

$O(x, y, z)$ mittels der von einem Parameter v abhängigen Vektoren $\vec{CA} = a, \vec{CB} = b$ und $\vec{OC} = c$ in der folgenden Weise angesetzt werden:

$$(1) \quad \vec{r} = \cos v \cdot a + \sin v \cdot b + z \cdot c.$$

Sollen nun die Falllinien der Fläche sein, die in jedem Punkt P der Fläche durch den Vektor \vec{r} an der Stelle P als Tangentialvektor $\vec{r}_v = \frac{d\vec{r}}{dv} = -\sin v \cdot a + \cos v \cdot b$ angedeutet wird, so ist die Fläche durch die Gleichung

Flächen mit Kegelschnitten als Falllinien



Journal für die reine und angewandte Mathematik

Herausgegeben von Helmut Hasse und Hans Rohrbach

Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 30

Sonderabdruck aus Band 208, Heft 3/4, 1961. Seite 204 bis 220

Fläche mit Kegelschnitten als Falllinien.

Von W. Wunderlich in Wien.

Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien.

Von *W. Wunderlich* in Wien.

Die kartenmäßige Darstellung einer Geländefläche in Form eines Schichtenplans wird gelegentlich durch Eintragen der Fallinien ergänzt, welche das System der Schichtenlinien orthogonal durchsetzen. Im Gegensatz zu den Schichtenlinien, die als Horizontalschnitte der Fläche naturgemäß eben sind, handelt es sich bei den Fallinien im allgemeinen um echte Raumkurven. Nun gibt es aber doch auch *besondere Flächen*, deren *sämtliche Fallinien eben* sind. Hier wären vor allem die *Horizontalzylinder* sowie die *Drehflächen* mit lotrechter Achse zu erwähnen, ferner in direkter Verallgemeinerung die *Gesimsflächen* mit lotrechtem Evolutenzylinder. Letztere werden von einer beliebigen ebenen Profilkurve erzeugt, deren Ebene auf einem Vertikalzylinder abrollt: Die Bahnen der einzelnen Profilpunkte bilden dabei die Schichtenlinien, die einzelnen Lagen der Profilkurve die Fallinien der erzeugten Fläche. Neben diesen trivialen Beispielen finden sich jedoch verstreut noch Hinweise auf Flächen, deren Fallinien in schrägen Ebenen verlaufen. So bestimmte E. Müller die *Schraubflächen* [1], der Verfasser in analoger Weise die *Spiralflächen* mit ebenen Fallinien [3]; in beiden Fällen treten *Parabeln* als Fallinien auf, nämlich die ebenen Komplexkurven des jeweiligen (tetraedralen) Bahntangentenkomplexes. *Algebraische Flächen* vierter Ordnung mit ebenen Fallinien in Gestalt von *Kegelschnitten* (insbesondere Kreisen) entdeckte L. Eckhart [2]; der zugehörige Schichtenplan besteht aus konfokalen Kegelschnitten. Daß es zu einem solchen Schichtenplan noch allgemeinere Flächen (achter bzw. im parabolischen Fall ebenfalls vierter Ordnung) mit Kegelschnitten als Fallinien gibt, zeigte kürzlich der Verfasser in einer Arbeit [4], die überdies die Antwort auf die Frage nach den *allgemeinsten Flächen mit ebenen Fallinien* enthält. Schließlich sei noch auf eine Untersuchung dreier spezieller *Römerflächen* hingewiesen [5], welche dadurch ausgezeichnet sind, daß sie durchwegs *Parabeln* als Fallinien besitzen.

Unter diesen Umständen drängt sich das Problem der Bestimmung *sämtlicher (reellen) Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien* geradezu auf, und es soll in der vorliegenden Abhandlung vollständig erledigt werden. Es zeigt sich dabei, daß die allgemeinsten Flächen mit *Ellipsen* oder *Hyperbeln* als Fallinien im wesentlichen — d. h. wenn man von Gesimsflächen absieht — mit den bereits in [4] behandelten Flächen 8. Ordnung identisch sind, während die Flächen mit *Parabeln* als Fallinien eine wesentlich ausgedehntere Mannigfaltigkeit bilden.

I. Flächen mit Ellipsen als Fallinien.

Legt man eine *Ellipse* im Raum durch zwei konjugierte Halbmesser CA und CB fest, so kann jede aus Ellipsen aufgebaute Fläche in einem Normalkoordinatensystem

$O(x, y, z)$ mittels der von einem Parameter v abhängigen Vektoren $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$ und $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ in der folgenden Weise angesetzt werden:

$$(1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{a}(v) \cdot \cos u + \mathbf{b}(v) \cdot \sin u + \mathbf{c}(v).$$

Sollen nun die Ellipsen $v = \text{const}$ die *Fallinien* der Fläche sein, dann müssen in jedem Punkt die Falltangente \mathbf{r}_u und die Flächennormale $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ einer Vertikalebene angehören. Unter der üblichen Annahme, daß die z -Achse die Lotrichtung anzeigt, bedeutet dies für die Komponenten n_i von \mathbf{n} die Bedingung

$$(2) \quad n_1 : n_2 = x_u : y_u.$$

Aus dieser für alle u und v geltenden Identität wären die neun Komponenten a_i , b_i und c_i ($i = 1, 2, 3$) von \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} zu ermitteln.

Die angedeutete Rechnung läßt sich nun durch eine einfache geometrische Überlegung erheblich abkürzen. Zunächst darf einmal der Ellipsenhalbmesser CA ohne Einschränkung der Allgemeinheit als horizontal vorausgesetzt, also von vornherein $a_3 = 0$ angenommen werden. Betrachten wir nunmehr die beiden Flächenkurven $u = \pm \pi/2$, die als Orte höchster bzw. tiefster Punkte kurz als „Kammweg“ bzw. „Talweg“ der (Gelände-) Fläche angesprochen werden sollen. In einem solchen Punkt B ist die Falltangente waagrecht ($\mathbf{r}_u = \mp \mathbf{a}$), mithin auch die Tangentialebene und damit auch jede andere Fortschreitrichtung in B , insbesondere jene des Kamm- oder Talwegs. Hieraus folgt aber sofort die wichtige Tatsache, daß *Kamm- und Talweg unserer Fläche horizontal* sind, falls sie nicht überhaupt auf Punkte zusammenschrumpfen. Verlegen wir diese Wege (bzw. Gipfel- oder Muldenpunkte) durch entsprechende Wahl des Maßstabs in die Ebenen $z = \pm 1$, dann liegt das Ellipsenzentrum C in der Koordinatenebene $z = 0$ und wir können von vornherein die Festsetzungen

$$(3) \quad a_3 = 0, \quad b_3 = 1, \quad c_3 = 0$$

treffen. Jetzt sind aber die Parameterlinien $u = \text{const}$ mit den *Schichtenlinien* $z = \sin u = \text{const}$ identisch, so daß sich die Forderung, die Ellipsen $v = \text{const}$ mögen die Fallinien der Fläche sein, einfach auf die *Orthogonalitätsbedingung*

$$(4) \quad \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = 0$$

reduziert.

Diese Bedingung lautet im vorliegenden Falle auf Grund des Ansatzes (1):

$$(5) \quad \mathbf{a}c' \sin u - \mathbf{b}c' \cos u + \mathbf{a}b' \sin^2 u - \mathbf{a}'b \cos^2 u + (\mathbf{a}a' - \mathbf{b}b') \sin u \cos u = 0,$$

und ist nur dann identisch in u erfüllt, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Es ist also das nachstehende System von Differentialgleichungen zu lösen:

$$(6) \quad \mathbf{a}c' = 0, \quad \mathbf{b}c' = 0, \quad \mathbf{a}b' = 0, \quad \mathbf{a}'b = 0, \quad \mathbf{a}a' - \mathbf{b}b' = 0.$$

Die ersten beiden Teilgleichungen von (6) lauten mit Rücksicht auf (3):

$$(7) \quad a_1 c'_1 + a_2 c'_2 = 0, \quad b_1 c'_1 + b_2 c'_2 = 0.$$

Hier ist nun zu unterscheiden, ob diese Gleichungen, als Bestimmungsgleichungen für c'_1 und c'_2 aufgefaßt, linear abhängig sind oder nicht.

1. Fall: $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. — Die Relation $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ besagt, daß die von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannte Ellipsenebene vertikal ist. Dies bedeutet aber, daß sich als Lösung eine der einleitend erwähnten *Gesimsflächen* (mit elliptischem Profil) einstellt. Dieser triviale Fall braucht mithin nicht weiter verfolgt zu werden.

