" Dagli Atti del VI Congresso dell' Unione
Matematica Italiana, Napoli 1959 ,,

UNA GENERAZIONE COMUNE DI DIVERSE CURVE PATOLOGICHE

DI WALTER WUNDERLICH (A VIENNA)

Sia F una regione finita, chiusa e di semplice connessione. Inoltre siano date r trasformazioni puntuali topologiche $A_1, \ldots, A_r$ che rappresentano la regione fondamentale F su regioni parziali $A_k F \subset F$, due a due non aventi in comune che punti di contorno al più; le A_k devono del resto effettivamente diminuire tutte le distanze. Esistono dunque per $n \to \infty$ due punti limiti $a = \lim A_1^n F$ e $b = \lim A_r^n F$; supponiamo per questi punti fissi di A_1 e A_r la validità delle condizioni $A_k b = A_{k+1} a$ $(k = 1, \ldots, r-1)$. Le r regioni parziali di primo ordine $A_k F$ formano allora una serie connessa, e egualmente le r^n regioni parziali di ordine n, generate per l'applicazione dei prodotti di n trasformazioni A in ogni possibile successione.

Scriviamo un valore parametrico τ dell'intervallo $[0, 1]$ come frazione r-adica $\tau = 0, \tau_1 \tau_2 \ldots = \Sigma \tau_k r^{-k}$, e aggiungiamo ad ogni sezione finita $0, \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ la regione parziale di ordine n: $T_1 T_2 \ldots T_n \cdot F$, ove T_k significa la trasformazione fondamentale A con l'indice $1 + \tau_k$. Per $n \to \infty$ si perviene così ad un punto limite t ben definito, corrispondente al valore τ. La totalità di questi punti t nella successione naturale dei numeri τ costituisce una curva continua C, caratterizzata da certe automorfie: la sua parte situata per esempio in $A_k F$ è l'immagine topologica $A_k C$ di C, e una relazione analoga vale per ogni segmento di ordine qualunque. Questa proprietà è frequentemente la causa di un certo aspetto « patologico » della curva C, in quanto che una singolarità per caso esistente nel punto iniziale a si ritrova ripetuta infinite volte.

Numerose curve patologiche ben note possono essere generate nel modo descritto. Basta menzionare la curva continua senza tangenti del v. KOCH $(r = 2)$; le curve di PEANO e HILBERT riempienti completamente l'area di un quadrato $(r = 9$ risp. $4)$; la curva di

SIERPINSKI della quale ogni punto è un punto di diramazione ($r = 3$); la curva continua di DE RHAM, con tangenti ma senza cerchi osculatori ($r = 2$), ecc. Le trasformazioni A usate sono senza eccezione similitudini o affinità; sotto queste circostanze è possibile calcolare esplicitamente i punti corrispondenti a valori razionali del parametro τ.

Le automorfie suddette, indicate con

$$t\left(\frac{\tau + k - 1}{r}\right) = A_k \cdot t(\tau), \qquad k = 1, \ldots, r$$

si traducono in un sistema finito di equazioni funzionali per le funzioni parametriche delle coordinate usate per una rappresentazione analitica. Queste equazioni funzionali sono completamente sufficienti per definire la curva C.

Il contenuto della comunicazione è stato pubblicato per esteso nella Rivista « Ganita » (India), vol. **5**, 215-230.