

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

Herausgegeben von E. Hlawka und N. Hofreiter

Springer-Verlag in Wien
Alle Rechte vorbehalten

Flächen mit ebenen Falllinien
Von
Walter Wunderlich, Wien
Mit 3 Textabbildungen
(Eingegangen am 8. Oktober 1960)

I. Einleitung

Die kartennäßige Darstellung der Geländefläche durch einen Schichtenplan wird gelegentlich durch das System der Falllinien ergänzt. Während die *Schichtenlinien* als Horizontalschnitte der Fläche naturgemäß ebene Kurven sind, sind die sie rechtwinklig durchsetzenden *Falllinien* im allgemeinen echte, gewundene Raumkurven. Die Frage, ob es Flächen gibt, deren sämtliche Falllinien gleichfalls *ebene Kurven* sind, ist sofort zu bejahen: Abgesehen von der *Ebene* und beliebigen *Horizontalzyindern* sind leicht weitere triviale Beispiele in Gestalt der *Drehflächen mit lotrechter Achse* anzugeben, deren Schichtenlinien von den Parallelkreisen und deren Falllinien von den Meridianen gebildet werden. Allgemeiner könnten noch die *Gesamtflächen mit lotreitem Evolutenzylinder* namhaft gemacht werden; dieselben werden von einer ebenen Profilkurve erzeugt, deren Ebene auf einem lotrechten Zylinder abrollt, wobei die einzelnen Profilpunkte die Schichtenlinien beschreiben, während die einzelnen Lagen des erzeugenden Profils die Falllinien abgeben.

Das erste nichttriviale Beispiel dürfte E. Müller gegeben haben, als er die *Schraubflächen* mit ebenen Falllinien bestimmte¹. Ausgehend von der Feststellung, daß die Falltangentialen einer Schraubfläche mit lotrechter Achse auch Schraubtangentialen sind (als Erzeugende von

¹ E. Müller: Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schraub- und Schiebflächen. Sitzsber. Akad. Wiss. Wien 120 (1911), 1763–1810, insb. 1797. (Anhang) mit

umschriebenen Schraubtorsen), also dem quadratischen (tetraedralen) Schraubtangentenkomplex angehören, gewinnt man die genannten Flächen einfach durch Verschraubung ebener Komplexkurven. Dies sind gewisse *Parabeln*, die folgendermaßen erhalten werden können: Man greift eine beliebige Schraubtangente t heraus und betrachtet die Bahntangenten ihrer Punkte; diese Tangenten liegen allesamt in einer Ebene (welche die von t überstrichene Schraubtorse längs t berührt) und hüllen die benötigte Komplexparabel ein, deren einzelne Schraubflägen die Fallinien der erzeugten Fläche bilden. — In ganz analoger Weise lassen sich auch die *Spiralfächen* mit ebenen Fallinien aus einer Komplexparabel des tetraedralen Spiraltangentenkomplexes herleiten.²

Ein interessantes Beispiel für eine *algebraische Fläche* 4. Ordnung mit der kartesischen Gleichung

$$\frac{x^2}{1-z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1. \quad (1)$$

Ihr Schichtenplan besteht aus *konfokalem Hyperbeln* $z = \text{const}$, so daß die Falliniegrundrisse von den zugehörigen *konfokalen Ellipsen* gebildet werden; letztere röhren aber, wie man leicht nachprüft, von den ebenen Schnitten $z/y = \text{const}$ her, die sich im übrigen als *Kreise* erweisen.³ — Der *Grenzfall* mit *Parabeln* als Schichten- und Fallinien, beschrieben durch

$$y^2 = 2xz^2 + z^4, \quad (2)$$

ist eine weitgehend spezialisierte *Steinersche Römerfläche*.⁴

II. Flächen mit ebenen Fallinien zu einem Schichtenplan aus konfokalen Kegelschnitten

L. Eckhart hatte geglaubt, mit den Flächen (1) und (2) und gewissen komplex-affinen Seitenstücken von (1) — s. u. (7a) und (7b) — sämtliche Flächen mit ebenen Fallinien erhalten zu haben, deren *Schichtenplan* von einer Schar *konfokaler Kegelschnitte* gebildet wird. Daß es aber noch andere, und zwar allgemeinere Flächen dieser Art gibt, soll nummehr durch deren vollständige Aufzählung ausgeführt werden.