2. Fall: $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. — Hier folgt aus $c'_1 = c'_2 = 0$ die Konstanz von c : Alle Fallellipsen haben denselben Mittelpunkt C , den wir durch eine Verschiebung des Koordinatensystems mit dem Ursprung zusammenfallen lassen wollen ($c_1 = c_2 = 0$). — Die dritte und vierte Teilgleichung von (6) bedingt die Konstanz von $ab = p$, die letzte die Konstanz von $a^2 - b^2 = 2q - 1$. Eliminiert man jetzt aus diesen Beziehungen, zusammen mit $a_1 b'_1 + a_2 b'_2 = 0$, die Variablen a_1 und a_2 , so erhält man in

$$(8) \quad \frac{p^2(b_1'^2 + b_2'^2)}{(b_1 b'_2 - b_2 b'_1)^2} - (b_1^2 + b_2^2) = 2q, \quad (p, q = \text{const})$$

die Differentialgleichung des *Kammwegs*. Mit Rücksicht auf die zu erwartende Drehschar von Lösungskurven erscheint die Einführung von Polarkoordinaten durch

$$(9) \quad b_1 = r \cos \varphi, \quad b_2 = r \sin \varphi$$

angezeigt. Die Gleichung (8) erhält dann die Gestalt

$$(10) \quad p^2(\dot{r}^2 + r^2) = r^4(r^2 + 2q)$$

und läßt sich nach Trennung der Variablen durch

$$(11) \quad \varphi = \int \frac{p \, dr}{r \sqrt{r^4 + 2qr^2 - p^2}}$$

integrieren. Dieses Integral ist elementar auswertbar¹⁾ und liefert für ein repräsentierendes Element der lösenden Drehschar die Kurve

$$(12) \quad 2r^2 \sin \varphi (p \cos \varphi + q \sin \varphi) = p^2.$$

Die kartesische Gleichung

$$(13) \quad 2b_2(pb_1 + qb_2) = p^2$$

lehrt, daß *Kamm- und Talweg* unserer Fläche *Hyperbeln* sind, die allenfalls in *Geraden* ausarten können.

Auf Grund dieses Zwischenergebnisses empfiehlt es sich nun, nach Drehung des Koordinatensystems und durch Verfügen über die noch offene Verteilung des Parameters v den adäquaten Ansatz

$$(14) \quad b_1 = m \cdot \text{ch } v, \quad b_2 = n \cdot \text{sh } v \quad (m, n = \text{const})$$

zu treffen und damit neuerdings in das Gleichungssystem (6) einzugehen²⁾. Mit Rücksicht auf $ab' = 0$ gilt dann

$$(15) \quad a_1 = \lambda n \cdot \text{ch } v, \quad a_2 = -\lambda m \cdot \text{sh } v,$$

und zwar wegen $ab = \text{const}$ mit festem λ , wenn $mn \neq 0$ ist; der Wert von λ ist zufolge $aa' = bb'$ mit $\lambda = 1$ (oder -1) festzulegen. Damit gelangt man zur nachstehenden *Parameterdarstellung* unserer Fläche:

$$(16) \quad \begin{aligned} x &= (m \sin u + n \cos u) \text{ch } v, \\ y &= (n \sin u - m \cos u) \text{sh } v, \\ z &= \sin u. \end{aligned}$$

¹⁾ Man setze die Quadratwurzel im Nenner gleich $r^2 - t$; für die rationalisierende neue Veränderliche t erhält man dann die Darstellung $t = p \cdot \text{ctg}(\varphi - \varphi_0)$.

²⁾ Der eine Hyperbelast wird dabei für reelle Parameterwerte, der andere für komplexe mit dem Imaginärteil πi erhalten.

Bedenkt man schließlich, daß die Multiplikation von x und y mit einem gemeinsamen konstanten Faktor nur eine unwesentliche affine Verformung der Fläche verursacht, bei der die Schichtenlinien bloß ähnliche Veränderungen erleiden und die Falllinien ihren Charakter bewahren, so mag man die Koeffizienten m und n noch durch die Festsetzung $m^2 + n^2 = 1$ normieren. Nimmt man überdies eine Verschiebung des Nullpunkts der u -Skala um den durch $\sin \alpha = m$, $\cos \alpha = n$ bestimmten Winkelwert α vor, so vereinfacht sich die Flächendarstellung zu

$$(17) \quad x = \cos u \cdot \operatorname{ch} v, \quad y = \sin u \cdot \operatorname{sh} v, \quad z = \sin(u + \alpha).$$

Nun ist noch der zurückgestellte Fall $mn = 0$ zu erledigen, in dem die Forderung $ab = \text{const}$ wegen $ab = 0$ keinen Aufschluß über λ gibt. Dafür liefert die Bedingung $a^2 - b^2 = \text{const}$ etwa für die Annahme $m = 0$, $n \neq 0$ die Komponenten von a vermöge

$$(15a) \quad a_1^2 = n^2 \operatorname{sh}^2 v + c, \quad a_2 = 0,$$

wobei allerdings nur die Wahl $c = 0$ etwas Neues bringt, nämlich die noch nicht durch (16) erfaßte Fläche

$$(18) \quad x = v \cdot \cos u, \quad y = v \cdot \sin u, \quad z = \sin u.$$

Hierbei wurde zur Vereinfachung der Parameterwechsel $n \operatorname{sh} v \rightarrow v$ vorgenommen. Die Alternative $n = 0$, $m \neq 0$ führt im wesentlichen auf die gleiche Fläche. Zusammenfassend ist damit festgestellt:

Satz 1. *Abgesehen von den Gesimsflächen mit elliptischem Profil sind die Flächen (17) und (18) und die durch affine Streckung der z -Koordinate daraus ableitbaren die einzigen Flächen, die Ellipsen zu Falllinien haben.*

Die Flächen (17), deren Schichtenplan aus einer Schar konfokaler Hyperbeln

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = 1$$

besteht, wozu als Falliniengründrisse die dazu orthogonalen konfokalen Ellipsen

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 v} = 1$$

treten, wurden bereits in [4] diskutiert. Diese Flächen sind geometrisch vollständig gekennzeichnet durch die Feststellung, daß ihre Schichtenlinien Hyperbeln sind, deren Brennpunkte auf dem vertikalen Parallelenpaar $x = \pm 1$, $y = 0$ liegen („Fokalachsen“), während die zugehörigen Scheitel das Ellipsenpaar $x = \pm \cos u$, $z = \sin(u + \alpha)$ erfüllen

(Abb. 1). Im allgemeinen handelt es sich um Flächen 8. Ordnung, deren Fallellipsen in den Tangentialebenen des vom Zentrum O ausstrahlenden Berührungskegels 4. Klasse verlaufen. Als Basis dieses der Fläche doppelt umschriebenen Kegels kann die Evolute des Talwegs genommen werden, der ja von allen Falllinien rechtwinklig überquert wird. — In den Sonderfällen $\alpha = 0$ ($m = 0$, $n = 1$) bzw. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($m = 1$, $n = 0$) stellen sich zum gleichen Schichtenplan jene Flächen 4. Ordnung

$$(19a, b) \quad \frac{x^2}{1 - z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{1 - z^2} = 1$$

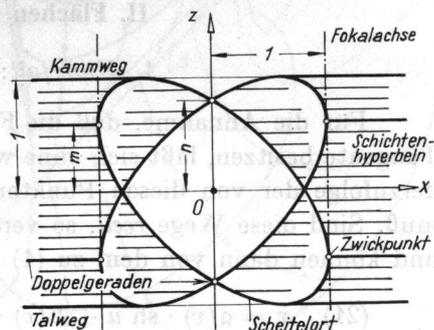


Abb. 1.

Hauptschnitt einer Fläche mit elliptischen Falllinien.

ein, welche L. Eckhart [2] behandelt hat. Hier ist das die Hauptscheitel der Schichtenhyperbeln tragende Ellipsenpaar in der xz -Ebene zu einem Kreis verschmolzen bzw. auf ein Streckenpaar eingeschrumpft. Die Fallinien verlaufen in den Ebenen durch die x -Achse bzw. die y -Achse und sind im ersten Fall durchwegs *Kreise*. Die Fläche (19a) ist im übrigen, wenn man von den zyklischen Gesimsflächen (= Rohrflächen mit ebener Mittellinie) absieht, die einzige Fläche mit Kreisen als Fallinien, wie die Betrachtung der entsprechenden Bedingung $a^2 = b^2$ sofort lehrt. Die Fläche (19b) ist aus einem anderen Grunde bemerkenswert: Sie gestattet eine Fortsetzung über die Schichtenebenen $z = \pm 1$ hinaus und besitzt jenseits dieser Ebenen Ellipsen als Schichtenlinien und Hyperbeln als Fallinien, wird uns also im II. Abschnitt wieder begegnen.

