Angabe der CAMUSschen Hüllbahn vervollständigt:

„Sei  $k_1$  eine Radlinie, die als Bahn einer Punktgruppe  $P$  beim Rollen eines Kreises  $c$  vom Radius 1 auf einem Kreis  $c_1$  vom Radius  $m$  entsteht. Wälzt sich nun der Kreis  $c_1$  auf einem weiteren Kreis  $c_2$  vom Radius  $n = 2m - 1$  ab, so umhüllt die mitgenommene Radlinie  $k_1$  neben einer Gruppe von untereinander kongruenten Radlinien  $k_2$ , welche nach CAMUS als Bahnen der Punktgruppe  $P$  beim Rollen von  $c$  auf  $c_2$  entstehen, noch eine gespitzte Radlinie  $l$ .“

Erläuternd wäre zu bemerken, daß die genannte Punktgruppe unter Umständen aus einem einzigen Punkt besteht, nämlich für ganzzahliges  $m$  (Abb. 2 und 3); für rationales  $m = \mu/\nu$  ( $\mu, \nu$  ganz und teilerfremd,  $\nu > 0$ ) aus  $\nu$  Punkten (Abb. 4), und für irrationales  $m$  aus abzählbar unendlich vielen. — Bei der Herleitung wurde im übrigen stets Innenrollung angenommen und dementsprechend stillschweigend  $m, n > 1$  vorausgesetzt.

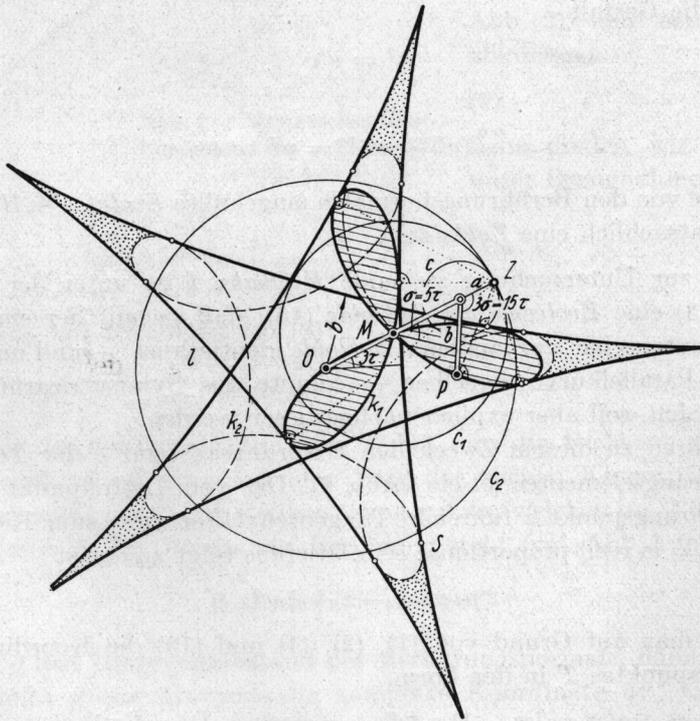


Abb. 3. Gleitkurvenpaar zur Annahme  $m = 3, n = 5$  ( $a = 1, b = 2$ )

<sup>5)</sup> Ist hingegen die Bedingung (13) nicht erfüllt, so treten kompliziertere Resthüllen auf, die anscheinend keiner bekannten Kurvenfamilie angehören.

Im nachhinein kann aber hiervon abgesehen werden (insbesondere sind auch negative Werte für  $m$  und  $n$  zulässig), was dann gegebenenfalls Außenrollung bedingt. Allgemein gilt die Festsetzung, daß zwei Wälzkreise auf derselben Seite der Wälztangente liegen, wenn ihre Radien gleiches Vorzeichen haben, andernfalls durch die Wälztangente getrennt werden.