² W. Wunderlich: Darstellende Geometrie der Spiralfächen. Monatsh. Math. Phys. 46 (1938), 248–265, insb. 255.

³ L. Eckhart: Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien *Kegelschnitte* sind. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 131 (1922), 417–427.

⁴ Vgl. diesbez. W. Wunderlich: Römerflächen mit ebenen Fallinien. Erscheint im Bompiani-Jubiläumsband der Annali di Matematica.

Das Orthogonallnetz aus konfokalen Ellipsen und Hyperbeln mit den gemeinsamen Brennpunkten $(\pm 1, 0)$ wird am besten angesetzt durch

$$x = \pm \operatorname{ch} u \cdot \cos v, \quad y = \operatorname{sh} u \cdot \sin v; \quad (3a, b)$$

die u -Linien ($v = \text{const}$) sind die Hyperbeln, die v -Linien ($u = \text{const}$) die Ellipsen des Netzes. Eine dazu passende Fläche mit *hyperbolischen Schichtenlinien* wird dann mittels einer Kotenfunktion $z = z(v)$ beschrieben. Sollen nun ihre Fallinien ($u = \text{const}$) eben sein, so muß die Determinante der ersten drei Ableitungen von x, y, z nach v (dem Kurvenparameter der Fallinien) verschwinden. Dies führt für z auf die lineare Differentialgleichung

$$z''' + z' = 0 \quad (4a)$$

mit der Lösung

$$z = a \cos v + b \sin v + c, \quad (5a)$$

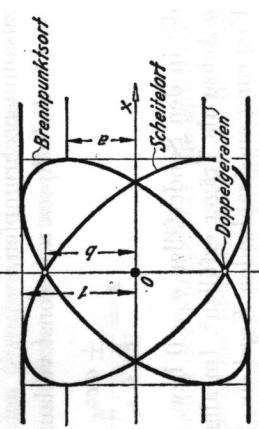
wobei die additive Konstante c unterdrückt werden darf und die Koeffizienten a und b durch $a^2 + b^2 = 1$ normiert werden mögen (was nur eine proportionale Streckung der z -Koordinaten bewirkt).

Die durch (3a, b) und (5a) erklärte Fläche wird ausreichend gekennzeichnet durch ihr in der Symmetrieebene $y = 0$ liegendes Profil $u = 0$, das den *Scheitelort der Schichtenhyperbeln* abgibt und im allgemeinen aus einem *Ellipsenpaar*

$$x = \pm \cos v, \quad y = 0, \quad z = a \cos v + b \sin v \quad (6a)$$

besteht, das dem Quadrat $x = \pm 1, z = \pm 1$ eingeschrieben ist (Abb. 1).

In jeder Schichtenebene $z = \text{const}$ liegen im allgemeinen zwei



Schichtenhyperbeln, von welchen die zu $\sin v = 0$ und $\cos v = 0$ gehörigen zu Doppelgeraden in den Ebenen $z = \pm a (\parallel x)$ bzw. $z = \pm b (\parallel y)$ ausarten. Umgekehrt röhrt jede Hyperbel des Schichtenplans von vier übereinanderliegenden Schichtenlinien der Fläche her: Die Ferngerade der xy -Ebene zählt mithin vierfach, was auf eine *Fläche 8. Ordnung* schließen läßt. In der Tat gelangt man durch Elimination von u und v aus (3a b) und (5a) auf eine

Abb. 1

Flächengleichung 8. Grades, auf deren Wiedergabe wegen ihrer Länge jedoch verzichtet sei. Abb. 2 zeigt eine anschauliche Ansicht eines Flächenteils, den man sich noch an den Koordinatenebenen gespiegelt