Die Fläche (18) endlich hat die kartesische Gleichung

$$(20) \quad \frac{x^2}{1-z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 0$$

und kann ersichtlich als Grenzform der Eckhartschen Flächen mit zusammenrückenden Fokalachsen angesehen werden. Der *Schichtenplan* besteht hier aus einem *Strahlbüschel*, ergänzt durch die konzentrischen Orthogonalkreise für die Falliniengrundrisse; die Fallinien selbst verlaufen in den Ebenen durch die x -Achse. Kinematisch entsteht die Fläche aus einem Normalstrahl der z -Achse, der sich gleichförmig um diese Achse dreht und gleichzeitig eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz längs der Achse vollführt; sie gehört mithin zu den „*Umschwungwendelflächen*“ W. Kautnys [6], wurde aber, da es sich speziell um den *Darboux-Mannheimschen Umschwung* handelt, auch schon früher von J. Krames [7] betrachtet, ohne daß bisher ihre Fallinieneigenschaft hervorgehoben worden wäre. Die Umschwungbahnen sind durchwegs Ellipsen auf Drehzylindern mit der Achse z und, soweit sie auf unserer Fläche verlaufen, deren Fallinien. Die Fläche wird demnach auch erhalten in der Gesamtheit aller Normalen, die man auf einen Drehzylinder in den Punkten eines ebenen Schrägschnitts errichtet. Man bestätigt ferner leicht, daß die Erzeugenden $u = \text{const}$ allesamt die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ berühren, so daß unsere Fläche ein (gerades) *Kugelkonoid* ist, und zwar jener rationale Sonderfall desselben, der sich auf Grund der Berührung der Leitgeraden z mit der Kugel einstellt. Diese Fläche gehört bekanntlich zu den *Strahlflächen 4. Grades VII. Art* nach der Einteilung von R. Sturm. — Die in Rede stehende Fläche ist schließlich noch insofern bemerkenswert, als sie die einzige Fläche mit geraden Schichtenlinien und ebenen Fallinien darstellt, wenn man von den Horizontalzylindern absieht³⁾.

II. Flächen mit Hyperbeln als Fallinien.

1. Unterfall: Eigentlicher, reeller Talweg.

Für die Annahme, daß die Fallhyperbeln im Endlichen Punkte mit waagerechter Tangente besitzen, läßt sich ohne weiteres die Schlußweise aus Abschnitt I übernehmen, derzufolge der von diesen Punkten gebildete *Tal- oder Kammweg horizontal* verlaufen muß. Sind diese Wege *reell*, so verlegen wir sie wieder in die Schichtenebenen $z = \pm 1$ und können dann von dem zu (1) und (3) analogen Ansatz

$$(21) \quad \xi = a(v) \cdot \text{sh } u + b(v) \cdot \text{ch } u + c(v) \quad \text{mit } a_3 = 0, b_3 = 1, c_3 = 0$$

³⁾ Die Frage nach den allgemeinsten *Strahlflächen* mit ebenen Fallinien ist hingegen noch offen. Bestimmt wurden bisher in [4] lediglich die abwickelbaren unter ihnen.

ausgehen²⁾. Da das Koordinatennetz auf der Fläche wieder von den Schichten- und Falllinien gebildet wird, ist bloß die Orthogonalitätsbedingung (4) identisch in u zu erfüllen, was auf die Gleichungen

$$(22) \quad ac' = 0, \quad bc' = 0, \quad ab' = 0, \quad a'b = 0, \quad aa' + bb' = 0$$

hinausläuft. Dieses Gleichungssystem ist in gleicher Weise wie (6) zu behandeln und führt nach Ausschluß der Gesimsflächen auf $c = 0$ und zur Feststellung, daß *Tal- und Kammweg Ellipsen* mit den Mittelpunkten $(0, 0, \pm 1)$ sind. Der adäquate Ansatz

$$(23) \quad b_1 = m \cdot \cos v, \quad b_2 = n \cdot \sin v, \quad b_3 = 1 \quad (m, n = \text{const})$$

liefert dann für a :

$$(24) \quad a_1 = n \cdot \cos v, \quad a_2 = m \cdot \sin v, \quad a_3 = 0.$$

Damit ergibt sich für die Fläche die *Parameterdarstellung*:

$$(25) \quad \begin{aligned} x &= (m \operatorname{ch} u + n \operatorname{sh} u) \cos v, \\ y &= (m \operatorname{sh} u + n \operatorname{ch} u) \sin v, \\ z &= \operatorname{ch} u. \end{aligned}$$

Zulassung axialer Streckungen von der z -Achse aus gestattet die Normierung $m^2 - n^2 = 1$ ($m^2 - n^2 = -1$ würde nichts anderes liefern, $m^2 - n^2 = 0$ nur den trivialen Grenzfall von Drehflächen). Verschiebung des Nullpunktes der u -Skala um den durch $\operatorname{ch} \alpha = m, \operatorname{sh} \alpha = n$ erklärten Wert α vereinfacht die Flächengleichung schließlich zu

$$(26) \quad x = \operatorname{ch} u \cdot \cos v, \quad y = \operatorname{sh} u \cdot \sin v, \quad z = \operatorname{ch} (u - \alpha).$$

Im allgemeinen handelt es sich wieder um algebraische *Flächen 8. Ordnung*, aufgebaut aus *Schichtenellipsen* $u = \text{const}$, die im Schichtenplan eine *konfokale Schar*

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u} = 1$$

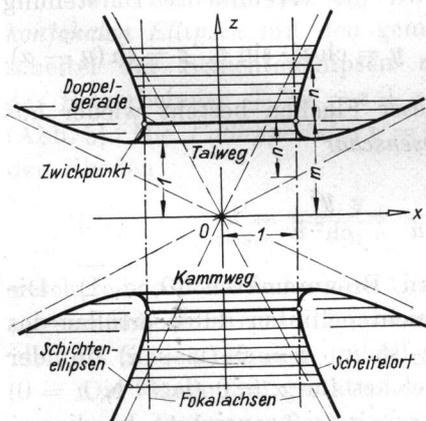


Abb. 2. Hauptschnitt einer Fläche mit hyperbolischen Falllinien und reellen Kamm- und Talweg.

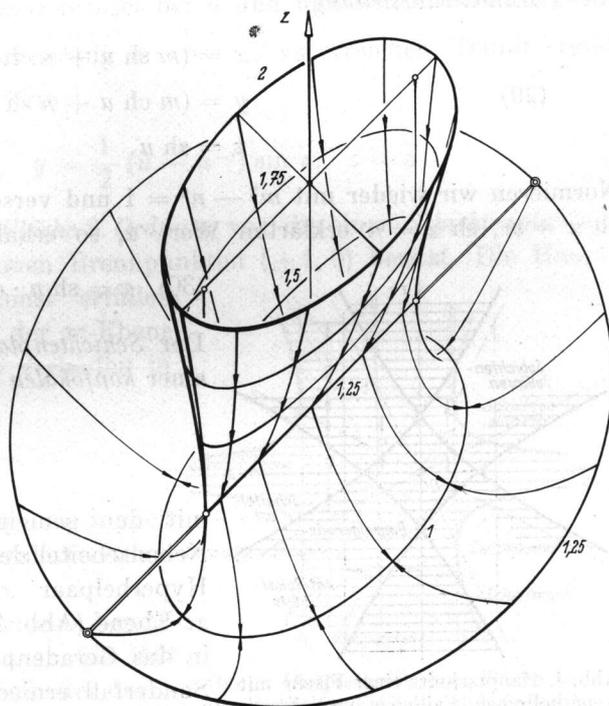


Abb. 3. Kavalierperspektive der Fläche von Abb. 2.

mit den gemeinsamen Brennpunkten $(\pm 1, 0)$ bilden. Die Hauptscheitel der Schichtenellipsen erfüllen das Hyperbelpaar $x = \pm \operatorname{ch} u$, $z = \operatorname{ch}(u - \alpha)$ in der xz -Ebene (Abb. 2). Ein anschauliches Bild des oberen Flächenmantels zeigt Abb. 3. Die Fallhyperbeln verlaufen in den Tangentialebenen des der Fläche vom Zentrum aus doppelt umschriebenen Berührungskegels 4. Klasse, dessen Schichtenlinie $z = 1$ die Evolute des elliptischen Talwegs (23) ist. — Der Sonderfall $\alpha = 0$ ($m = 1$, $n = 0$) liefert die äußeren Mäntel $|z| \geq 1$ jener *Eckhartschen Fläche 4. Ordnung*

$$(27) \quad \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2 - 1} = 1,$$

deren Innenmantel $|z| \leq 1$ bereits in (19b) auftrat.