Die Hülltrochoide(n)  $k_2$  und die Hüllzykloide  $l$  berühren einander an gewissen Stellen  $S$ , die allerdings nur dann reell auftreten, wenn  $a \leq b$ , dann aber auch gleichzeitig den reellen Berührungsbereich auf  $l$  begrenzen. Diese Stellen sind folgendermaßen zu finden: Man lege aus dem erzeugenden Punkt  $P$  die Tangenten an den Rollkreis  $c$  und setze den Rollvorgang so weit fort, bis der Berührungspunkt einer solchen Tangente zum Wälzpunkt  $Z$  geworden ist ( $m\sigma = mn\tau = \arccos(a/b)$ , vgl. Abb. 2); in dieser Lage stellt  $Z$  den gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt der einander in  $P = S$  oskulierenden

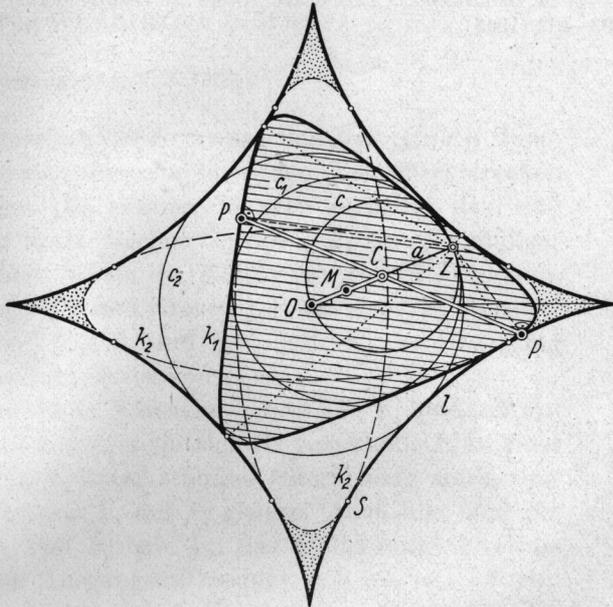


Abb. 4. Gleitkurvenpaar zur Annahme  $m = 3/2$ ,  $n = 2$   
( $a = 2$ ,  $b = 4$ )

Radlinien  $k_1$  und  $k_2$  dar. Die bei den Grenzstellen  $S$  beginnenden, von den Trochoiden  $k_2$  begrenzten Zwickel des Innengebietes der Zykloide  $l$ , die von der Gleitkurve  $k_1$  nicht „ausgefegt“ werden, sind in den Figuren punktiert hervorgehoben worden.

Die wiedergegebenen Abbildungen zeigen drei spezielle Annahmen: Abb. 2 illustriert den Satz von FRÉCHET (Umwendung einer Ellipse in einer STEINER-Zykloide), der sich für  $m = 2$  ( $n = 3$ ) einstellt. — Abb. 3 gehört zur Annahme  $m = 3$  ( $n = 5$ ), die auf die Umwendung eines Dreiblatts in einer fünfspitzigen Sternzykloide führt. — Abb. 4 schließlich zeigt die zu  $m = 3/2$  ( $n = 2$ ) gehörige Umwendung einer dreizähligen Hypotrochoide in einer Astroide; die CAMUSSCHE Hüllbahn zerfällt dabei in zwei Ellipsen.

Derartige Paare von Gleitkurven, von denen die eine in der anderen zwangsläufig umwendbar ist, bilden im Sinne der Getriebelehre ein „höheres kinematisches Elementenpaar“. Rein äußerlich erinnern die vorliegenden

Elementenpaare an gewisse andere, die der Verfasser<sup>6)</sup> und unabhängig von ihm M. GOLDBERG<sup>7)</sup> bei früherer Gelegenheit in Verallgemeinerung älterer Vorbilder (F. REULEAUX, L. BURMESTER u. a.) aufgezeigt haben: Dort waren es von Kreisbogen berandete Figuren, die in einem regelmäßigen Vieleck umwendbar sind.

<sup>6)</sup> W. WUNDERLICH, Über eine Klasse zwangläufiger höherer Elementenpaare. Z. angew. Math. Mech. **19**, 177–181 (1939).

<sup>7)</sup> M. GOLDBERG, Circular-arc rotors in regular polygons. Amer. Math. Monthly **55**, 393–402 (1948).