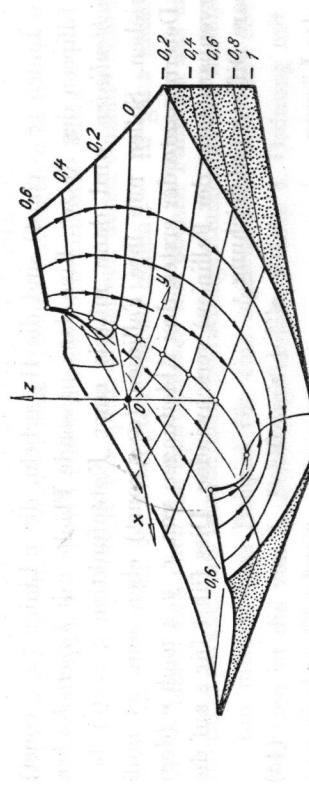


Abb. 2. Axonometrisches Bild einer Fläche 8. Ordnung mit Hyperbeln als Schichtenlinien und Ellipsen als Falllinien ($a = 3/5, b = 4/5$). Zu denken hat: Eine Ausnahme tritt lediglich in den Fällen $a = 0$ oder $b = 0$ ein, die auf *Flächen 4. Ordnung* führen: Im ersten Fall verschmelzen die beiden Profillellipsen zu einem Kreis und man erhält die *Eckhart'sche Fläche* (1); im zweiten Fall stellt sich ein komplexes Seitenstück mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{1-z^2} = 1 \quad (7a)$$

ein, bei welchem die Profillellipsen auf die beiden Quadratdiagonalen zusammenschrumpfen.

Die *Fallellipsen* $u = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen

$$z = \frac{\pm ax}{\operatorname{ch} u} + \frac{by}{\operatorname{sh} u}, \quad (8a)$$

die in den Sonderfällen $a = 0$ bzw. $b = 0$ ein *Büschel* mit der x - bzw. y -Achse als Träger erfüllen⁵. Im allgemeinen Fall hüllen sie einen vom Ursprung ausstrahlenden *Kegel* ein, für den man über die partielle Ableitung von (8a) nach u die Parameterdarstellung

$$\pm ax : by : z = \operatorname{ch}^3 u : -\operatorname{sh}^3 u : 1 \quad (9a)$$

⁵ Eckhart war der Meinung, dies unter allen Umständen annehmen zu können (a. a. O. 425), wodurch ihm die Flächen 8. Ordnung entgingen.

findet, woraus die kartesische Gleichung ergibt, mit entsprechenden Abweichungen

$$\left(\frac{ax}{z}\right)^{2/3} - \left(\frac{by}{z}\right)^{2/3} = 1 \quad (10a)$$

fließt. Dieser Kegel besitzt mithin *Hyperbelrevoluten* zu Schichtenlinien (für $z = \pm 1$ sind es die Evolventen der zugehörigen Schichtenhyperbeln der Fläche) und es läßt sich zeigen, daß es sich um den gemeinsamen Evolutenkegel 4. Klasse zweier polarer Kegel 2. Grades

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = z^2, \quad (\text{Eckhartgeg.}) \quad (11a)$$

handelt, deren Formparameter α, β durch das Gleichungspaar

$$\alpha a + b\beta = 1, \quad ba - a\beta = a\beta \quad (12a)$$

bestimmt sind.

Die analoge Ermittlung aller Flächen mit ebenen Falllinien zu einem *Schichtenplan aus konfokalen Ellipsen* kann gleichfalls vom Ansatz (3a, b) ausgehen, wobei lediglich ein Rollentausch der u - und v -Linien vorzunehmen ist. Aus der resultierenden Differentialgleichung

$$z''' - z' = 0 \quad (4b)$$

erhält man die Lösung

$$z = a \operatorname{ch} u + b \operatorname{sh} u + c, \quad (5b)$$

wobei die additive Konstante c wieder unterdrückt werden darf und die Koeffizienten a und b durch $a^2 - b^2 = +1, -1, 0$ normiert werden können. Dementsprechend sind hier drei Untertypen zu unterscheiden, die durchwegs wieder *Flächen 8. Ordnung* umfassen, mit Ausnahme der beiden schon bei *Eckhart* auftretenden *Grenzformen 4. Ordnung* $a = 0$ und $b = 0$: Im ersten Fall besitzt die Fläche die kartesische Gleichung

$$\frac{x^2}{1+z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1, \quad (7b)$$

im zweiten Fall begegnet man neuerlich der Fläche (7a), die auf ihren verschiedenen Mänteln sowohl elliptische als auch hyperbolische Schichtenlinien aufweist. — Die *Fallellipeln* $v = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen

$$z = \frac{\pm ax}{\cos v} + \frac{by}{\sin v}, \quad (8b)$$

die in den Eckartschen Grenzfällen Büschel um die x - bzw. y -Achse

bilden, während sie im allgemeinen Fall einen *Hüllkegel 4. Klasse* mit der Parameterdarstellung

$$\pm ax : by : z = \cos^3 v : \sin^3 v : 1 \quad (9b)$$

und der kartesischen Gleichung

$$\left(\frac{ax}{z}\right)^{2/3} + \left(\frac{by}{z}\right)^{2/3} = 1 \quad (10b)$$

besitzen. Seine Schichtenlinien $z = \text{const}$ sind im Fall $a^2 = b^2$ *Astroïden*, sonst Affine dazu.