2. Unterfall: Eigentlicher, imaginärer Talweg.

Besitzen die (reellen) Fallhyperbeln keine reellen Horizontaltangenten, dann fallen *Tal- und Kammweg konjugiert-imaginär* aus und können in die Schichtenebenen $z = \pm i$ verlegt werden. Man erhält die gesuchten Flächen, wenn man auf die Lösungsflächen des 1. Unterfalles vom Ursprung aus die zentrische Ähnlichkeit mit dem Faktor i ausübt. Will man jedoch Betrachtungen im Komplexen vermeiden, so muß man mit dem Ansatz

$$(28) \quad \mathfrak{r} = a(v) \cdot \operatorname{ch} u + b(v) \cdot \operatorname{sh} u + c(v)$$

in die allgemeine Bedingung (2) eingehen, wobei von vornherein $a_3 = 0$ angenommen werden darf. Man findet zunächst $b'_3 = c'_3 = 0$ und kann dementsprechend etwa $b_3 = 1$ und $c_3 = 0$ festsetzen. Damit ist aber bereits gewährleistet, daß die v -Linien die Schichtenlinien sind, und man kommt auf die Orthogonalitätsbedingung (4) zurück, die auch in diesem Fall auf das Gleichungssystem (22) führt, dessen Lösung (23) und (24) zusammen mit $c = 0$ unmittelbar übernommen werden kann. Die gesuchte Fläche besitzt mithin die *Parameterdarstellung*

$$(29) \quad \begin{aligned} x &= (m \operatorname{sh} u + n \operatorname{ch} u) \cos v, \\ y &= (m \operatorname{ch} u + n \operatorname{sh} u) \sin v, \\ z &= \operatorname{sh} u. \end{aligned}$$

Normieren wir wieder mit $m^2 - n^2 = 1$ und verschieben wir die u -Skala um den durch $\operatorname{ch} \alpha = m$, $\operatorname{sh} \alpha = n$ erklärten Wert α , so erhalten wir die vereinfachte Darstellung

$$(30) \quad x = \operatorname{sh} u \cdot \cos v, \quad y = \operatorname{ch} u \cdot \sin v, \quad z = \operatorname{sh}(u - \alpha).$$

Der *Schichtenplan* dieser Flächen besteht wieder aus einer *konfokalen Ellipsenschar*

$$\frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{ch}^2 u} = 1$$

mit den gemeinsamen Brennpunkten $(0, \pm 1)$. Die Nebenscheitel der Schichtenellipsen selbst erfüllen das Hyperbelpaar $x = \pm \operatorname{sh} u$, $z = \operatorname{sh}(u - \alpha)$ in der xz -Ebene (Abb. 4), welches für $\alpha = 0$ ($m = 1$, $n = 0$) in das Geradenpaar $x \pm z = 0$ ausartet. In diesem Sonderfall erniedrigt sich die Ordnung der Fläche von acht auf vier und es stellt sich die schon bei Eckhart [2]

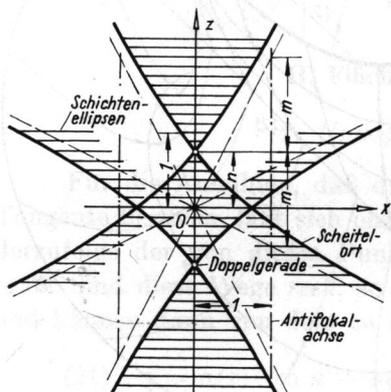


Abb. 4. Hauptschnitt einer Fläche mit hyperbolischen Fallinien und imaginärem Kamm- und Talweg.

erwähnte Fläche

$$(31) \quad \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2 + 1} = 1$$

ein.

3. Unterfall: Uneigentlicher Talweg.

Den Übergang zwischen den beiden erledigten Unterfällen bildet die Annahme von Fallhyperbeln mit je einer waagerechten Asymptote. Hier eignet sich der Ansatz

$$(32) \quad \chi = a(v) \cdot u^{-1} + b(v) \cdot u + c(v) \quad \text{mit} \quad a_3 = 0, \quad b_3 = 1.$$

Die allgemeine Bedingung (2) liefert durch Koeffizientenvergleich der niedrigsten Potenz von u die Forderung $(a_1^2 + a_2^2) c_3 = 0$, der mit $c_3 = 0$ genügt wird. Damit fallen aber die Schichtenlinien mit den v -Linien zusammen und es bleibt wieder bloß die Orthogonalitätsbedingung (4) des Parameternetzes zu erfüllen, was auf folgendes Gleichungssystem führt:

$$(33) \quad ac' = 0, \quad bc' = 0, \quad aa' = 0, \quad bb' = 0, \quad a'b = ab'.$$

Die ersten beiden Gleichungen ziehen nach Ausschluß der Gesimsflächen das Verschwinden von c' nach sich, was nach Verschiebung des Koordinatensystems $c = 0$ zu setzen erlaubt. Die dritte und vierte Teilgleichung verlangen $a^2 = \text{const}$ und $b^2 = \text{const}$ und gestatten den Ansatz

$$(34) \quad a_1 = a \cos v, \quad a_2 = a \sin v, \quad b_1 = b \cos w, \quad b_2 = b \sin w \quad \text{mit} \quad a, b = \text{const}.$$

Die letzte Bedingung (33) wird dann in nichttrivialer Weise nur durch

$$(35) \quad w = c - v$$

erfüllt, wobei nach entsprechender Drehung des Koordinatensystems $c = \pi$ genommen werden kann. Durch einfachen Parameterwechsel bei u und unwesentliche affine Verformungen ist schließlich noch die Normierung $a = b = \frac{1}{2}$ zu erreichen. Damit ergibt sich für die Lösungsfläche die Normalform

$$(36) \quad x = \frac{1}{2}(u + u^{-1}) \cos v, \quad y = \frac{1}{2}(u - u^{-1}) \sin v, \quad z = u.$$

Auch hier liegt eine algebraische Fläche 8. Ordnung vor, die einen Schichtenplan aus konfokalen Ellipsen mit den gemeinsamen Brennpunkten $(\pm 1, 0)$ besitzt. Die Hauptscheitel der Schichtenellipsen $u = \text{const}$ erfüllen das Hyperbelpaar $\pm 2x = z + z^{-1}$ in der xz -Ebene (Abb. 5). Die Fallhyperbeln $v = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen

$$(37) \quad \frac{x}{\cos v} + \frac{y}{\sin v} = z,$$

welche einen der Fläche vom Ursprung aus doppelt angeschriebenen Kegel 4. Klasse mit regulären Astroiden als Schichtenlinien umhüllen.

Die Fläche (36) gestattet nebenbei eine bemerkenswerte funktionentheoretische Deutung: Sie läßt sich nämlich auffassen als die Betragsfläche der durch

$$(38) \quad 2\zeta = \omega + \omega^{-1}$$

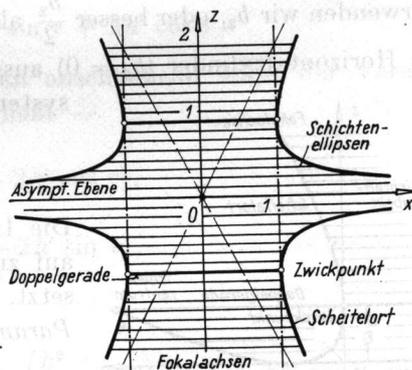


Abb. 5. Hauptschnitt einer Fläche mit hyperbolischen Falllinien und uneigentlichem Talweg.

definierten komplexen analytischen Funktion $\omega = f(\zeta)$, d. h. als Relief des über der Gaußschen ζ -Ebene aufgetragenen absoluten Betrags von ω . Schreibt man nämlich $\zeta = x + iy$ und $\omega = u \cdot e^{iv}$, so gilt $|\omega| = u$ und die Aufspaltung von (38) in Real- und Imaginärteil führt genau auf die Darstellung (36).

Abschließend sei das Hauptergebnis der Untersuchung festgehalten im

Satz 2. *Abgesehen von den Gesimsflächen mit hyperbolischem Profil sind die Flächen (26), (30) und (36) und die durch affine Streckung der z -Koordinate daraus ableitbaren die einzigen Flächen, die Hyperbeln zu Falllinien haben.*

III. Flächen mit Parabeln als Falllinien.

1. Unterfall: Eigentlicher Talweg.

Unter der Annahme, daß die Fallparabeln Stellen mit horizontaler Tangente haben — was nur bei geneigter Achsenlage möglich ist —, muß der von den Berührungspunkten gebildete *Talweg* natürlich wieder in einer *waagrechten Ebene* verlaufen, die wir mit der Koordinatenebene $z = 0$ identifizieren können. Dementsprechend nehmen wir dann den Ausgang vom Ansatz

$$(39) \quad \chi = \alpha(v) + \beta(v) \cdot u + \gamma(v) \cdot u^2 \quad \text{mit } \alpha_3 = \beta_3 = 0, \gamma_3 = 1,$$

welcher, da die Schichtenlinien durch $u = \text{const}$ gekennzeichnet sind, bloß der Orthogonalitätsbedingung (4) zu genügen hat. Diese verlangt die Erfüllung des Gleichungssystems

$$(40) \quad \alpha' \beta = 0, \quad 2\alpha' \gamma + \beta \beta' = 0, \quad 2\beta' \gamma + \beta \gamma' = 0, \quad \gamma \gamma' = 0.$$

Da γ die Achsenrichtung der Fallparabel anzeigt, bedeutet die letzte Teilgleichung wegen $\gamma^2 = \text{const}$ bei $\gamma_3 = 1$, daß *alle Fallparabeln gleiche Achsenneigung* haben, die im übrigen vermöge affiner Umformung mit 45° normiert werden mag; es soll mithin gelten

$$(41) \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Zuerst möge der *Sonderfall* erledigt werden, bei welchem alle Fallparabeln sogar die *gleiche Achsenrichtung* haben, die etwa durch $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$ festgelegt sei. Die vorletzte Teilgleichung (40) bedingt dann $\beta_1' = 0$, also $\beta_1 = 2m = \text{const}$. Die restlichen Bestimmungsgleichungen lauten dann, in Koordinaten geschrieben:

$$(42) \quad 2m\alpha_1' + \beta_2\alpha_2' = 0, \quad 2\alpha_1' + \beta_2\beta_2' = 0.$$

Verwenden wir β_2 , oder besser $\frac{\beta_2}{2}$ als unabhängige Veränderliche v — womit gleichzeitig die Horizontalzylinder ($\beta_2 = 0$) ausgeschlossen werden — so erhalten wir das Lösungssystem

$$(43) \quad \alpha_1 = m^2 - v^2, \quad \alpha_2 = 2mv, \quad \alpha_3 = 0; \\ \beta_1 = 2m, \quad \beta_2 = 2v, \quad \beta_3 = 0.$$

Die Integrationskonstanten wurden dabei mit Rücksicht auf zulässige Koordinatenverschiebungen passend festgesetzt. Die gesuchte Fläche besitzt demnach die folgende *Parameterdarstellung*:

$$(44) \quad x = (u + m)^2 - v^2, \quad y = 2v(u + m), \quad z = u^2.$$

Der zugehörige *Schichtenplan* besteht aus *konfokalen Parabeln* mit dem Ursprung als gemeinsamem Brenn-

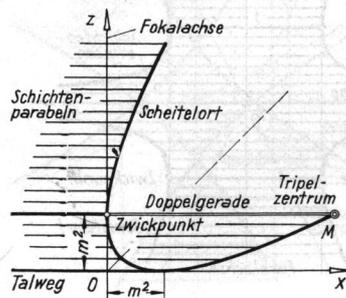


Abb. 6.
Hauptansicht einer Steinerfläche
mit achsenparallelen Fallparabeln.

punkt; unter ihnen findet sich für $u = 0$ auch der Talweg $y^2 = 4m^2(m^2 - x)$. Die Scheitel der Schichtenparabeln selbst verteilen sich auf die Profilkurve $x = (u + m)^2$, $z = u^2$ in der Symmetrieebene $y = 0$, also für $m \neq 0$ auf eine Parabel (Abb. 6), für $m = 0$ auf eine Gerade.

Die für $m \neq 0$ vorliegende (etwa mit $m = 1$ zu normierende und in Abb. 7 anschaulich dargestellte) Fläche 4. Ordnung kann als Grenzform der Flächen aus Satz 1 und 2 angesehen werden, wenn eine der Fokalachsen ins Unendliche rückt; sie wurde bereits in [4] und [5] betrachtet und daselbst als *Steinersche Römerfläche* erkannt⁴⁾. Die Fallparabeln $v = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen $v(z - x) + my = v^3 + m^2v$, die einen der Fläche umschriebenen Zylinder 3. Klasse mit der Erzeugendenrichtung 1:0:1 und der Evolute der Talwegparabel $z = 0$ als Basis einhüllen. — Für $m = 0$ reduziert sich die Fläche auf einen *Reyeschen Kegel 2. Grades*

$$(45) \quad y^2 = 4z(z - x),$$

der die xy -Ebene längs der x -Achse (= Talweg) berührt und einen Fokalstrahl in der z -Achse hat. Seine Falllinien sind die in den untereinander parallelen Ebenen $x - z = \text{const}$ gelegenen Parabeln.

Wenden wir uns nach dieser Einschaltung nunmehr wieder dem *allgemeinen Fall* mit *veränderlicher Achsenrichtung* der Fallparabeln zu. Hier liegt es nahe, die Bedingung (41) durch

$$(46) \quad c_1 = \cos v, \quad c_2 = \sin v$$

zu erfüllen, also als Parameter v die Achsenrichtung im Grundriß einzuführen. Das Gleichungssystem (40) lautet dann:

$$(47) \quad \begin{aligned} a'_1 b_1 + a'_2 b_2 &= 0, \\ b_1 b'_1 + b_2 b'_2 + 2(a'_1 \cos v + a'_2 \sin v) &= 0, \\ -b_1 \sin v + b_2 \cos v + 2(b'_1 \cos v + b'_2 \sin v) &= 0. \end{aligned}$$

Da für die vier unbekanntenen Funktionen nur drei Gleichungen vorliegen, darf noch eine zusätzliche Relation eingeführt werden. Wir schreiben zweckmäßig die Kombination

$$(48) \quad b_1 \cos v + b_2 \sin v = h(v)$$

mit beliebiger (zweimal differenzierbarer) Funktion $h(v)$ vor. Vergleich der Ableitung mit der letzten Gleichung (47) liefert dann die Darstellung

$$(49) \quad b_1 = h \cos v - 2h' \sin v, \quad b_2 = h \sin v + 2h' \cos v.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen (47) erhält man anschließend unter der Voraussetzung $h' \neq 0$ — welche die Gesimsflächen ausschließt —

$$(50) \quad \begin{aligned} a'_1 &= -\left(\frac{h}{4} + h''\right)(h \sin v + 2h' \cos v), \\ a'_2 &= \left(\frac{h}{4} + h''\right)(h \cos v - 2h' \sin v), \end{aligned}$$

und durch Integration

$$(51) \quad a_1 = \left(\frac{h^2}{4} - h'^2\right) \cos v - hh' \sin v, \quad a_2 = \left(\frac{h^2}{4} - h'^2\right) \sin v + hh' \cos v.$$

⁴⁾ Die Fläche berührt nämlich die Fernebene, die Schichtenebene $z = 0$, sowie die beiden durch die Fokalachse legbaren Minimizebenen $x \pm iy = 0$ längs Kegelschnitten, was zu ihrer Identifizierung ausreicht.

Damit sind wir zu einer *integralfreien Darstellung aller Lösungsflächen* gelangt:

$$(52) \quad \begin{aligned} x &= \left(\frac{h^2}{4} - h'^2\right) \cos v - hh' \sin v + u(h \cos v - 2h' \sin v) + u^2 \cos v, \\ y &= \left(\frac{h^2}{4} - h'^2\right) \sin v + hh' \cos v + u(h \sin v + 2h' \cos v) + u^2 \sin v, \\ z &= u^2. \end{aligned}$$

Die Bauart der ersten beiden Gleichungen verlockt dazu, die Koordinaten x und y zu einer komplexen Größe $\zeta = x + iy$ zusammenzufassen. Man erhält damit die überraschend einfache Beziehung

$$(53) \quad \zeta = x + iy = \left(\frac{h}{2} + ih' + u\right)^2 e^{iv},$$

die als komplexe Darstellung des *Schichtenplans* verwendbar ist. Die Tatsache, daß die in u quadratische Gleichung $x + iy = 0$ eine Doppelwurzel besitzt, bedeutet geometrisch, daß der durch den Ursprung O gehende Minimalstrahl $x + iy = 0$ den Grundriß jeder Fallparabel $v = \text{const}$ berührt, woraus zusammen mit der analogen Feststellung für $x - iy = 0$ folgt, daß *alle Fallparabelgrundrisse den Ursprung zum gemeinsamen Brennpunkt* haben. Die z -Achse tritt mithin wieder als *Fokalachse* der Fläche auf.