Der Übergangfall der Flächen mit ebenen Falllinien zu einem *Schichtenplan aus konfokalen Parabeln* kann etwa mit dem Ansatz

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = z(v) \quad (3c)$$

behandelt werden und führt über die Differentialgleichung $z''' = 0$ auf die Lösung

$$z = av^2 + 2bv + c, \quad (5c)$$

in welcher $c = 0$ gesetzt und a und b geeignet normiert werden können. Im allgemeinen erhält man eine *Steinersche Römerfläche 4. Ordnung*⁴, darunter für $a = 0$ den bereits bekannten *Eckhartschen Grenzfall* (2); der andere Grenzfall $b = 0$ führt auf *Reyesche Kegel 2. Grades*⁶

$$a^2 y^2 = 4z(ax + z). \quad (7c)$$

Die *Fallparabeln* $u = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen

$$aux - by + uz = au^3, \quad (8c)$$

die im allgemeinen Fall einen *Zylinder 3. Klasse* einhüllen; derselbe hat die Erzeugendendrichtung $-1 : 0 : a$ und als

$$ax + z = 3au^2, \quad by = 2au^3 \quad (9c)$$

einhüllen; derselbe hat die Erzeugendendrichtung $-1 : 0 : a$ und als Schichtenlinien *Neissche Parabeln (Parabelevoluten)*. In den genannten Grenzfällen bilden die Ebenen Büschel $y/z = \text{const}$ bzw. $ax + z = \text{const}$.

III. Allgemeine Lösung des Problems der Flächen mit ebenen Falllinien

Greift man bei einer beliebigen Fläche Φ aus den ∞^2 Tangentialebenen jene heraus, die eine *feste Neigung* α gegen die Waagrechte

⁶ Der „*Reyesche Kegel*“ ist polar zum „orthogonalen“ Kegel 2. Grades und dadurch ausgezeichnet, daß in einer Hauptsymmetrieebene die Fokalstrahlen zu den Scheiterzeugenden normal sind; er wird erzeugt durch kongruente Strahlbüschel mit gemeinsamem Scheitel oder durch projektive Strahlbüschel, bei welchen entsprechende Strahlen einen rechten Winkel bilden.

haben, so erhält man eine einparametrische Ebenenschar, die eine *Böschungstorse* Δ einhüllt, das ist die Tangentenfläche einer gewissen Raumkurve p mit der konstanten Steigung α . Diese Böschungstorse Δ ist der Fläche Φ längs einer Kurve q angeschrieben, die man bei Annahme lotrecht auf Φ eingeschlagen. Ein Fall der Böschungstorse sind deren Falllinien, also *Falltangentialen von Φ* (Abb. 3). Läßt man die Neigung α variieren, so erhält man sämtliche der Fläche Φ umschriebenen Böschungstorsen, deren ∞^1 Gratlinien p eine gewisse Fläche Ψ erfüllen, die offenbar von allen ∞^2 Falltangentialen der Fläche Φ berührt wird: Ψ stellt mithin (neben Φ) die *zweite Brennfläche der Falltangentialkongruenz von Φ* dar.

Passen wir nun eine *Falllinie* f von Φ ins Auge, so müssen nach dem Gesagten ihre sämtlichen Tangenten den Brennflächenmantel Ψ berühren. Ist f speziell eine *ebene Kurve*, so verlaufen ihre Tangenten in einer Ebene ε , die Ψ längs einer Linie berühren wird. Sind aber sämtliche ∞^1 Falllinien von Φ eben, so erscheint die Fläche Ψ als Einhüllende der Ebenenschar ε und muß demnach eine *Torse* sein. Damit ergibt sich die folgende *geometrische Erzeugungsweise einer Fläche Φ mit ebenen Falllinien*: „Man nehme eine beliebige *Torse* Ψ an, zeichne auf ihr eine einparametrische Schar von *Böschungslinien* p mit verschiedenen Neigungen aus, suche deren *Tangentenflächen* Δ auf und bestimme deren *Einhüllende* Φ ; die Falllinien von Φ werden dann in den Tangentialebenen ε von Ψ verlaufen, also eben sein.“

Das eingangs erwähnte Beispiel der *Müllerschen Schraubfläche* mit Parabeln als Falllinien ergibt sich dabei in folgender Weise: Man geht aus von einer *Schraubtorse* Ψ mit lotrechter Achse und verwendet als Böschungslinien p die auf Ψ verlaufenden *Schraublinien*; deren Tangentenflächen Δ sind dann wieder Schraubtorsen, die die genannte Schraubfläche einhüllen.