Im Hinblick darauf, daß ζ und z reine Quadrate sind, liegt es nahe, neben der Lösungsfläche Φ noch jene Fläche Φ^* zu betrachten, die durch

$$(54) \quad \zeta^* = x^* + iy^* = \left(\frac{h}{2} + ih' + u\right) e^{\frac{iv}{2}}, \quad z^* = u$$

beschrieben wird; das ist ausführlich:

$$(55) \quad \begin{aligned} x^* &= \left(\frac{h}{2} + u\right) \cos \frac{v}{2} - h' \cdot \sin \frac{v}{2}, \\ y^* &= \left(\frac{h}{2} + u\right) \sin \frac{v}{2} + h' \cdot \cos \frac{v}{2}, \\ z^* &= u. \end{aligned}$$

Auch auf dieser *Hilfsfläche* Φ^* besteht das Parameternetz aus den Schichtenlinien ($u = \text{const}$) und den Falllinien ($v = \text{const}$), da die Orthogonalitätsbedingung $\mathfrak{r}_u^* \mathfrak{r}_v^* = 0$ erfüllt ist; da die *Falllinien* jedoch *Geraden* sind (\mathfrak{r}^* linear in $u!$), handelt es sich bei Φ^* um eine *Böschungstorse*, und zwar von 45° Neigung. Sie kann als Einhüllende der Ebenenschar

$$(56) \quad x^* \cos \frac{v}{2} + y^* \sin \frac{v}{2} - z^* = \frac{h}{2}$$

erhalten werden, womit die Funktion $h(v)$ eine einfache geometrische Deutung erfährt.

Der Zusammenhang zwischen den Flächen Φ^* und Φ wird durch eine *rationale Punkttransformation* $\mathfrak{T} = P^* \rightarrow P$ vermittelt, die wegen $\zeta = \zeta^{*2}$ durch

$$(57) \quad x = x^{*2} - y^{*2}, \quad y = 2x^*y^*, \quad z = z^{*2}$$

beschrieben wird. Sie weist jedem Punkt P^* einen einzigen Punkt P zu, während umgekehrt jeder Punkt P aus acht Punkten P^* hervorgeht, von denen für $z > 0$ vier reell und vier imaginär sind: dem Punkt (x^*, y^*, z^*) treten gleichberechtigt noch die Punkte $(x^*, y^*, -z^*)$, $(-x^*, -y^*, \pm z^*)$, $(iy^*, -ix^*, \pm z^*)$ und $(-iy^*, ix^*, \pm z^*)$ zur Seite.

\mathfrak{Z} verwandelt gerade Linien l^* in Parabeln l , wobei deren Achsenneigung γ mit der Geradenneigung γ^* durch $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}^2 \gamma^*$ verknüpft ist. Wird eine Figur \mathfrak{F}^* vom Ursprung aus im Verhältnis $\mu : 1$ zentrisch-ähnlich verändert, so erfährt die entsprechende Figur \mathfrak{F} eine zentrisch-ähnliche Veränderung im Maßstab $\mu^2 : 1$; Drehung von \mathfrak{F}^* um die z -Achse bewirkt eine Drehung von \mathfrak{F} um den doppelten Betrag. Diese Bemerkung erlaubt es, zu transformierende Gebilde in einer bequemen Normallage vorauszusetzen. — Die Transformation \mathfrak{Z} mag in zwei Schritte zerlegt werden:

1. Die durch $\zeta = \zeta^{*2}$ erklärte Verwandtschaft \mathfrak{U} , welche im Grundrißfeld wie in allen Schichtenebenen die gleiche *konforme Abbildung* vollzieht; diese wohlbekannt eebene Abbildung ist einvierdeutig und quadratisch und verwandelt Geraden in Parabeln, die ihren Brennpunkt im Nullpunkt haben, ferner Kreise in Pascalschnecken.

2. Die bei unverändertem Grundrißfeld durch $z = z^{*2}$ definierte einzweideutige Verwandtschaft \mathfrak{B} , welche nur die Höhenverteilung der Schichtenebenen beeinflußt; sie führt geneigte Raumgeraden in Parabeln mit lotrechter Achse über, die die Grundebene $z = 0$ berühren.

Diese Zusammensetzung $\mathfrak{Z} = \mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ läßt unmittelbar erkennen, daß dem Schichten- und Falliniennetz einer beliebigen Fläche das gleichartige Netz auf der entsprechenden Fläche zugeordnet wird, womit die tiefere geometrische Ursache für den Zusammenhang unserer Flächen Φ mit den Böschungstorsen Φ^* — den Flächen mit geraden Fallinien — aufgedeckt erscheint. Nunmehr ist auch klar, daß eine Fläche mit parabolischen Fallinien nach festgelegter *Fokalachse* z im wesentlichen durch ihren *Talweg* bestimmt ist, der beliebig vorgeschrieben werden darf:

Satz 3. *Um eine von einer Gesimsfläche verschiedene Fläche Φ mit Parabeln als Fallinien zu ermitteln, deren Talweg w in der xy -Ebene gegeben ist und deren Fokalachse in der z -Achse liegt, bilde man w vermöge $x + iy = (x^* + iy^*)^2$ konform ab, lege durch die so erhaltene Linie w^* eine Böschungstorse Φ^* und transformiere dieselbe mit Hilfe der Verwandtschaft \mathfrak{Z} (57) zurück.*

Um einfache *Beispiele* zu gewinnen, kann man auch unmittelbar von einfachen Böschungstorsen Φ^* ausgehen. Wählen wir im einfachsten Fall als Böschungstorse eine Ebene II^* , etwa die Ebene $x^* - z^* = m$, so gelangen wir über die Parameterdarstellung

$$(58) \quad x^* = u + m, \quad y^* = v, \quad z^* = u$$

vermöge (57) genau zu dem Sonderfall (44) einer *Steinerfläche* II mit achsenparallelen Fallparabeln (Abb. 7) bzw. (für $m = 0$) zum *Reyekegel* (45)⁵).

Als nächstes Beispiel einer Böschungstorse betrachten wir noch einen *Drehkegel* Δ^* mit lotrechter Achse, darstellbar durch

$$(59) \quad x^* + iy^* = m + (u + n)e^{\frac{iv}{2}}, \quad z^* = u, \quad (m \neq 0).$$

Die mittels der Transformation \mathfrak{Z} daraus abgeleitete Fläche Δ — die vermöge (52) aus der Annahme $h(v) = 2\left(m \cos \frac{v}{2} + n\right)$ hervorgehen würde — besitzt die komplexe Parameterdarstellung

$$(60) \quad x + iy = m^2 + 2m(u + n)e^{\frac{iv}{2}} + (u + n)^2 e^{iv}, \quad z = u^2$$

⁵ Den ∞^2 Geraden l^* der Ebene II^* entsprechen ∞^2 Parabeln l auf der Fläche II , was neuerlich bestätigt, daß im allgemeinen eine Römerfläche vorliegen muß.

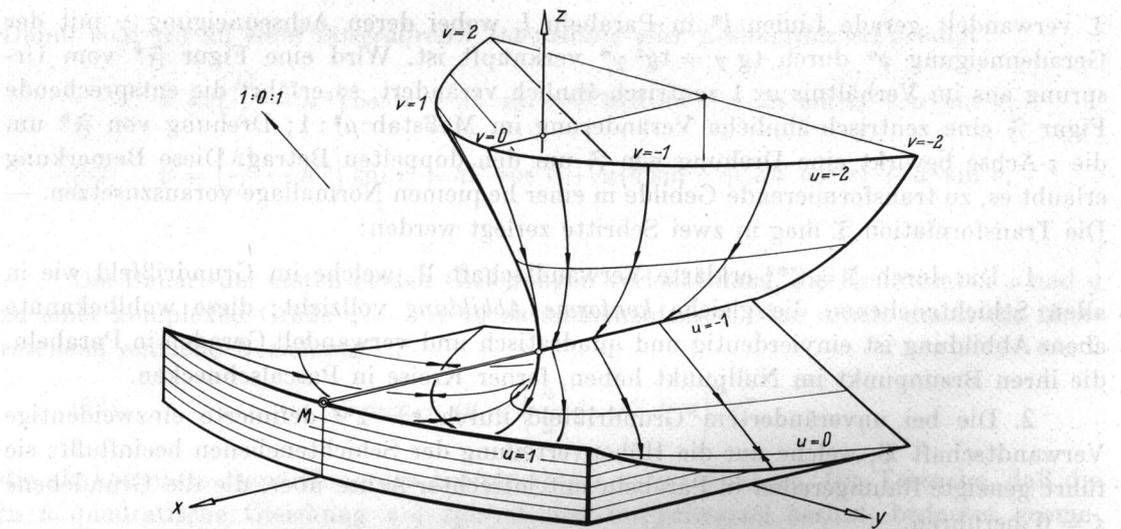


Abb. 7. Axonometrische Darstellung der Steinerfläche II gemäß Abb. 6.

und ist offenbar dadurch ausgezeichnet, daß die *Fallparabeln* einen gemeinsamen Punkt besitzen, nämlich den der Kegelspitze $S^*(m, 0, -n)$ entsprechenden Punkt $S(m^2, 0, n^2)$. Der *Schichtenplan* besteht aus konzentrischen und konfokalen *Pascalschnecken*. Für $n \neq 0$ ist die Fläche Δ von 8. Ordnung und besitzt als Talweg $u = 0$ eine der Pascalschnecken des Schichtenplans. Die Ebenen der Fallparabeln umhüllen einen Kegel 4. Klasse mit der Spitze S und der Talwegevolute als Basis. — Besonders hervorzuheben ist die zu $n = 0$ gehörige Fläche 4. Ordnung Δ_0 , bei welcher der Talweg auf einen punktförmigen „Talkessel“ an der Stelle $S(m^2, 0, 0)$ zusammengeschrumpft ist. Die *Fallparabeln* $v = \text{const}$ verteilen sich in diesem Sonderfall auf das *Ebenenbüschel* $x + z - m^2 = y \cdot \text{ctg} \frac{v}{2}$. Von diesem Gesichtspunkt her wurde die Fläche Δ_0 bereits in [5] untersucht und als eine zu II affine *Römerfläche* erkannt, die ihr Tripelzentrum in S hat. Sie läßt sich im übrigen, wie aus der Darstellung (60) leicht hervorgeht, ähnlich wie die Fläche (36) als *Betragsfläche* der komplexen analytischen Funktion

$$(61) \quad \omega = (m \pm \sqrt{\zeta})^2$$

auffassen.

Bei allen weiteren Annahmen wird die Torse Φ^* eine nichtausgeartete *Gratlinie* besitzen, die in transformierter Gestalt auch bei der Fläche Φ wiederzufinden ist und von allen Fallparabeln berührt wird. Hier kann beispielsweise die *Spiralfläche* mit ebenen Falllinien angeführt werden [3], die aus einer *Spiraltorse* Φ^* mit der Achse z und dem Fixpunkt O hervorgeht; die Gratlinien sind bei Ausgangs- und Endfläche naturgemäß Bahnspiralen („zylindro-konische Spiralen“), während als Talweg eine logarithmische Spirale auftritt. — Da im übrigen jede beliebige Böschungstorse Φ^* als Einhüllende von ∞^1 gleichgeneigten Ebenen Π^* erzeugt werden kann, so kann die entsprechende Fläche Φ auch als *Einhüllende einer einparametrischen Schar ähnlicher Steinerflächen II* (s. o.) entstehen, wobei die Fallparabeln als Charakteristiken auftreten.

2. Unterfall: Uneigentlicher Talweg.

Bei *waagerechter Achsenlage* der Fallparabeln tritt kein eigentlicher Talweg auf. Geht man statt dessen von der „Basisschichtenlinie“ in der xy -Ebene aus, so braucht

der Ansatz (39) nur geringfügig modifiziert zu werden:

$$(62) \quad \chi = a(v) + b(v) \cdot u + c(v) \cdot u^2 \quad \text{mit} \quad a_3 = c_3 = 0, \quad b_3 = 1.$$

Da auch jetzt die v -Linien die Schichtenlinien sind, ist nur die Orthogonalitätsbedingung (4) zu erfüllen, und diese führt wiederum auf das Gleichungssystem (40), dessen Auflösung unmittelbar übernommen werden kann.

So ist im *Sonderfall* der Fallparabeln gleicher Achsenrichtung ($c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$) in der Darstellung (44) nur die letzte Teilgleichung durch $z = u$ zu ersetzen. Mittels Parameter- und Höhenverschiebung gelangt man zu der vereinfachten Darstellung

$$(63) \quad x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u$$

der Lösungsfläche, deren kartesische Gleichung

$$(64) \quad y^2 = 4z^2(z^2 - x)$$

schon bei L. Eckhart [2] erwähnt erscheint. Es handelt sich um eine interessante Grenzform einer *Steinerschen Römerfläche* (vgl. Abb. 8), deren zahlreiche merkwürdige Eigen-

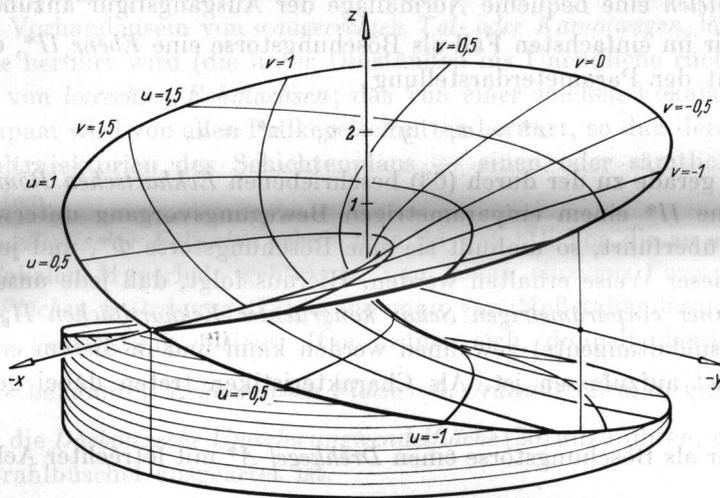


Abb. 8. Axonometrische Darstellung der Eckhartschen Fläche II_0 .

schaften in [5] dargelegt worden sind. Der *Schichtenplan* besteht wie bei der Fläche II (44) aus *konfokalen Parabeln*, die Fallparabeln ($v = \text{const}$) verteilen sich auf das Ebenenbündel um die x -Achse. Vermerkt sei hier nur noch, daß die Fläche wegen der Beziehung

$$(65) \quad \zeta = x + iy = (u + iv)^2$$

als *Riemannsche Fläche* der komplexen analytischen Funktion $\omega = \sqrt{\zeta}$ aufgefaßt werden kann, deren über der ζ -Ebene aufgetragenen Realteil $z = \text{Re } \omega = u$ sie repräsentiert.

Für die *allgemeinen Lösungsflächen* (mit veränderlicher Achsenrichtung der Fallparabeln) ist die integrallose, eine willkürliche Hilfsfunktion $h(v)$ benützende Darstellung (52) lediglich durch Abänderung der Höhenkote auf $z = u$ zu modifizieren. In komplexer Schreibweise haben wir also für die von Gesimsflächen verschiedenen Flächen mit Fallparabeln horizontaler Achsenlage die nachstehende *Parameterdarstellung*:

$$(66) \quad \zeta = x + iy = \left(\frac{h}{2} + ih' + u \right)^2 e^{iv}, \quad z = u.$$

Die z -Achse ist auch hier *Fokalachse*, das heißt, die sie enthaltenden Minimalebenen $x \pm iy = 0$ berühren alle Fallparabeln, so daß deren Grundrisse den Ursprung zum gemeinsamen Brennpunkt haben.

Betrachten wir neben der Lösungsfläche Φ (66) die durch (54) definierte *Böschungstorse* Φ^* : Der Zusammenhang wird jetzt durch die oben erklärte *rationale Punkttransformation* $\mathfrak{U} = P^* \rightarrow P$ vermittelt, die in jeder Schichtenebene bei unveränderter Höhe die konforme Abbildung $\zeta = \zeta^{*2}$ bewirkt und dementsprechend die kartesische Darstellung

$$(67) \quad x = x^{*2} - y^{*2}, \quad y = 2x^*y^*, \quad z = z^*$$

besitzt. \mathfrak{U} verwandelt schräge Raumgeraden l^* in Parabeln l mit waagerechter Hauptachse und der Fokalachse z .

Satz 4. Die von *Gesimsflächen* verschiedenen Flächen Φ mit Parabeln waagerechter Achsenlage als *Falllinien* können mittels der Transformation \mathfrak{U} (67) aus beliebigen *Böschungstorsen* Φ^* abgeleitet werden.