Eine besondere Betrachtung erfordert der Fall einer *abwickelbaren Fläche Φ* : Hier erscheinen die berührenden Böschungstorsen Δ zu Ebenen abgeplattet, die je ∞^1 parallele Falltangentialen enthalten. Die Gratlinien p sind mithin auf Fernpunkte zusammengeschrumpft, so daß

der zweite Brennflächenmantel der Falltangentenkongruenz von Φ zu einer *Fernkurve* ausartet, die eine *Gerade* sein muß, wenn die Falllinien eben sein sollen. Die Falltangenten von Φ verlaufen dann parallel zu den Strahlen eines (eigentlichen) Büschels, woraus sich folgern läßt⁶, daß die Tangentialebenen Δ parallel zu jenen eines *Reyeschen Kegels* (7c) angeordnet sind. Sieht man ferner von der trivialen Lösung ab, die ein beliebiger *Horizontalzylinder* darstellt, so gilt also: „Die nichttrivialen *Torsen mit ebenen Falllinien* sind jene, die einen *Reyeschen Richthkegel 2. Grades* mit lotrechter Fokalachse haben.“

In dem Sonderfall, daß die Ausgangstorse $\Psi(\varepsilon)$ zu einem *eigenlichen Ebenenbüschel* $d(\varepsilon)$ ausgeartet ist, schrumpfen gleichfalls die Böschungslinien p auf Punkte der Büschelachse d zusammen und die Böschungstorsen Δ werden zu *Drehkegeln* mit lotrechter Achse: „Das Hüllgebilde einer einparametrischen Schar von Drehkegeln mit lotrechten Achsen, deren Spitzen auf einer Geraden liegen, ist eine Fläche mit ebenen Falllinien.“

Hier ordnen sich mit *waagrechter Spitzentlinie* d die oben betrachteten *Eckhartischen Flächen* 4. Ordnung mit Kegelschnitten als Falllinien ein. L. Eckhart war zu seiner Fläche (1) durch Transformation eines Ebenenbüschels mittels einer speziellen, *axialen Ebenenverwandtschaft*⁷ gelangt. Im übrigen läßt sich aber zeigen, daß auch bei Anwendung einer beliebigen axialen Ebenenverwandtschaft mit lotrechter Achse stets eine Fläche mit ebenen Falllinien entsteht, wobei deren Ebenen ein Büschel mit waagrechter Achse erfüllen; hierüber soll an gleicher Stelle zu einem späteren Zeitpunkt noch ausführlich berichtet werden⁸.

Die Frage nach *sämtlichen Flächen mit Kegelschnitten als Falllinien* ist noch offen. Außer den in Abschnitt I erwähnten Schraub- und Spiralfächern und den in Abschnitt II beschriebenen algebraischen Flächen ist bisher nur noch ein weiteres nichttriviales Beispiel bekannt, und zwar eine metrisch ausgezeichnete *Römerfläche* mit Pascalschnecken als Schichtentlinien und Parabeln als Falllinien,⁴ deren Ebenen ein Büschel mit geneigter Achse bilden⁸.

⁷ Vgl. inzwischen den Auszug meines beim V. Österreichischen Mathematikerkongreß in Innsbruck im September 1960 gehaltenen Vortrags „Axiale Ebenenverwandtschaften“, veröffentlicht im Kongreßbericht, Nachr. Österr. Math. Ges. 66.

⁸ *Zusatz bei der Korrektur:* Die Frage konnte inzwischen erledigt werden. Es zeigte sich, daß nach Ausschluß der Gesimsflächen mit Kegelschnittprofil die Flächen mit elliptischen oder hyperbolischen Falllinien im wesentlichen durch die in Abschn. II behandelten Flächen repräsentiert werden, während die Flächen

IV. Differentialgleichung der Flächen mit ebenen Falllinien

Wir denken uns die (nichtabwickelbare) Fläche Φ als *Hüllgebilde ihrer Tangentialebenen*

$$x \cos u + y \sin u + z \cdot v^{-1} = h(u, v) \quad (13)$$

aufgefaßt; sie ist dann festgelegt durch die Funktion $h(u, v)$, wobei die Veränderliche u den Richtungswinkel der Schichtenlinien und v die Flächenneigung mißt. Eine Parameterdarstellung der Fläche ergibt sich nach partieller Ableitung von (13) in der Form

$$\begin{aligned} x &= (h + vh_v) \cos u - h_u \sin u, \\ y &= (h + vh_v) \sin u + h_u \cos u, \\ z &= -v^2 h_{vv}. \end{aligned} \quad (14)$$

Eine Φ umschriebene *Böschungstorse* \mathcal{A} wird durch $v = \text{const}$ gekennzeichnet. Für ihre *Gratlinie* p ergibt sich, mit u als Kurvenparameter, durch zweimalige Ableitung von (13) nach u die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= -h_u \sin u - h_{uu} \cos u, \\ y &= h_u \cos u + h_{uu} \sin u, \\ z &= (h + h_{uu}) v. \end{aligned} \quad (15)$$

Lassen wir nun auch v wieder variieren, so beschreibt (15) die *zweite Brennfläche* Ψ der Falltangentenkongruenz von Φ .

Soll nun die Fläche Φ ebene Falllinien haben, so muß, wie dargelegt wurde, Ψ eine Torse sein, und wir haben dementsprechend auszudrücken, daß die Flächenkrümmung von Ψ verschwindet. Zu diesem Zwecke berechnen wir auf Grund von (15) zunächst die Koeffizienten der II. Grundform, wobei es nur auf die Verhältnisse ankommt. Man findet

$$\begin{aligned} L : M : N &= (h + vh_v + h_{uv}) : h_{uv} : \\ &\quad \frac{(2h_v + vh_{vv} + 2h_{uuv}) h_{uv} - (h + vh_v + h_{uv}) h_{uuu}}{h_u + h_{uuu}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Die in Rede stehende Bedingung

$$LN - M^2 = 0 \quad (17)$$

lieft dann für die Funktion $h(u, v)$ eine in den höchsten Ableitungen lineare partielle *Differentialgleichung dritter Ordnung*, deren Lösung in

mit parabolischen Falllinien eine viel ausgedehntere Familie bilden, deren Umfang jener der Böschungstorsen entspricht. — Vgl. W. Wunderlich: Flächen mit Kegelschnitten als Falllinien. J. f. d. reine u. angew. Math. (im Druck).

Übereinstimmung mit den vorherigen geometrischen Betrachtungen von drei willkürlichen Funktionen abhängt: Die Annahme der Torsse entspricht zwei solchen Funktionen, die Kennzeichnung einer einparametrischen Schar von Böschungslinien darauf — etwa durch ihre Hüllkurve — erfordert eine dritte.

Wir wollen nun zeigen, daß diese dritte Funktion, die die Böschungslinien bestimmt, ebenfalls willkürlich ist. Dazu betrachten wir die Gleichung (1) für λ und μ . Da λ und μ auf der rechten Seite voneinander unabhängig sind, kann man hieraus λ und μ unabhängig voneinander bestimmen. Es ist also ausreichen zu zeigen, daß λ und μ auf der linken Seite voneinander unabhängig sind. Dazu schreibt man (1) in der Form

$$(E1)$$

und setzt $\lambda = \lambda(x, y)$ und $\mu = \mu(x, y)$. Dann erhält man aus (1) die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \cdot \mu) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \cdot \mu) = \lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + \lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \\ & \quad = \lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + \lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Es folgt also $\lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) = -\lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right)$. Da λ und μ auf der linken Seite voneinander unabhängig sind, muß es entweder $\lambda \cdot \mu = 0$ oder $\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ gelten. Da λ und μ nicht gleichzeitig Null sein können, muß $\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ gelten. Dies ist aber nur dann möglich, wenn λ und μ auf der linken Seite voneinander unabhängig sind.

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda : \lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow \mu : \lambda \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda : \mu \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow \mu : \lambda \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Wir schließen also, daß die Böschungslinien auf einer einparametrischen Schar liegen.

Wir schließen weiter, daß die Böschungslinien auf einer Hüllkurve liegen. Dazu schreibt man (1) in der Form