Verschraubung der Torse Φ^* um die z -Achse zieht auch eine Verschraubung der Fläche Φ (mit gleicher Schub- und verdoppelter Drehkomponente) nach sich, was in den folgenden *Beispielen* eine bequeme Normallage der Ausgangsfigur anzunehmen erlaubt.

Wählen wir im einfachsten Fall als Böschungstorse eine *Ebene* Π^* , etwa die Ebene $x^* - z^* = 0$ mit der Parameterdarstellung

$$(68) \quad x^* = u, \quad y^* = v, \quad z^* = u,$$

so gelangen wir gerade zu der durch (63) beschriebenen *Eckhartschen Römerfläche* Π_0 . — Wird eine Ebene Π^* einem einparametrischen Bewegungsvorgang unterworfen, der die z -Achse in sich überführt, so umhüllt sie eine Böschungstorse Φ^* , und jede Böschungstorse kann in dieser Weise erhalten werden. Hieraus folgt, daß jede unserer Flächen Φ als *Hüllfläche einer einparametrischen Schar kongruenter Eckhartflächen* Π_0 mit derselben Fokalachse (Kuspidaltangente) gewonnen werden kann und in diesem erweiterten Sinn als „*Bewegfläche*“ aufzufassen ist. Als Charakteristiken treten dabei gerade die Fallparabeln auf.

Wählen wir als Böschungstorse einen *Drehkegel* Δ^* mit lotrechter Achse, darstellbar durch

$$(69) \quad x^* + iy^* = m + ue^{iv}, \quad z^* = u, \quad (m \neq 0),$$

dann erhalten wir vermöge \mathfrak{U} eine *Fläche 8. Ordnung* Δ mit der Parameterdarstellung

$$(70) \quad x + iy = m^2 + 2mu e^{iv} + u^2 e^{2iv}, \quad z = u.$$

Der *Schichtenplan* besteht wie bei der oben besprochenen Fläche 4. Ordnung $\Delta_0 (= \mathfrak{R}\Delta)$ aus konzentrischen und konfokalen *Pascalschnecken*. Die Fallparabeln $v = \text{const}$ gehen sämtlich durch den *konischen Knotenpunkt* $S(m^2, 0, 0)$ der Fläche und verlaufen in den Ebenen

$$(71) \quad (x - m^2) \sin v - y \cos v = 2mz \cdot \sin \frac{v}{2},$$

die einen von S ausstrahlenden Berührungskegel der Fläche einhüllen, dessen Schichtenlinien sich als zweispitzige Epizykloiden erweisen. — Auch Δ ist eine *Betragsfläche*, nämlich für die Funktion

$$(72) \quad \omega = m \pm \sqrt{\zeta}.$$

Für jede weitere Annahme einer Böschungstorse Φ^* tritt eine nichtausgeartete *Gratlinie* auf, die entsprechend transformiert auch bei der zugehörigen Fläche Φ erscheint. Hier wäre beispielsweise die *Müllersche Schraubfläche* mit ebenen Fallinien anzuführen [1], die aus einer *Schraubtorse* Φ^* mit der Achse z hervorgeht; die auftretende Gratlinie ist naturgemäß eine Bahnschraublinie.

IV. Zusammenfassung.

Die Frage nach allen *Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien* wurde durch die voranstehenden Untersuchungen vollständig beantwortet. Nach Ausschluß der trivialen Lösungen, bestehend aus *Gesimsflächen* mit lotrechtem Evolutenzylinder und Kegelschnittprofil — Drehflächen und Horizontalzylinder als Grenzfälle inbegriffen — verbleiben für das Auftreten von Mittelpunktskegelschnitten als Fallinien nur mehr wenige, verhältnismäßig scharf umrissene Flächentypen, deren Schichtenlinien gleichfalls Kegelschnitte sind, während die Flächen mit Parabeln als Fallinien eine ziemlich ausgedehnte Familie bilden, in die noch eine willkürliche Funktion eingeht und welche Schichtenlinien beliebiger Form besitzen können. Charakteristisch für die nichttrivialen Lösungsflächen ist das Vorhandensein von *waagerechten Tal- oder Kammwegen*, längs welchen eine Schichtenebene berührt wird (die unter Umständen ins Unendliche rücken kann), sowie das Auftreten von *lotrechten Fokalachsen*; das von einer solchen Fokalachse ausgehende Minimalebene-paar wird von allen Fallkegelschnitten berührt, so daß deren Grundrisse — die Orthogonaltrajektorien des Schichtenplans — einen oder sämtliche Brennpunkte gemeinsam haben.

Im Falle *elliptischer Fallinien* erhält man im wesentlichen die zu einem Schichtenplan aus konfokalen Hyperbeln gehörigen, von einem einzigen Formparameter α abhängigen ∞^1 *Flächen 8. Ordnung* (17), wenn man von Maßstabänderungen und affinen Streckungen in Lotrichtung absieht. Hier ordnen sich, doppelt überdeckt, für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die bekannten *Eckhartschen Flächen 4. Ordnung* (19 a, b) ein, ferner ist noch als Grenzform die *Darboux'sche Umschwungwendelfläche* (20) anzuführen, deren Schichtenplan in ein Strahlbüschel ausgeartet ist.

Im Falle *hyperbolischer Fallinien* stellen sich analog die zu einem Schichtenplan aus konfokalen Ellipsen gehörigen *Flächen 8. Ordnung* ein, wobei jedoch hinsichtlich der Realitätsverhältnisse *drei Typen* (26), (30) und (36) zu unterscheiden sind, welche durch einen reellen, imaginären bzw. uneigentlichen Talweg gekennzeichnet sind. Neben der bereits genannten Eckhartschen Fläche 4. Ordnung (19b) — die sowohl Ellipsen als auch Hyperbeln zu Fallinien hat — stellt sich als (doppelt überdeckte) Sonderform noch die *dritte Eckhartfläche* (31) ein.

Besitzt eine Fläche *parabolische Fallinien*, so weisen dieselben durchwegs die gleiche Achsenneigung gegen die Horizontale auf. Legt man die stets vorhandene Fokalachse in die z -Achse und den allfälligen Talweg in die xy -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems, so läßt sich die Fläche mittels einer einfachen *rationalen Punkttransformation* \mathfrak{I} (57) oder \mathfrak{II} (67) aus einer *Böschungstorse* ableiten. Hierauf beruhen im Grunde die integrallosen Darstellungen (52) bzw. (66) der in Rede stehenden Flächen, in welche eine willkürliche Funktion $h(v)$ eingeht. Umgekehrt transformiert \mathfrak{I} oder \mathfrak{II} jede beliebige Böschungstorse in eine Fläche mit Fallparabeln, die dabei den Torsenerzeugenden entsprechen; Anwendung von \mathfrak{I} liefert Flächen mit eigentlichem Talweg, Anwendung von \mathfrak{II} solche mit Fallparabeln waagerechter Achsenlage, also ohne eigentlichen Talweg. Insonderheit

gehen aus schrägen Ebenen spezielle *Römerflächen* (44) bzw. (63) hervor, die als Grenzformen der Flächen mit elliptischen oder hyperbolischen Fallinien anzusehen sind, da sie Parabeln zu Schichtenlinien haben.

Unter den besonderen Beispielen wurden die Flächen (36), (60) und (70) hervorgehoben, die sich als *Betragsflächen* komplexer analytischer Funktionen deuten lassen. Die nicht uninteressante Frage nach den allgemeinsten Funktionen $\omega = f(\zeta)$, deren Betragsflächen durch ebene Fallinien ausgezeichnet sind, bleibt einer eigenen Abhandlung vorbehalten.

Literatur.

- [1] E. Müller, Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schraub- und Schiebflächen. Sitzsber. Akad. Wiss. Wien **120** (1911), 1763—1810, insb. 1797.
- [2] L. Eckhart, Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind. Sitzsber. Akad. Wiss. Wien **131** (1922), 417—427.
- [3] W. Wunderlich, Darstellende Geometrie der Spiralfächen. Monatsh. Math. Phys. **46** (1938), 248—265, insb. 255.
- [4] W. Wunderlich, Flächen mit ebenen Fallinien. Monatsh. Math. **65** (1961), 291—300.
- [5] W. Wunderlich, Römerflächen mit ebenen Fallinien. Annali mat. pura appl. (im Druck).
- [6] W. Kautny, Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. **63** (1960), 169—188.
- [7] J. Krames, Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes. Monatsh. Math. Phys. **46** (1937), 38—50, insb. 47.

Eingegangen 27. Dezember 1960.